Условия задач

1. Существует ли возрастающая последовательность натуральных чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, такая что для всякого $k \in \mathbb{Z}$ последовательность $\{a_n + k\}_{n=1}^{\infty}$ содержит лишь конечное число простых чисел?

2. Рассмотрим последовательность $a_n = \lfloor \alpha^n \rfloor$, где $\alpha = 3 + \sqrt{5}$, $\lfloor x \rfloor$ — целая часть числа x. Докажите, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ справедливо сравнение $a_n \equiv -1 \pmod{2^n}$.

3. Найдите все целые числа x, y, такие что
$$\frac{x^2 + x + 2}{y^6 - 2} \in \mathbb{Z}.$$

4. Пусть p — простое число, $n \in \mathbb{N}$, причём $p \mid \varphi(n)$ (где φ — функция Эйлера). Докажите, что количество натуральных чисел, не превосходящих n/p и взаимно простых с n, равно $\varphi(n)/p$.

5. Докажите, что уравнение
$$a^{ab} + 1 = c^{cd}$$
не имеет решений в натуральных числах a, b, c, d.

6. Пусть A — целочисленная* квадратная матрица, p — простое число.

   а) Докажите, что справедливо сравнение
   $$\mathrm{Tr}\left(A^p\right) \equiv \mathrm{Tr}(A) \pmod{p},$$
   где $\mathrm{Tr}(M)$ — след матрицы M.

   б) Докажите, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ справедливо сравнение
   $$\mathrm{Tr}\left(A^{p^n}\right) \equiv \mathrm{Tr}\left(A^{p^{n-1}}\right) \pmod{p^n}.$$

*То есть элементы матрицы — целые числа.