АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Лекция А.И. Галочкина

Лекция основана на статье Д.Неймана [1], в которой приводится относительно несложное доказательство асимптотического закона распределения простых чисел. В это доказательство внесены некоторые усовершенствования. Краткую историю вопроса, а также доказательство, близкое к традиционному, можно найти в книге [2].

Асимптотический закон распределения простых чисел. Пусть $\pi(x)$ – количество простых чисел, не превосходящих x. Тогда

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi(x)\ln x}{x}=1.$$

Рассмотрим функцию Чебышева

$$\psi(x)=\sum_{n\le x}\Lambda(n)\,,$$

где $\Lambda(n)=\ln p$, если n – степень простого числа p $(n=p^k)$ и 0 при $n\ne p^k$.

Асимптотический закон эквивалентен следующему утверждению

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{x}=1. \tag{1}$$

(см. [2] стр. 27.)

Лемма 1. *Если сходится интеграл*

$$\int_1^{+\infty}\frac{\psi(x)-x}{x^2}\,dx\,,$$

то справедливо равенство (1), а значит справедлив асимптотический закон распределения простых чисел.

Доказательство. Допустим противное: существует число $\varepsilon>0$, такое, что для любого $A>1$ существует число $y>A$, при котором или $\dfrac{\psi(y)}{y}>1+\varepsilon$, или $\dfrac{\psi(y)}{y}<1-\varepsilon$.

В первом случае из монотонности функции $\psi(x)$ при $x = ty$ следует, что

$$\int_y^{y(1+\varepsilon)} \frac{\psi(x)-x}{x^2}\,dx \ \geq \int_y^{y(1+\varepsilon)} \frac{y(1+\varepsilon)-x}{x^2}\,dx \ = \int_1^{1+\varepsilon} \frac{(1+\varepsilon)-t}{t^2}\,dt \ > 0,$$

что противоречит критерию Коши. Здесь использовано то, что на отрезке интегрирования $\psi(x) \geq \psi(y) > (1+\varepsilon)y$ и то, что последний интеграл не зависит от y. Аналогично, во втором случае

$$\int_{y(1-\varepsilon)}^{y} \frac{\psi(x)-x}{x^2}\,dx \ \leq \int_{y(1-\varepsilon)}^{y} \frac{y(1-\varepsilon)-x}{x^2}\,dx \ = \int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{(1-\varepsilon)-t}{t^2}\,dt \ < 0,$$

что тоже противоречит критерию Коши. Лемма доказана. $\square$

Пусть $s = \sigma + it$, $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана. На стр. 36 книги [2] доказано, что при $\sigma > 1$ функция

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}\,. \tag{2}$$

Функцию $\zeta(s)$ можно аналитически продолжить в область $\sigma > 0$ (см. теорему 1 стр. 42 из книги [2]). Рассмотрим функцию

$$f(s) = -\frac{\zeta'(s)}{s\,\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}\,. \tag{3}$$

Лемма 2. *1. Функция $f(s)$ аналитична в области $\sigma > 1$ и у любой точки $s = 1 + it$ имеется окрестность, в которой эта функция аналитична.*

2. При $\sigma > 1$

$$f(s) = \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x)-x}{x^{s+1}}\,dx\,.$$

Доказательство. Первое утверждение следует из рассуждений, приведенных на стр. 54 книги [2]. С помощью преобразования Абеля ([2] стр. 39) при $a_n = \Lambda(n)$, $g(x) = x^{-s}$, $A(x) = \psi(x)$ и равенства (2) при $\sigma > 1$ получаем:

$$-\frac{\zeta'(s)}{s\,\zeta(s)} = \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\,dx\,,$$

откуда следует второе утверждение. Лемма доказана. $\square$

Из леммы 1 следует, что для доказательства асимптотического закона достаточно установить, что

$$\lim_{u\to+\infty}\int_1^u \frac{\psi(x)-x}{x^2}\,dx \,=f(1)\,. \tag{4}$$

Лемма 3. *При любом* $u>1$

$$f_u(s)=\int_1^u \frac{\psi(x)-x}{x^{s+1}}\,dx$$

– целая функция.

Доказательство.

$$f_u(s)=\sum_{k=1}^{[u]-1}\int_k^{k+1}\frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\,dx\,+\int_{[u]}^u\frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\,dx\,-\int_1^u\frac{dx}{x^s}=$$
$$=\sum_{k=1}^{[u]-1}\psi(k)\frac{(k+1)^{-s}-k^{-s}}{-s}+\psi([u])\frac{u^{-s}-[u]^{-s}}{-s}-\frac{u^{1-s}-1}{1-s}\,.$$

Все слагаемые – целые функции, имеющие устранимые особые точки, соответственно $s=0$ и $s=1$. Лемма доказана. □

Пусть $R>0$, $0<\eta<1$. Рассмотрим контур $\Gamma(R,\,\eta)$, состоящий из полуокружности

$$C_1(R):\quad |s-1|=R,\quad \sigma\geq 1 \tag{5}$$

и ломаной $L(R,\,\eta)$, проходящей в указанном порядке через точки

$$1+iR,\quad \eta+iR,\quad \eta-iR,\quad 1-iR. \tag{6}$$

Лемма 4. *Если в прямоугольнике*

$$P(R,\,\eta):\quad \eta\leq\sigma<1,\quad -R\leq t\leq R \tag{7}$$

$\zeta(s)\neq 0$, *то*

$$f(1)-f_u(1)=\frac{1}{2\pi iR}\int_{\Gamma(R,\,\eta)}(f(s)-f_u(s))u^{s-1}\left(\frac{R}{s-1}+\frac{s-1}{R}\right)\,ds\,.$$

Доказательство. По леммам 2 и 3 подынтегральная функция имеет внутри контура интегрирования единственную особую точку – полюс $s=1$. Утверждение леммы следует из теоремы о вычетах. □

Лемма 5. *Существует положительная постоянная B, такая, что интеграл по полуокружности (5)*

$$\left|\frac{1}{2\pi iR}\int_{C_1(R)}(f(s)-f_u(s))u^{s-1}\left(\frac{R}{s-1}+\frac{s-1}{R}\right)ds\right| \le \frac{B}{R}\,.$$

Доказательство. Из оценок Чебышева (см. §4 из главы 1 книги [2]) следует, что при $x \ge 1 \quad \psi(x) \le B_1 x,$ а тогда при $\sigma > 1$

$$|f(s)-f_u(s)| = \left|\int_u^{+\infty}\frac{\psi(x)-x}{x^{s+1}}\,dx\right| \le \int_u^{+\infty}\frac{(B_1+1)x\,dx}{x^{\sigma+1}} = \frac{Bu^{1-\sigma}}{|\sigma-1|}\,.$$

Далее, $|u^{s-1}| = u^{\sigma-1}$ и на окружности $C_1(R)$

$$\left|\frac{R}{s-1}+\frac{s-1}{R}\right| = 2\Re\frac{s-1}{R} = 2\frac{|\sigma-1|}{R}\,.$$

Подставляя все эти оценки, получаем, что интеграл в лемме оценивается величиной

$$\frac{1}{2\pi R}\cdot\pi R\cdot\frac{Bu^{1-\sigma}}{|\sigma-1|}\cdot u^{\sigma-1}\cdot 2\frac{|\sigma-1|}{R} = \frac{B}{R}\,.$$

Лемма доказана. □

Лемма 6. *Интеграл по ломаной $L(R,\eta)$, проходящей через точки (6),*

$$\left|\frac{1}{2\pi iR}\int_{L(R,\eta)}f_u(s)u^{s-1}\left(\frac{R}{s-1}+\frac{s-1}{R}\right)ds\right| \le \frac{B}{R}\,.$$

Доказательство. Рассмотрим замкнутый контур, состоящий из ломаной $L(R,\eta)$ и левой полуокружности

$$C_2(R): \quad |s-1| = R, \quad \sigma \le 1.$$

Из леммы 3 следует, что подынтегральная функция не имеет особых точек внутри этого контура, а значит интеграл по этому контуру равен нулю. Поэтому интеграл в лемме 6 равен такому же интегралу по полуокружности $C_2(R)$. В этом интеграле

$$|f_u(s)| = \left|\int_1^u\frac{\psi(x)-x}{x^{s+1}}\,dx\right| \le \int_1^u\frac{(B_1+1)x\,dx}{x^{\sigma+1}} < \frac{Bu^{1-\sigma}}{|\sigma-1|}\,.$$

Все остальные оценки из доказательства леммы 5 здесь также имеют место на полуокружности $C_2(R)$. Из всех этих оценок следует утверждение леммы. □

Доказательство асимптотического закона. Пусть ε — произвольное положительное число. Зафиксируем такое число R, что в леммах 5 и 6 $\dfrac{B}{R} < \dfrac{\varepsilon}{5}$. Так как при $\sigma \geq 1 \quad \zeta(s) \neq 0$, то по теореме о единственности аналитической функции в прямоугольнике (7) $P(R; 0,5)$ имеется лишь конечное число нулей функции $\zeta(s)$. Поэтому можно выбрать число η, $0 < \eta < 0,5$ так, чтобы в прямоугольнике $P(R, \eta)$ не было нулей функции $\zeta(s)$, а значит особых точек функции (3) $f(s)$. В таком случае интегралы в леммах 5 и 6 по модулю не превосходят $\dfrac{\varepsilon}{5}$. Из леммы 4 следует, что для завершения доказательства асимптотического закона достаточно доказать, что

$$\lim_{u\to+\infty}\int_{L(R\,,\eta)} g(s)u^{s-1}\,ds = 0\,, \quad \text{где} \quad g(s) = \frac{1}{2\pi iR} f(s)\left(\frac{R}{s-1} + \frac{s-1}{R}\right).$$

На ломаной $L(R\,, \eta)$ функция $g(s)$ непрерывна, а значит ограничена: $|g(s)| \leq C$. Оценим интеграл на звеньях этой ломаной.

$$\left|\int_{1+iR}^{\eta+iR} g(s)u^{s-1}\,ds\right| \leq C\int_{-\infty}^{1} u^{\sigma-1}\,d\sigma = \frac{C}{\ln u} < \frac{\varepsilon}{5} \quad \text{при} \quad u > u_1(\varepsilon)\,.$$

Аналогично оценивается интеграл на отрезке $[\eta - iR\,, 1 - iR]$. Наконец,

$$\left|\int_{\eta-iR}^{\eta+iR} g(s)u^{s-1}\,ds\right| \leq 2RCu^{-(1-\eta)} < \frac{\varepsilon}{5} \quad \text{при} \quad u > u_2(\varepsilon)\,.$$

Из всех полученных оценок следует, что в лемме 4 при некоторых $R\,, \eta$ и $u > \max(u_1,\, u_2)$

$$|f(1) - f_u(1)| < \varepsilon$$

и из (4) и леммы 1 следует утверждение асимптотического закона. □

Примечание. По сравнению с доказательством, приведенном в книге [2], здесь не потребовалось оценивать функции $\zeta(s)$, $\quad \zeta'(s)$, $\quad \dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$. Однако пришлось использовать оценку Чебышева функции $\psi(x)$.

Список литературы

[1] D.J.Newman. Simple analytic proof of the prime number tyeorem // Amer. Math. Monthly — 1980. — V. 87. P. 693-696.

[2] А.И. Галочкин, Ю.В. Нестеренко, А.Б. Шидловский Введение в теорию чисел. Изд-во Моск. ун-та, 1995.