

## 1. Лекции (в форме видео на сайте teach-in, прочитаны И.Н. Сергеевым)

- a. 19 марта — Устойчивость по Ляпунову (часть 2)  
<https://teach-in.ru/lecture/2018-03-15-Sergeev>
- b. 26 марта — Устойчивость по Ляпунову (часть 3)  
<https://teach-in.ru/lecture/03-22-Sergeev-P1>
- c. 2 апреля — Автономные системы  
<https://teach-in.ru/lecture/2018-03-29-Sergeev>
- d. 9 апреля — Первый интеграл  
<https://teach-in.ru/lecture/2018-04-05-Sergeev>
- e. 16 апреля — Фазовые пространства малых размерностей  
<https://teach-in.ru/lecture/2018-04-12-Sergeev>
- f. 23 апреля — Особые точки Пуанкаре. Динамические системы  
<https://teach-in.ru/lecture/2018-04-19-Sergeev>
- g. 30 апреля — Фазовые потоки  
<https://teach-in.ru/lecture/2018-04-26-Sergeev>
- h. 7 мая — Циклы в фазовых пространствах  
<https://teach-in.ru/lecture/2018-05-03-Sergeev>
- i. 14 мая — Уравнения в частных производных первого порядка  
<https://teach-in.ru/lecture/2018-05-10-Sergeev>

## 2. Учебники лектора по курсу:

1. Сергеев И.Н. Дифференциальные уравнения. М.: Издательский центр «Академия», 2013.
2. Сергеев И.Н. Лекции по дифференциальным уравнениям. М.: Издательство Московского университета, 2019.

## 3. Программа курса

1. Поля направлений на плоскости. Интегральные кривые. Общее решение. Уравнение первообразной. Уравнение в дифференциалах. Автономное уравнение. Интегральный критерий единственности.
2. Интеграл уравнения в дифференциалах. Уравнение в полных дифференциалах, его потенциал. Уравнение с разделяющимися переменными. Однородное уравнение.
3. Нормальные системы дифференциальных уравнений. Задача Коши. Локальная теорема существования и единственности. Глобальная теорема единственности. Теорема существования (Пеано). Непродолжаемые решения, продолжаемость до границы области.
4. Уравнения произвольного порядка. Каноническая замена. Задача Коши. Локальная теорема существования и единственности. Глобальная теорема единственности. Теорема существования (Пеано). Продолжаемость решений до границы области.
5. Леммы об интегральном (Гронуолла — Беллмана) и дифференциальном неравенствах. Теорема продолжаемости для линейной системы и линейного уравнения.

6. Уравнения, не разрешённые относительно производной. Локальная теорема существования и единственности. Дискриминантная кривая. Метод введения параметра.
7. Линейные однородные системы. Теорема об изоморфизме. Фундаментальная система решений. Фундаментальная матрица. Оператор Коши. Определитель Вронского и линейная зависимость векторных функций. Формула Лиувилля — Остроградского.
8. Линейные однородные уравнения. Общее решение. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского и линейная зависимость скалярных функций. Формула Лиувилля — Остроградского. Восстановление линейного уравнения по его фундаментальной системе решений.
9. Линейные неоднородные системы и уравнения. Общее решение. Метод вариации постоянных. Функция Грина задачи Коши.
10. Линейные периодические системы. Оператор монодромии и мультипликаторы. Критерий существования и единственности периодического решения. Одномерный случай.
11. Линейные неоднородные уравнения второго порядка. Краевые задачи. Вырожденные и невырожденные задачи, теорема об альтернативе. Функция Грина краевой задачи, теорема существования.
12. Линейные однородные уравнения второго порядка. Нули решений. Переमेжаемость нулей. Устранение коэффициента при первой производной. Теорема Штурма. Оценки колеблемости. Теорема Кнезера.
13. Экспонента матрицы. Вычисление экспоненты методом жордановых форм. Фундаментальная система решений линейной системы с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов.
14. Логарифм матрицы. Вычисление логарифма методом жордановых форм. Ляпуновское преобразование. Теория Флоке — Ляпунова.
15. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристический многочлен уравнения. Общее решение. Уравнения Эйлера.
16. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и квазимногочленом в правой части. Вид частного решения. Резонанс.
17. Семейство задач Коши для нормальной системы. Непрерывная зависимость решения от правых частей. Компактно-открытая топология в пространстве решений. Непрерывная зависимость решения от параметра и от начального значения.
18. Дифференцируемость решения по параметру. Лемма Адамара. Система в вариациях по параметру и по начальному значению. Разложение в ряд до линейного члена. Фазовый объем. Теорема Лиувилля. Теорема о выпрямлении интегральных кривых.
19. Семейство задач Коши для уравнения произвольного порядка. Непрерывность и дифференцируемость решения по параметру. Уравнение в вариациях по параметру. Разложение решения по параметру в ряд до линейного члена. Уравнение малых колебаний маятника.
20. Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость решения нормальной системы или уравнения произвольного порядка. Инвариантность устойчивости относительно начального момента и нормы.

21. Устойчивость решений линейных однородных и неоднородных систем. Критерии устойчивости линейной системы с постоянными и периодическими коэффициентами.
22. Леммы Ляпунова об устойчивости и об асимптотической устойчивости. Теорема Четаева. Теорема Ляпунова об исследовании устойчивости по первому приближению.
23. Автономные системы. Инвариантность фазовых кривых относительно временных сдвигов. Динамическая система. Фазовый поток. Генератор фазового потока. Три типа фазовых траекторий автономной системы.
24. Теорема о выпрямлении фазовых траекторий автономной системы. Первый интеграл. Независимые первые интегралы. Полная система первых интегралов. Локальная теорема существования полной системы независимых первых интегралов. Общее решение автономной системы.
25. Одномерное фазовое пространство. Устойчивость особой точки. Иррациональный поворот окружности. Совпадение временного и фазового среднего для характеристической функции множества.
26. Двумерное фазовое пространство. Фазовые кривые автономной системы и интегральные кривые уравнения в дифференциалах. Фигуры Лиссажу. Иррациональная обмотка тора, ее всюду плотность на торе. Уравнение Ньютона. Интеграл энергии.
27. Классификация Пуанкаре особых точек на плоскости. Седло, узел, центр, фокус. Особые точки уравнения колебаний маятника. Система Лотка — Вольтерра.
28. Цикл на плоскости. Мультипликатор цикла. Вычисление мультипликатора. Отображение Пуанкаре. Предельное множество фазовой траектории. Предельный цикл. Устойчивость цикла. Мешок Бендиксона. Связь устойчивости с функцией последования и с мультипликатором цикла.
29. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка. Его характеристики. Общее решение. Общий вид интегрирующего множителя уравнения в дифференциалах. Локальная теорема существования и единственности решения задачи Коши.
30. Квазилинейные однородные уравнения в частных производных первого порядка. Его характеристики. Существование интегрирующего множителя уравнения в дифференциалах. Локальная теорема существования и единственности решения задачи Коши. Уравнение Хопфа.

Дополнительная литература к курсу

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.
2. Боровских А.В., Перов А.И. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Ижевск: НИЦ РХД, 2004.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Мышкиса А.Д., Олейник О.А. — М.: МГУ, 1984.
4. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
5. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: КомКнига, 2007.