Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра теории чисел

Дипломная работа

О неулучшаемости неравенств переноса для равномерных диофантовых экспонент

Вероника Мингалеева

Научный руководитель
д.ф.-м.н. Олег Николаевич Герман

28 мая 2017 г.

1 Введение

Рассмотрим вектор $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$ такой, что числа $1, \theta_1, \ldots, \theta_n$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Мы будем приближать этот вектор рациональным вектором $(\frac{y_1}{x}, \ldots, \frac{y_n}{x})$, где числа $x, y_1, \ldots, y_n$ целые и взаимно простые в совокупности.

Точность приближения мы будем оценивать с помощью l_∞ расстояния от приближения до вектора $\boldsymbol{\theta}$.

При этом нас будут интересовать как можно более "простые" приближения: мы хотим, чтобы у рационального вектора был как можно меньший знаменатель x.

Ясно, что чтобы увеличивать точность, приходится увеличивать знаменатель. Чтобы оценить, насколько можно увеличить точность, увеличивая знаменатель, можно использовать так называемую диофантову экспоненту.

Определение 1. Равномерной диофантовой экспонентой вектора $\boldsymbol{\theta}$ называется точная верхняя грань таких чисел γ, что для всех достаточно больших t найдутся ненулевое целое число x и целочисленный вектор $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, такие что:

$$|x| < t, \quad ||\boldsymbol{\theta} x - \boldsymbol{y}||_\infty < t^{-\gamma}$$

Равномерную диофантову экспоненту вектора $\boldsymbol{\theta}$ мы будем обозначать символом $\alpha(\boldsymbol{\theta})$.

Можно обобщить задачу приближения вещественного вектора рациональным: вместо вектора $\boldsymbol{\theta}$ будем рассматривать матрицу Θ размера $n \times m$ и искать такие целочисленные векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ и $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, при которых разность $\Theta\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ будет как можно меньше. Ясно, что при $m = 1$, Θ становится столбцом и мы как раз получаем описанный ранее случай. Как и прежде, мы заинтересованы в том, чтобы $\boldsymbol{x}$ был не слишком большим, поэтому мы введем понятие дифантовой экспоненты и в общем случае.

Определение 2. Равномерной диофантовой экспонентой матрицы Θ называется точная верхняя грань таких чисел γ, что для всех достаточно больших t найдутся ненулевые целочисленные векторы $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, такие что:

$$||\boldsymbol{x}||_\infty < t, \quad ||\Theta\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||_\infty < t^{-\gamma}$$

Равномерную диофантову экспоненту матрицы Θ мы будем обозначать символом $\alpha(\Theta)$.

Помимо случая $m = 1$ интересно также рассмотреть случай $n = 1$, в котором матрица Θ становится строкой $\boldsymbol{\theta}^T$. Этот случай имеет простую геометрическую интерпретацию: мы строим приближение вектора $\boldsymbol{\theta}$ гиперплоскостью с нормальным вектором $\boldsymbol{x}$ и сдвигом y, при этом мы хотим, чтобы коэфициенты уравнения этой гиперплоскости были не очень большими, и чтобы расстояние от этой гиперплоскости до $\boldsymbol{\theta}$ было как можно меньше.

В случае, если фиксирован вектор-столбец $\boldsymbol{\theta}$, символом α мы будем обозначать $\alpha(\boldsymbol{\theta})$, а символом α^T будем обозначать $\alpha(\boldsymbol{\theta}^T)$.

В [7] Ярник нашел алгебраическое соотношение на α и α^T в случае $n = 2$:

$$\alpha + \frac{1}{\alpha^T} = 1 \tag{1}$$

В статье [3] О. Герман показал, что

$$\alpha^T \geq \frac{n-1}{1-\alpha}. \tag{2}$$

и

$$\alpha \geq \frac{1-(\alpha^T)^{-1}}{n-1}. \tag{3}$$

В статьях [1] и [2] авторы независимо показали, что оценки Германа неулучшаемы. Мы начнем с изложения результатов Марната.

2 Результат А. Марната

Мы сформулируем основной результат статьи [1] в виде теоремы:

Теорема 1. *Пусть $n \geq 2$ целое число, $\hat{\mu} \in [n, +\infty]$, $\hat{\lambda} \in [\frac{\hat{\mu}-1}{(n-1)\hat{\mu}}, \frac{\hat{\mu}-(n-1)}{\hat{\mu}}]$ (если $\hat{\mu} = +\infty$, то $\hat{\lambda} \in [\frac{1}{n-1}, 1]$). Тогда найдётся бесконечное (мощности континуум) множество таких векторов $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, что числа $1, \theta_1, \dots, \theta_n$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$ и $\alpha(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\lambda}$, $\alpha^T(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\mu}$.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится некоторая подготовка.

Мы будем рассматривать наше исходное пространство $\mathbb{R}^n$ как гиперплоскость в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, все точки которой имеют первую координату, равную 1.

Пусть $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{n+1}$ – вектор единичной длины (в смысле l_2-нормы), такой что $u_0 \neq 0$. Для вещественного параметра $Q \geq 1$ рассмотрим "шайбу":

$$C_{\boldsymbol{u}}(Q) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : ||\boldsymbol{x}||_2 \leq 1, |\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle| \leq Q^{-1}\}$$

Обозначим через $\lambda_k(C_{\boldsymbol{u}}(Q))$ наименьшее число λ, при котором $\lambda C_{\boldsymbol{u}}(Q)$ содержит по меньшей мере k линейно независимых целочисленных векторов. Пусть $q \geq 0$ и $1 \leq k \leq n+1$. Введем обозначения

$$L_{\boldsymbol{u},k}(q) = \ln \lambda_k(C_{\boldsymbol{u}}(e^q)), \quad \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{u}}(q) = (L_{\boldsymbol{u},1}(q), \dots, L_{\boldsymbol{u},n+1}(q))$$

В [8] установлена связь между $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{u}}$ и диофантовыми экспонентами:

Утверждение 1. *Пусть задан вектор $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||\boldsymbol{u}||_2 = 1$, $u_0 \neq 0$. Положим $\boldsymbol{\theta} = (\frac{u_1}{u_0}, \dots, \frac{u_n}{u_0})$. Тогда выполнены соотношения:*

$$\liminf_{q \to +\infty} \frac{L_{\boldsymbol{u},n+1}(q)}{q} = \frac{\alpha(\boldsymbol{\theta})}{1+\alpha(\boldsymbol{\theta})}$$

$$\limsup_{q \to +\infty} \frac{L_{\boldsymbol{u},1}(q)}{q} = \frac{1}{1+\alpha^T(\boldsymbol{\theta})}$$

Ясно, что если для некоторой функции $\boldsymbol{P}(q)$ разность $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{u}}(q) - \boldsymbol{P}(q)$ ограничена, то в утверждении 1 можно заменить $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{u}}$ на $\boldsymbol{P}$.

В [4] определяются функции $\boldsymbol{P}(q)$ специального вида:

Определение 3. Пусть I – промежуток (бесконечное связное множество) в $[0, +\infty)$. Обобщенная $(n+1)$-система $\boldsymbol{P}(q) = (P_1, \dots, P_{n+1})$ – это набор кусочно-линейных функций на I, удовлетворяющий трем условиям:

(S1) Для всех точек $q \in I$ выполнено $0 \leq P_1(q) \leq \ldots \leq P_{n+1}(q)$ и $P_1(q) + \cdots + P_{n+1}(q) = q$

(S2) Если $(a, b) \subset I$ и все функции из $\boldsymbol{P}$ дифференцируемы на (a, b), то найдутся такие индексы $r_0 \leq r_1$, что на всём интервале (a, b) выполнено $P_{r_0} = P_{r_0+1} = \cdots = P_{r_1}$, и угловой коэфициент их графиков будет $\frac{1}{r_1 - r_0 + 1}$. Все остальные P_k постоянны на (a, b).

Если в точке $q \in I$ излом какой-либо функции из $\boldsymbol{P}$, то справа и слева от неё будут соответственно интервалы (a, q) и (q, b), на которых $\boldsymbol{P}$ дифференцируема, и, согласно **(S2)**, найдутся индексы r_0, r_1, s_0, s_1, для которых выполнены соотношения:

$$P_r'(q^-) = \frac{1}{r_1 - r_0 + 1},\ (r_0 \le r \le r_1)$$

$$P_s'(q^+) = \frac{1}{s_1 - s_0 + 1},\ (s_0 \le s \le s_1)$$

В этих обозначениях сформулируем третье условие:

(S3) Если в точке $q \in I$ находится излом какой-либо функции из $\boldsymbol{P}$, и, вдобавок, $r_0 < s_1$, то $P_{r_0} = P_{r_0+1} = \cdots = P_{s_1}$

Руа в [4] доказал следующее утверждение

Утверждение 2. *Для всякого ненулевого вектора $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{n+1}$ найдётся число $q_0 \ge 0$ и обобщенная $(n+1)$-система $\boldsymbol{P}$ на $[q_0, +\infty)$, для которой разность $\boldsymbol{L_u} - \boldsymbol{P}$ ограничена на $[q_0, +\infty)$. Обратно, для всякой обобщенной системы $\boldsymbol{P}$ на $[q_0, +\infty)$ существует ненулевой вектор $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{n+1}$, для которого разность $\boldsymbol{L_u} - \boldsymbol{P}$ ограничена на $[q_0, +\infty)$.*

Теперь всё готово для доказательства теоремы 1

Доказательство теоремы 1. Фиксируем $\hat{\mu} \ge n \ge 3$ (случай $n = 2$ рассмотрим позже). Выберем параметр $a \in [\frac{1}{n-1}, 1]$. Пусть q_0 – произвольное положительное вещественное число. Определим последовательность q_m соотношениями:

$$q_{6m+1} = \frac{(n-2)(\hat{\mu}+1) + (1-a)(m\hat{u} - n)}{(n-2)(\hat{\mu}+1)} q_{6m}$$

$$q_{6m+2} = \frac{(n+1) + (a+1)(\hat{\mu} - n)}{\hat{\mu}+1} q_{6m}$$

$$q_{6m+3} = \frac{\hat{\mu} + (1 + a(\hat{\mu} - n))^2}{\hat{\mu}+1} q_{6m}$$

$$q_{6m+4} = \frac{1 + (n + a(\hat{\mu} - n))(1 + a(\hat{\mu} - n))}{\hat{\mu}+1} q_{6m}$$

$$q_{6m+5} = \frac{1 + \hat{\mu}(1 + a(\hat{\mu} - n))}{\hat{\mu}+1} q_{6m}$$

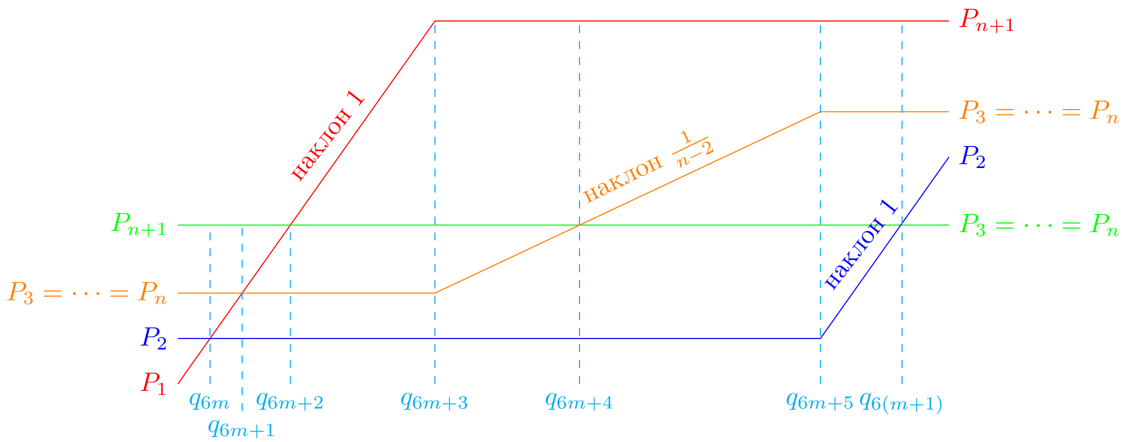
$$q_{6(m+1)} = (1 + a(\hat{\mu} - n)) q_{6m}$$

В точке q_0 определим функции $P_1, \ldots, P_{n+1}$ следующим образом:

$$P_1(q_0) = P_2(q_0) = \frac{q_0}{\hat{\mu}+1} \tag{4}$$

$$P_3(q_0) = \cdots = P_n(q_0) = \frac{1 + \frac{1-a}{n-2}(\hat{\mu} - n)}{\hat{\mu}+1} q_0 \tag{5}$$

$$P_{n+1}(q_0) = \frac{1 + a(\hat{\mu} - n)}{\hat{\mu}+1} q_0 \tag{6}$$



Далее определим P_j в точках $q_{6m}, q_{6m+1}, \ldots, q_{6(m+1)}$ как на рисунке 2. Полученная система функций будет объединенной $(n+1)$-системой. Действительно, достаточно проверить условие **(S1)**. Ограничения на параметр a гарантируют, что $P_j(q) \le P_i(q)$ при $i < j$ (будет выведено позднее из основного свойства 7). В точке q_0 выполнено условие $P_1(q_0) + \cdots + P_{n+1}(q_0) = q_0$, а в остальных точках оно выполняется по построению: при увеличении q на небольшое число t на всех участках, кроме $[q_{6m+3}, q_{6m+5}]$ возрастает лишь одна функция, причём её значение увеличивается на t; на участке $[q_{6m+3}, q_{6m+5}]$ растут $n-2$ функции, их значения увеличиваются на $\frac{t}{n-2}$.

Основное свойство функций $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{P}((1 + a(\hat{\mu} - n))q) = (1 + a(\hat{\mu} - n))\boldsymbol{P}(q) \tag{7}$$

Это свойство достаточно доказать для точек $q = q_{6m}$, т.к. если они доказаны для q_{6m}, то для точек q_{6m+j} верно $P_k(q_{6m+j}) = \mathrm{const}(k, j)q_{6m}$, а в остальных точках P_k определяется по линейности. Доказательство проводится прямой проверкой индукцией по m, в качестве примера проверим это свойство для P_{n+1}. Заметим, что функция P_{n+1} растет на участке $[q_{(6m+2)}, q_{(6m+3)}]$, а на остальных участках постоянна. На отрезке $[q_{(6m+2)}, q_{(6m+3)}]$ её угловой коэфициент равен единице, поэтому

$$P_{n+1}(q_{6(m+1)}) - P_{n+1}(q_{6m}) = P_{n+1}(q_{6m+3}) - P_{n+1}(q_{6m+2}) = q_{6m+3} - q_{6m+2}$$

Упростив правую часть этого раветства, получим

$$P_{n+1}(q_{6(m+1)}) - P_{n+1}(q_{6m}) = \frac{(1 + a(\hat{\mu} - n))^2 - a(\hat{\mu} - n) - 1}{\mu + 1} q_{6m} \tag{8}$$

Из предположения индукции следует, что $P_{n+1}(q_{6m}) = \frac{1+a(\hat{\mu}-n)}{\mu+1} q_{6m}$. Подставив это равентво в соотношение 8, получаем требуемое.

Теперь можно обосновать неравенства $P_j(q) \le P_i(q)$ при $j < i$: в точках q_{6m} выполняются соотношения 4, и достаточно доказать, что правые части этих соотношений неубывают с ростом индекса. Действительно, из $a \leq 1$ следует, что $P_3(q_{6m}) = \cdots = P_n(q_{6m}) > P_2(q_{6m})$, а из $a \geq \frac{1}{n-1}$ следует, что $\frac{1-a}{n-2} \leq a$ и $P_{n+1} \geq P_n$. Для остальных точек q неравентсва теперь очевидны из рисунка.

Из основного свойства 7 следует, что функция $f_j(q) = \frac{P_j(q)}{q}$ принимает все свои значение на отрезке $[q_0, q_6]$, так как отрезок $[q_{6m}, q_{6(m+1)}]$ получается из него умножением на $(1+a(\hat{\mu}-n))^m$, а значение функции f_j не меняется при умножении аргумента на это число. Поэтому

$$\limsup_{q\to+\infty} \frac{P_1(q)}{q} = \max_{q\in[q_0,q_6]} \frac{P_1(q)}{q} = \frac{P_1(q_0)}{q_0} = \frac{1}{\hat{\mu}+1}$$

$$\liminf_{q\to+\infty} \frac{P_{n+1}(q)}{q} = \min_{q\in[q_0,q_6]} \frac{P_{n+1}(q)}{q} = \frac{P_{n+1}(q_2)}{q_2} = \frac{1+a(\hat{\mu}-n)}{n+1+(1+a)(\hat{\mu}-n)}$$

Максимум f_1 достигается в точке q_0, так как на отрезке $[q_0, q_5]$ функция f_1 убывает, а на $[q_5, q_6]$ возрастает, при этом $f(q_0) = f(q_6)$.

Минимум f_{n+1} достигается в точке q_2, так как на отрезках $[q_0, q_2]$ и $[q_3, q_6]$ функция f_{n+1} убывает, а на отрезке $[q_2, q_3]$ возрастает, при этом $f(q_0) = f(q_6) > f(q_2)$.

Комбинируя утверждения 1 и 2, получаем, что найдётся вектор $\boldsymbol{\theta}$, удовлетворяющий соотношению

$$\frac{1}{\alpha^T(\boldsymbol{\theta})+1} = \limsup_{q\to+\infty} \frac{P_1(q)}{q} = \frac{1}{\hat{\mu}+1}$$

Откуда следует, что $\alpha^T(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\mu}$.

Аналогично, для α:

$$\liminf_{q\to+\infty} \frac{P_{n+1}(q)}{q} = \frac{\alpha(\boldsymbol{\theta})}{\alpha(\boldsymbol{\theta})+1} = \frac{1+a(\hat{\mu}-n)}{n+1+(1+a)(\hat{\mu}-n)}$$

Выражая $\alpha(\boldsymbol{\theta})$ из последнего равенства, получаем

$$\alpha(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1+a(\hat{\mu}-n)}{\hat{\mu}}$$

Так как a пробегает значения из $[\frac{1}{n-1}, 1]$, изменяя a можно добиться, чтобы $\alpha(\boldsymbol{\theta})$ принимало любое значение из $[\frac{\hat{\mu}-1}{(n-1)\hat{mu}}, \frac{\hat{\mu}-n+1}{\hat{\mu}}]$.

Мы доказали, что для выбранных $\hat{\mu} \geq n$ и $\hat{\lambda} = \frac{1+a(\hat{\mu}-n)}{\hat{\mu}}$ найдётся по крайней мере один вектор $\boldsymbol{\theta}$ с такими равномерными диофантовыми экспонентами. Докажем, что таких векторов бесконечно много. Пусть фиксировано число q_0. Выберем произвольные $p_0, r_0 \in (q_0, q_5)$. Для p_0, r_0 построим указанным ранее способом обобщенные $(n+1)$-системы $\boldsymbol{P}^{p_0}, \boldsymbol{P}^{r_0}$ с параметром a, стартующие из p_0 и r_0 соответственно (при этом значения в начальных точках сделаем одинаковыми и зависящими только от q_0, т.е. $P_1^{p_0}(p_0) = P_1^{r_0}(r_0) = \frac{q_0}{\hat{\mu}+1}$ и т.д.). В точке q_6 эти системы различны, так как для любых различных точек из $[q_0, q_6)$ в системе $\boldsymbol{P}^{q_0}$ найдётся функция, принимающая в этих точках разные значения, и

$$\boldsymbol{P}^{p_0}(q_6) = \boldsymbol{P}^{q_0}(q_6 - (p_0 - q_0))$$

$$\boldsymbol{P}^{r_0}(q_6) = \boldsymbol{P}^{q_0}(q_6 - (r_0 - q_0))$$

Поэтому
$$||\boldsymbol{P}^{p_0}(q_{6m}) - \boldsymbol{P}^{r_0}(q_{6m})||_\infty = \frac{q_{6m}}{q_6}||\boldsymbol{P}^{p_0}(q_6) - \boldsymbol{P}^{r_0}(q_6)||_\infty \to +\infty$$

Поэтому их разность неограничена и им не может соответствовать один вектор $\boldsymbol{\theta}$. Значит, каждому числу из интервала (q_0, q_6) соответствует свой, отличный от других, вектор $\boldsymbol{\theta}$.

Если $n = 2$, из конструкции нужно убрать $P_3 = \dots = P_n$ и участок $[q_{6m+3}, q_{6m+5}]$, P_2 в этом случае возрастает от q_{6m} до q_{6m+2}, а дальше постоянна. Параметр a становится равным 1, т.к. q_5 заменяет q_3 для P_{n+1}. Тогда получаются в точности алгебраические соотношения 1 Ярника.

Если $\hat{\mu} = +\infty$, заменим её на $m + n + 1$ в нашей конструкции. Для заданного q_0 определим последовательность q_{6m} соотношением

$$q_{6m} = (m+1)q_{6(m-1)}$$

Функции P_k определим в точках q_{6m} следующим образом:

$$P_1(q_{6m}) = P_2(q_{6m}) = \frac{q_{6m}}{m+n+2}$$

$$P_3(q_{6m}) = \dots = P_n(q_{6m}) = \frac{1 + \frac{1-a}{n-2}(m+1)}{m+n+2} q_{6m}$$

$$P_{n+1}(q_{6m}) = \frac{1 + a(m+1)}{m+n+2} q_{6m}.$$

В остальных точках P_k определяются как на рисунке.

Заметим, что теперь графики не обладают свойствои инвариантности при умножении на некоторый коэфициент, как это было ранее.

Запишем верхний и нижний пределы:

$$\limsup_{q\to+\infty} \frac{P_1(q)}{q} = \limsup_{m\to+\infty} \max_{q_{6m}\le q\le q_{6(m+1)}} \frac{P_1(q)}{q} = \limsup_{m\to+\infty} \frac{P_1(q_{6m})}{q_{6m}} =$$
$$= \limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{m+n+2} = 0,$$

$$\liminf_{q\to+\infty} \frac{P_{n+1}(q)}{q} = \liminf_{m\to+\infty} \min_{q_{6m}\le q\le q_{6(m+1)}} \frac{P_{n+1}(q)}{q} = \liminf_{m\to+\infty} \frac{P_1(q_{6m+2})}{q_{6m+2}} =$$
$$= \liminf_{m\to+\infty} \frac{1 + a(m+1)}{n+1+(1+a)(m+1)} = \frac{a}{a+1}.$$

Пользуясь утверждениями 1 и 2, получаем

$$\alpha^T(\boldsymbol{\theta}) = +\infty, \quad \alpha(\boldsymbol{\theta}) = a,$$

что и требовалось. □

3 Результат В. Шмидта и Л. Саммерера

Шмидт и Саммерер в [2] рассматривают целочисленную решетку

$$\Lambda(\boldsymbol{\theta}) = \{(x, \theta_1 x - y_1, \ldots, \theta_n x - y_n) \mid x, y_1, \ldots y_n \in \mathbb{Z}\}.$$

Пусть $\lambda_1(q), \ldots \lambda_{n+1}(q)$ – последовательные минимумы в пересечении решетки и куба

$$\mathcal{K}(q) = \{(\zeta_0 \ldots \zeta_n) \mid |\zeta_0| \le e^{nq},\ |\zeta_i| \le e^{-q}\}.$$

Далее, аналогично предыдущему разделу, определим $L_i(q) = \ln \lambda_i(q)$.
Обозначим $\varphi_i(q) = \frac{L_i(q)}{q}$ и

$$\overline{\varphi}_i(q) = \limsup_{q \to \infty} \varphi_i(q), \quad \underline{\varphi}_i(q) = \liminf_{q \to \infty} \varphi_i(q).$$

В [8] показано, что

$$\alpha = \frac{1 - \overline{\varphi}_1}{n + \overline{\varphi}_1}$$

и

$$\alpha^T = \frac{n + \underline{\varphi}_{n+1}}{1 - \underline{\varphi}_{n+1}}.$$

Из этих соотношений следует, что неравенства 2 и 3 превращаются в

$$(n-1)\underline{\varphi}_{n+1} + \overline{\varphi}_1 \ge -\underline{\varphi}_{n+1}\overline{\varphi}_1 \tag{9}$$

и

$$(n-1)\overline{\varphi}_1 + \underline{\varphi}_{n+1} \le -\underline{\varphi}_{n+1}\overline{\varphi}_1. \tag{10}$$

Статья [2] посвящена доказательству этих неравеснств, а также их неулучшаемости.
Сначала доказывается утверждение, аналогичное утверждению 2.

Теорема 2. *(а) Для любого $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ существует система из $n+1$ функций $\mathcal{P}$: $(\eta_0, \infty) \to \mathbb{R}^{n+1}$ такая, что функция $\mathcal{P} - \mathcal{L}_{\boldsymbol{\theta}}$ огрничена на промежутке (η_0, ∞).*

(б) Для данной системы из $n+1$ функций $\mathcal{P} : (\eta_0, \infty) \to \mathbb{R}^{n+1}$ такой, что $q - P_{n+1}(q) \to \infty$ при $q \to \infty$ существует вектор $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1,\ \ldots,\ \theta_n)$, где $1, \theta_1 \ldots, \theta_n$ линейно независимы над полем $\mathbb{Q}$, и функция $\mathcal{P} - \mathcal{L}_{\boldsymbol{\theta}}$ огрничена на промежутке $(\eta_0,\ \infty)$.

Доказательство. Определим систему из $n+1$ функций $\mathcal{P}^* : (\eta_0,\ \infty) \to \mathbb{R}^{n+1}$, аналогичную $\mathcal{P}$, за исключением того, что угловые коэффициенты компонент P_i будут -1 и n. Предположим, что

$$\mathcal{P} = (P_1, \ldots, P_{n+1}),\ \mathcal{P}^* = (-P_1, \ldots, -P_{n+1})$$

Тогда становится очевидно, что $\mathcal{P}$ - удовлетворяющая условиям система $(n+1)$-функций в точности тогда, когда $\mathcal{P}^*$ - двойственная ей.
Пусть $\Lambda^*(\boldsymbol{\theta})$ решетка, обратная $\Lambda(\boldsymbol{\theta})$, состоящая из точек

$$(x - \theta_1 y_1 - \cdots - \theta_n y_n,\ y_1, \ldots, y_n),$$

где $(x, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$. Пусть также $\mathcal{K}^*(q)$ состоит из точек $(\zeta_0, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ и удовлетворяют условиям

$$|\zeta_0| \le e^{-nq},\ |\zeta_i| \le e^q,\ i = 1, \ldots, n$$

Хорошо известно, что если $\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}$ – последовательные минимумы решетки $\Lambda(\boldsymbol{\theta})$ для тела $\mathcal{K}(q)$, а $\lambda_1^*,\dots,\lambda_{n+1}^*$ - последовательные минимумы решетки $\Lambda^*(\boldsymbol{\theta})$ для тела $\mathcal{K}^*(q)$, то их отношение $\frac{\lambda_i(q)}{\lambda_{n+2-i}^*(q)}$ ограничено сверху и снизу положительной константой, зависящей от n. Далее, если мы положим $L_i^*(q)=\log\lambda_i^*(q)$ $(i=1,\dots,n+1)$, то отображение

$$(L_1,\dots,L_{n+1})-(-L_1^*,\dots,-L_{n+1}^*)$$

ограничено на промежутке $(0,\infty)$. Если $q-L_{n+1}(q)\to\infty$ при $q\to\infty$, то также себя ведет и $q+L_{n+1}^*(q)$.

Назовем *системой Руа* отображение $\mathcal{P}^R:(q_0,\infty)\to\mathbb{R}^{n+1}$ с компонентами P_i, имеющими наклон 1 и 0 и для которых верно $P_1^R(q)+\dots+P_{n+1}^R(q)=q$. Если

$$P_i^R(q)=P_i^*(\frac{q}{n+1})+\frac{q}{n+1},\quad i=1,\dots,n+1,$$

то $\mathcal{P}^R=(P_1^R,\dots,P_{n+1}^R)$ это система Руа на $((n+1)\eta_0,\infty)$ в точности, когда $\mathcal{P}^*=(P^*1,\dots,P_{n+1}^*)$ – двойственная система на промежутке (η_0,∞).

Пусть $\mathcal{K}^R(q)$ – куб точек $\zeta=(\zeta_1,\dots,\zeta_n)$ таких, что

$$|\zeta_0|\le e^{-q},\ |\zeta_i|\le 1,\quad i=1,\dots,n.$$

Тогда $\mathcal{K}^*(q)=e^q\mathcal{K}^R((n+1)\,q)$.

Таким образом, для минимумов $\lambda_i^R(q)$ решетки $\Lambda^*(\boldsymbol{\theta})$ для тела $\mathcal{K}^R(q)$ имеют место равенства $\lambda_i^*(q)=e^q\lambda_i^R((n+1)\,q)$, то есть $\lambda_i^R(q)=e^{\frac{q}{n+1}}\lambda_i^*(\frac{q}{n+1})$ и для $L_i^R(q)=\log(\lambda_i^R(q))$ верно

$$L_i^R(q)=\frac{q}{n+1}+L_i^*(\frac{q}{n+1}),\quad i=1,\dots,n+1$$

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2.

(а) Дан вектор $\boldsymbol{u}=(u_0,\dots,u_n)\neq 0$. Определим решетку $\Lambda^*(u)$, натянутую на точки

$$(u_0x-u_1y1-\dots-u_ny_n,\ y_1,\dots,y_n),\quad (x,y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{Z}^{n+1}.$$

Тогда $\Lambda^*(\boldsymbol{\theta})=\Lambda^*(u)$ где $u=(1,\theta_1,\dots,\theta_n)$.

Пусть $\hat{\boldsymbol{u}}=||u||^{-1}\boldsymbol{u}$ единичный вектор. Тогда мы получим систему $\mathcal{P}^R$ такую, что функции $\mathcal{L}^R-\mathcal{P}^R$ ограничены на промежутке $(\eta_0,\ \infty)$. Далее, при известной $\mathcal{P}^R$, получаем $\mathcal{P}^*$ такую, что функции $\mathcal{L}^*-\mathcal{P}^*$ ограничены на промежутке (η_0,∞). Наконец, получим $\mathcal{P}$ такую, что $\mathcal{L}-\mathcal{P}$ ограничены на промежутке (η_0,∞) при известной $\mathcal{P}^*$.

(б) Пусть $\mathcal{P}$ – $(n+1)$-система. Определим аналогичным образом $\mathcal{P}^R$ и $\mathcal{P}^*$. Найдется вектор u с нормой 1, такой, что $\mathcal{L}^R-\mathcal{P}^R$ ограничены, где $\mathcal{L}_u^R$ определена для решетки $\Lambda^*(\boldsymbol{u})$. Тогда верно, что $\mathcal{L}^*-\mathcal{P}^*$ ограничены.

Если компоненты вектора $\boldsymbol{u}$ не взаимно просты в совокупности, то существует вектор $\boldsymbol{c}=(c_1,\dots,c_n)\in\mathbb{Z}^{n+1}\setminus\{0\}$ такой, что

$$(u_0c_0-u_1c_1-\dots-u_nc_n,c_1,\dots,c_n)=(0,c_1,\dots,c_n)$$

принадлежит $\Lambda^*(\boldsymbol{u})$ и лежит в $ce^{-q}\mathcal{K}^*(q)$ где $c=\max(|c_0|,\dots,|c_n|)$. Тогда $\lambda_1^*<<e^{-q}$. Таким образом, L_1^*+q ограничена, что неверно.

Получаем, что $\mathcal{P}^*-\mathcal{L}_{\boldsymbol{u}}^*$ ограничены, поэтому и $\mathcal{P}^*-\mathcal{L}_{\boldsymbol{\theta}}^*$ ограничены (где $\boldsymbol{\theta}=(\frac{u_1}{u_0},\dots,\frac{u_n}{u_0})$), значит и $\mathcal{P}-\mathcal{L}_{\boldsymbol{\theta}}$ ограничены. При этом, $1,\theta_1,\dots,\theta_n$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

$\square$

Теперь покажем, что неравенства 9 и 10 нельзя улучшить.

Доказательство. Будем говорить, что $(n+1)$-система $\mathcal{P}$ инвариантна, если она инвариантна относительно растяжения с некоторым коэфициентом $\rho > 1$.

Рассмотрим неравенство 9. По теореме 2 достаточно для всех $X \in (0,1)$ построить инвариантную $(n+1)$-систему $\mathcal{P}$, такую что:

$$\underline{\varphi}_{n+1} = X, \quad \overline{\varphi}_1 = F(X) = -\frac{(n-1)X}{1+X}. \tag{11}$$

Тогда $\overline{\varphi}_1 = F(\underline{\varphi}_{n+1})$. Мы построим такой график $\mathcal{G}$, что $q = 1$ будет точкой локального минимума P_{n+1} и $P_2(1) = ... = P_{n+1}(1) = X$, так что наклонные отрезки кратности $n-1$ проходят через точку $(1, X)$. Кроме того, $P_1(1) = -nX$. В интервале $[1, 1+X]$, P_2 уменьшается с наклоном $-n$, а P_i при $i \neq 2$ увеличиваются.

Рассмотрим $\delta > 0$. На интервале $[1+X, 1+X+\delta]$, P_1 будет уменьшаться, но для любых P_i, таких что $i \neq 1$, будет возрастать. Пусть $s_2 = 1 + X + \delta$, тогда получим, что

$$P_2(s_2) = -nX + X + \delta = -(n-1)X + \delta,$$

$$P_3(s_2) = ... = P_{n+1}(s_2) = P_2(s_2) + (n+1)X = 2X + \delta.$$

Для $2 < j \leq n+1$ положим $s_j = s_2 + (j-2)X$. На интервале $[s_j, s_{j+1}]$ (когда $2 \leq j < n+1$), P_{j+1} убывает, но P_i при $i \neq j+1$ возрастает. Для $2 < j < n+1$ получим, что:

$$P_2(s_j) = P_3(s_j) = ... = P_j(s_j) = P_2(s_2) + (j-2)X,$$

$$P_{j+1}(s_j) = P_{j+2}(s_j) = ... = P_{n+1}(s_j) = P_2(s_j) + (n+1)X,$$

а также, что:

$$P_2(s_{n+1}) = ... = P_{n+1}(s_{n+1}) = P_2(s_2) + (n-1)X = \delta$$

Пусть $\rho = s_{n+1} = s_2 + (n-1)X = 1 + nX + \delta$ и $\mathcal{G}_1$ – график, построенный на отрезке $[1, \rho]$.

Мы хотим установить, что

$$\mathcal{G} = \bigcup_{t \in \mathbb{Z}} \rho^t \mathcal{G}_1$$

и $\mathcal{G}$ инвариантно относительно множителя ρ. Для этого необходимо, чтобы при $q = \rho$, $\mathcal{G}$ было таким же, как и при $q = 1$. Таким образом, необходимо, чтобы выполнялась следующая цепочка равенств:

$$\frac{\delta}{\rho} = \frac{P_{n+1}(\rho)}{\rho} = \frac{P_{n+1}(1)}{1} = X,$$

то есть:

$$\delta = X\rho = X(1 + nX + \delta),$$

следовательно:

$$\delta = \frac{X + nX^2}{1 - X}.$$

Необходимо, чтобы выполнялось: $\underline{\varphi}_{n+1} = X$ и (согласно 11):

$$\overline{\varphi}_1 = \frac{P_1(1+X)}{(1+X)} = \frac{-nX + X}{1+X} = -\frac{(n-1)X}{1+X}.$$

Остается показать, что неравенство 10 нельзя улучшить. Чтобы это показать, достаточно доказать, что для любого Y, такого что $0 < Y < 1$, существует инвариантная $(n+1)$-система $\mathcal{P}$, такая что:

$$\underline{\varphi}_{n+1} = Y, \ \ \overline{\varphi}_1 = \mathcal{G}(Y) = -\frac{Y}{n+Y}.$$

Для этого удобно будет обозначить $X := \frac{Y}{n-1}$, и мы получим следующее:

$$\underline{\varphi}_{n+1} = (n-1)X, \overline{\varphi}_1 = -\frac{X}{1+X}$$

Так же, как и ранее, построим подходящий график $\mathcal{G}$. Точка $q = 1$ является точкой локального минимума P_{n+1} и $P_n(1) = P_{n+1}(1) = (n-1)X$, таким наклонные отрезки кратности 1 проходят через $(1, (n-1)X)$. Кроме того, $P_1(1) = ... = P_{n-1}(1) = -2X$. На интервале $[1, 1+X]$, P_n убывает с наклоном $-n$, а P_i возрастают при $i \neq n$.

Зафиксируем δ. На интервале $[1+X, 1+X+\delta]$, P_1 убывает, а P_i такие, что $i \neq 1$ возрастает. Положим, что $s_2 = 1 + X + \delta$ и получим, что:

$$P_1(s_2) = -X - n\delta.$$

Мы обозначили $s_j = s_2 + (j-2)\delta$ для всех $2 < j < n-1$, но $s_{n+1} = s_n + X$. На интервале $[s_j, s_j + 1]$, при $2 \leq j < n$, P_j убывает, а P_i при $i \neq j$ возрастает. Но на интервале $[s_n, s_{n+1}]$, P_{n+1} убывает и P_i, при $i < n+1$ возрастает. Получим следующее:

$$P_n(s_{n+1}) = P_1(1+X) + (n-1)\delta + X = (n-1)\delta,$$

$$P_{n+1}(S_{n+1}) = P_{n+1}(s_n) - nX = (n-1)X + X + (n-1)\delta - nX = (n-1)\delta,$$

так что $P_n(s_{n+1}) = P_{n+1}(s_{n+1})$.

Мы получили, что:

$$P_1(s_{n+1}) = .. = P_{n-1}(s_{n+1}) = P_1(s_2) + (n-2)\delta + X = -2\delta.$$

Положим, что $\rho = s_{n+1} = s_2 + (n-2)\delta + X = 1 + 2X + (n-1)\delta$, и $\mathcal{G}_2$ – график, который мы построили в $[1, \rho]$.

Мы хотим установить, что:

$$\mathcal{G} = \bigcup_{t \in \mathbb{Z}} \rho^t \mathcal{G}_2$$

и $\mathcal{G}$ инвариантно относительно множителя ρ. Для этого необходимо, чтобы при $q = \rho$, $\mathcal{G}$ было таким же, как и при $q = 1$. Таким образом, необходимо, чтобы выполнялось следующее:

$$\frac{-2\delta}{\rho} = \frac{P_1(\rho)}{\rho} = \frac{P_1(1)}{1} = -2,$$

то есть:

$$(1 + 2X + (n-1)\delta)X = \delta$$

следовательно:

$$\delta = \frac{X + 2X^2}{1 - (n-1)X}.$$

Так, мы получили, что $\underline{\varphi}_{n+1} = (n-1)X$, и что верно следующее:

$$\overline{\varphi}_1 = \frac{P_1(1+X)}{1+X} = \frac{-2X + X}{1+X} = -\frac{X}{1+X}.$$

Что и требовалось. $\square$

Список литературы

[1] Antoine Marnat. About Jarnik's-type relation in higher dimension. arXiv:1510.06334 [math.NT]

[2] Wolfgang M. Schmidt, Leonhard Summerer. The generalization of Jarnik's identity. Acta Arithmetica 175(2016), 119-136

[3] Oleg N. German. On Diophantine exponents and Khintchine's transference principle. Mosc. J. Comb. Number Theory, 2(2):22–51, 2012.

[4] Damien Roy. Spectrum of the exponents of best rational approximation, 2014.

[5] Wolfgang M. Schmidt. On heights of algebraic subspaces and diophantine approximations. Ann. of Math. (2), 85:430–472, 1967.

[6] Michel Laurent. On transfer inequalities in Diophantine approximation. In Analytic number theory, pages 306–314. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.

[7] Vojtěch Jarník. Zum khintchineschen "Übertragungssatz". Trav. Inst. Math. Tbilissi, (3):193–212, 1938.

[8] Wolfgang M. Schmidt and Leonhard Summerer. Parametric geometry of numbers and applications. Acta Arithmetica, 140(1):67–91, 2009.