Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Механико–Математический Факультет

Кафедра теории чисел

Дипломная работа на тему «О симметриях периода многомерной цепной дроби»

Выполнил:

студент 606 группы

Тлюстангелов Ибрагим

Научный руководитель:

доцент

Герман Олег Николаевич

Москва, 2017

1 Введение

Данная работа посвящена изучению симметрии периода квадратичных иррациональностей геометрическими инструментами и обобщению этой симметрии на многомерный случай. В итоге будет дано геометрическое доказательство критерия палиндромичности периода цепной дроби с использованием полигонов Клейна и рассмотрен аналог симметрии для таких конструкций в многомерном случае.

Разложение чисел в цепную дробь вызывает интерес у исследователей в области теории чисел уже не один год. Цепная дробь сопоставляет каждому действительному числу конечную или бесконечную вправо последовательность неполных частных, первый элемент которой является целым числом, а все последующие — натуральными. Известно, что любые иррациональные числа, и только они, имеют бесконечное разложение в цепную дробь. Более того, в 1770 году Лагранж показал, что любое решение квадратного уравнения с целыми коэффициентами (далее *квадратичная ирруциональность*) имеет в этом разложении начиная с некоторого момента период. К тому же выполняется и обратное, таким образом, верно следующее (см. [1]):

Предложение 1. *Число α является квадратичной иррациональностью тогда и только тогда, когда α имеет периодическое разложение в цепную дробь начиная с некоторого момента.*

Целочисленно-комбинаторная структура периода цепной дроби в том или ином виде изучалась многими математиками. Один из первых случаев палиндромичности [2] цепной дроби квадратичных иррациональностей был найден для чисел вида $\sqrt{r}$, где $r > 1$:

$$\sqrt{r} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \ldots, a_2, a_1, 2a_0}]. \tag{1}$$

Ясно, что у таких чисел существует циклический сдвиг периода, переводящий $2a_0$ на первое место, после которого новый период читается слева направо также, как и исходный справа налево. Именно это замечание наталкивает на построение полного описания чисел, удовлетворяющих так называемой *палиндромичности* периода.

Определение 1. *Периодом* называется множество последовательностей, образованных всеми циклическими сдвигами последовательности $a = [a_1, a_2, \ldots, a_{t-1}, a_t]$, и соответствующая ей бесконечная в обе стороны последовательность $(\bar{a})$.

Из определения видно, что период — инвариантное множество относительно циклического сдвига образующей последовательности, а, значит, в качестве образующей этого же периода может быть выбран любой сдвиг исходной образующей. Данное определение согласуется с естественным разбиением чисел на классы эквивалентности, относительно разложения в цепную дробь:

Определение 2. Два числа α и ω называются *сопряженными* ($\alpha \sim \omega$,) если у разложений α и ω в цепную дробь существуют совпадающие *концы*.

Так как у цепной дроби с периодом $\overline{a}$ всегда есть концы, образованные бесконечным повторением вправо всех циклических сдвигов $\overline{shift(a)}$, то возникает соответствие между введенным нами *периодами* и периодическими цепными дробями, а, значит, и между классами эквивалентности цепных дробей. Следующее предложение устанавливает алгебраическую связь между эквивалентными числами:

Предложение 2 (Серре [3])**.** *$\alpha \sim \omega$ тогда и только тогда, когда существуют $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющие $ac - bd = \pm 1$ и $\alpha = \frac{a\omega+b}{c\omega+d}$.*

Сделанное замечание о периоде квадратичных иррациональностей вида $\sqrt{r}$ наталкивает на следующее

Определение 3. Конечная последовательность $(a_1, a_2, \ldots, a_{t-1}, a_t)$ называется

а) *регулярным палиндромом*, если $a_k = a_{t+1-k}$ для любого $k \in \{1, \ldots, t\}$;

б) *циклическим палиндромом*, если существует такой циклический сдвиг индексов σ, что $a_k = a_{\sigma(t+1-k)}$ для любого $k \in \{1, \ldots, t\}$.

Данное свойство инвариантно при циклических сдвигах, а, значит, и верно для всех представителей введенного нами понятия периода. Таким образом, можно говорить и о палиндромичности периода соответствующей цепной дроби. Вопросы палиндромичности затрагивались В. И. Арнольдом (см. [4]), а типы симметрий периода были классифицированы его ученицей Ф. Айкарди(см. [5]), при помощи их описания относительно коэффициентов квадратичных форм, соответствующих уравнению квадратичной иррациональности.

Любой циклический палиндром представим в виде объединения двух регулярных. Если один из них четной длины, то исходный палиндром циклическим сдвигом приводится к регулярному. В противном случае этот палиндром можно циклическим сдвигом привести к объединению регулярного палиндрома нечетной длины и *добавочного элемента.* Обозначим сопряженный корень для квадратичной иррациональности ω через $\bar{\omega}$. Алгебраические классификации этих случаев были описаны Э. Галуа (см. [6]) и О. Перроном (см. [7]) через соотношения на квадратичную иррациональность и его сопряженное:

Предложение 3 (Галуа)**.** *Пусть α - квадратичная иррациональность. Период цепной дроби α является регулярным палиндромом тогда и только тогда, когда*

$$\alpha \sim \omega : \omega\bar{\omega} = -1.$$

Предложение 4 (Перрон)**.** *Пусть α - квадратичная иррациональность. Период цепной дроби α является регулярным палиндромом с четным добавочным элементом тогда и только тогда, когда*

$$\alpha \sim \sqrt{r}, r \in \mathbb{Q}.$$

Предложение 5 (Перрон)**.** *Пусть α - квадратичная иррациональность. Период цепной дроби α является регулярным палиндромом с нечетным добавочным элементом тогда и только тогда, когда*

$$\alpha \sim 1/2 + \sqrt{r}, r \in \mathbb{Q}.$$

Основным результатом для одномерной цепной дроби является следующая

Теорема 1. *Пусть α - квадратичная иррациональность. Период цепной дроби α является циклическим палиндромом тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

(а) $\alpha \sim \omega :\ \omega + \bar{\omega} = 0 \iff \omega^2 \in \mathbb{Q}$;

(б) $\alpha \sim \omega :\ \omega + \bar{\omega} = 1 \iff (\omega - 1/2)^2 \in \mathbb{Q}$;

(в) $\alpha \sim \omega :\ \omega\bar{\omega} = 1$;

(г) $\alpha \sim \omega :\ \omega\bar{\omega} = -1$.

Более того, (б) *эквивалентно* (в).

Эквивалентность $\omega + \bar{\omega} = 0 \iff \omega^2 \in \mathbb{Q}$ очевидна. Проверим эквивалентность внутри случая (б). Пусть ω - квадратичная иррациональность, удовлетворяющая

$$\omega + \bar{\omega} = 1$$

Тогда $(x-\omega)(x-\bar{\omega}) = (x-\omega)(x+\omega-1) = x^2 - x + (\omega - \omega^2)$. При этом трехчлен, решением которого является квадратичная иррациональность, имеет рациональные коэффициенты, откуда

$$x^2 - x + (\omega - \omega^2) = x^2 - x + \frac{m}{n}, \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}.$$

Положительное решение этого уравнения имеет вид $\omega_+ = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{n+4m}{4n}}$. Таким образом, это решение является числом вида $\sqrt{\frac{p}{q}} + \frac{1}{2}$, где $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Более того, для любых $p, q \in \mathbb{Q}$ существуют такие рациональные $m = 4p - q, n = 4q$, что

$$\frac{n+4m}{4n} = \frac{4q + 16p - 4q}{16q} = \frac{p}{q}.$$

Ясно, что Теорема 1 следует из Предложений 3, 4, 5, кроме части, касающейся эквивалентности между случаями (б) и (в), который будет доказан ниже.

2 Геометрия цепных дробей

Для данного действительного α обозначим через $\mathcal{L}_\alpha$ прямую на плоскости $\mathbb{R}^2$, проходящую через точки $(0,0)$ и $(1,\alpha)$. При этом на прямой $\mathcal{L}_\alpha$ нет целых точек, за исключением точки $(0,0)$, тогда и только тогда, когда α иррационально. В дальнейшем рассматриваются только иррациональные α.

2.1 Полигоны Клейна смежных углов

Пусть α и β - различные иррациональные числа. Прямые $\mathcal{L}_\alpha$ и $\mathcal{L}_\beta$ разбивают плоскость на четыре угла. Выпуклые оболочки ненулевых целых точек внутри этих углов называются *смежными полигонами Клейна*. Вершины этих полигонов — точки из $\mathbb{Z}^2$, а, значит, можно говорить о целочисленных длинах ребер и целочисленных углах между ними.

Определение 4. Отрезок на плоскости называется *целым*, если его концы принадлежат множеству $\mathbb{Z}^2$. Целый отрезок называется *пустым*, если он не содержит точек из $\mathbb{Z}^2$, кроме концов. *Целочисленной длиной* целого отрезка называется количество пустых целых отрезков внутри него.

Определение 5. Для двух пустых целых отрезков с общим концом площадь параллелограмма, натянутого на эти отрезки, называется *целочисленным углом* между этими отрезками. Такой параллелограмм называется *примитивным*. Для произвольных целых отрезков с общим концом эта площадь равна *целочисленному углу* между их пустыми целыми подотрезками, имеющими общий конец.

В общем случае целые точки внутри примитивного параллелограмма могут располагаться произвольно. Однако в случае смежных ребер полигона Клейна верно следующее

Предложение 6. *Пусть* $\mathbf{v}$ *- вершина полигона Клейна* $\mathcal{K}$*, и пусть* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{w}$ *- ближайшие к* $\mathbf{v}$ *целые точки на ребрах* $\mathcal{K}$*, соответствующих* $\mathbf{v}$ *(см. Рис. 1). Обозначим через* $\mathcal{P}_\mathbf{v}$ *примитивный параллелограмм, содержащий в качестве вершин* $\mathbf{u}$*,* $\mathbf{v}$*,* $\mathbf{w}$*. Тогда все целые точки внутри* $\mathcal{P}_\mathbf{v}$*, отличные от* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{w}$*, получаются растяжением на целое число вершины* $\mathbf{v}$*. В частности, все они лежат на диагонали* $\mathcal{P}_\mathbf{v}$*, содержащей* $\mathbf{v}$*.*

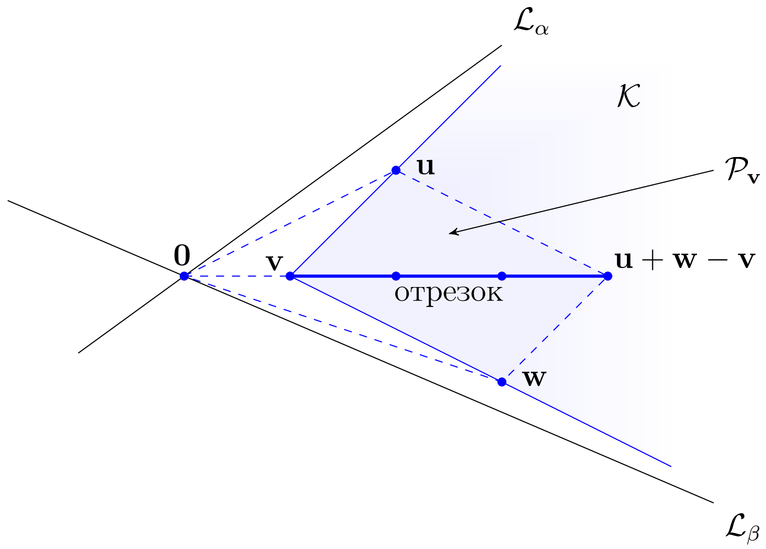


Рисунок 1: Вершинный отрезок

Доказательство. Так как $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ лежат на ребрах полигона $\mathcal{K}$, который является выпуклой оболочкой целых точек внутри угла, то треугольники $\mathbf{0vu}$ и $\mathbf{0vw}$ не содержат целых точек, кроме как в вершинах. Тогда обе пары векторов $\{\mathbf{v}, \mathbf{u}\}$ и $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ образуют базис $\mathbb{Z}^2$. Следовательно, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$ лежат на одинаковом расстоянии от прямой содержащей $\mathbf{v}$, их сумма $\mathbf{u}+\mathbf{w}$ лежит на этой прямой, и все целые точки, расстояние от которых до этой прямой меньше, чем у $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$, являются растяжением на целое число вектора $\mathbf{v}$. $\square$

Определение 6. Пусть $\mathcal{K}$, $\mathbf{v}$ и $\mathcal{P}_\mathbf{v}$ из Предложения 6. Диагональ примитивного параллелограмма $\mathcal{P}_\mathbf{v}$, содержащая $\mathbf{v}$, называется *вершинным отрезком* для $\mathbf{v}$. Второй конец этой диагонали есть $\mathbf{u}+\mathbf{w}-\mathbf{v} = \mathbf{v}+(\mathbf{u}-\mathbf{v})+(\mathbf{w}-\mathbf{v})$.

Площадь примитивного параллелограмма в таком случае на один меньше количества целых точек на вершинном отрезке. Таким образом, целочисленный угол между двумя смежными ребрами полигона Клейна равен целочисленной длине вершинного отрезка. Это влечет за собой существование соответствия между ребрами данного полигона Клейна и вершинными отрезками смежного с ним полигона:

Предложение 7 (Коркина [8])**.** *Пусть $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ - два смежных полигона Клейна. Пусть $\mathbf{E}_1$ — это множество всех ребер $\mathcal{K}_1$, а $\mathbf{S}_1$ — множество всех вершинных отрезков полигона $\mathcal{K}_1$. Аналогично определяются $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{S}_2$ для полигона $\mathcal{K}_2$. Тогда существует такое взаимно-однозначное соответствие $\varphi : \mathbf{E}_1 \cup \mathbf{S}_1 \to \mathbf{E}_2 \cup \mathbf{S}_2$, что* (а) $\varphi(\mathbf{E}_1) = \mathbf{S}_2$, $\varphi(\mathbf{S}_1) = \mathbf{E}_2$*;*

(б) *φ сохраняет целочисленные длины;*

(в) *любой элемент $\mathbf{E}_1 \cup \mathbf{S}_1$ параллелен своему образу под действием φ;*

(г) *если ребро и вершинный отрезок имеют общую точку, то общую точку имеют и их образы при действии φ.*

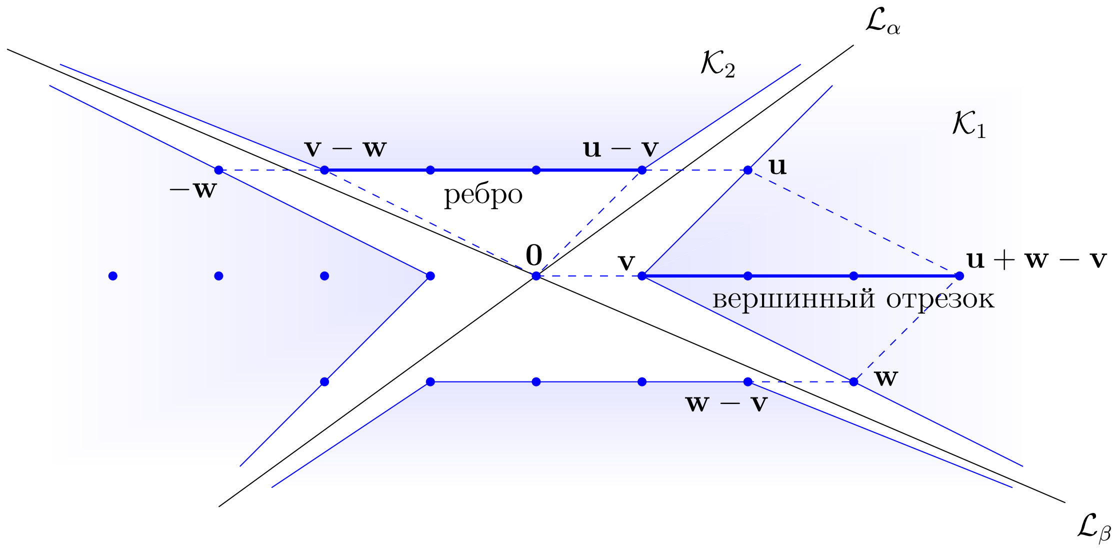


Рисунок 2: Биекция φ между ребром и вершинным отрезком

При такой биекции в случае, когда $\mathbf{u}-\mathbf{v} \in \mathcal{C}_2$ и $\mathbf{v}-\mathbf{w} \in -\mathcal{C}_2$, ребро $[\mathbf{v}-\mathbf{w}, \mathbf{u}-\mathbf{v}]$ полигона $\mathcal{K}_2$ переходит в параллельный ему вершинный отрезок $[\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{w}-\mathbf{v}]$ полигона $\mathcal{K}_1$. Кроме того, эта биекция согласовывается с ориентациями смежных по лучу $\mathcal{L}_\alpha$ полигонов: ближайший к $\mathcal{L}_\beta$ конец ребра переходит в ближайшую вершину к $\mathbf{0}$ соответствующего вершинного отрезка и наоборот. Таким образом, одинаково ориентированные последовательности целочисленных длин и целочисленных углов полигонов смежных углов совпадают, а значит каждому полигону Клейна с выбранным разделяющим $\mathcal{L}_\alpha$ соответствует такая последовательность. Тогда верно следующее

Следствие 1. *Пусть $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ - два смежных полигона Клейна, разделенных $\mathcal{L}_\alpha$. Тогда существует такое обозначение всех вершин $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ через $\mathbf{v}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, что для любого целого k:*

(а) $\mathbf{v}_{k-1}$, $\mathbf{v}_k$ *— базис $\mathbb{Z}^2$;*

(б) $[\mathbf{v}_{k-2}, \mathbf{v}_k]$ *является ребром полигона $\mathcal{K}_1$ при четном k, и ребром $\mathcal{K}_2$ при нечетном k;*

(в) $\mathbf{v}_k$ *ближе к* $\mathcal{L}_\alpha$*, чем* $\mathbf{v}_{k-2}$*;*

(г) $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{k-2} + a_k \mathbf{v}_{k-1}$,

где a_k *— целочисленная длина отрезка* $[\mathbf{v}_{k-2}, \mathbf{v}_k]$ *и целочисленный угол, соответствующий* $\mathbf{v}_{k-1}$.

Причем эта нумерация однозначно определяется выбором начальной вершины полигона.

2.2 Лемма Коркиной

Рассмотрим утверждение, обратное к следствию. По выбранному базису $\mathbf{v}_{-2}$, $\mathbf{v}_{-1}$ решетки $\mathbb{Z}^2$ и последовательности $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ натуральных чисел соотношение

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{k-2} + a_k \mathbf{v}_{k-1} \tag{2}$$

определяет последовательность $(\mathbf{v}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

Предложение 8 (Коркина [8])**.** *Пусть* $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *- произвольная последовательность натуральных числел, и пусть* $[\mathbf{v}_{-2}, \mathbf{v}_0]$ *- целый отрезок целочисленной длины* a_0*. Предположим, что* $\mathbf{0}$ *- ближайшая целая точка к прямой, проходящей через вершины* $\mathbf{v}_{-2}$ *и* $\mathbf{v}_0$*, которая не лежит на этой прямой. Тогда существет единственный полигон* $\mathcal{K}$ *с вершинами* $(\mathbf{v}_{2m})_{m\in\mathbb{Z}}$*, такой, что для любого целого* m

(а) $[\mathbf{v}_{2m-2}, \mathbf{v}_{2m}]$ *— ребро* $\mathcal{K}$*;*

(б) a_{2m} *— целочисленная длина* $[\mathbf{v}_{2m-2}, \mathbf{v}_{2m}]$*;*

(в) a_{2m+1} *— целочисленный угол, соответствующий* $\mathbf{v}_{2m}$*.*

Для любых двух отрезков $[\mathbf{v}_{-2}, \mathbf{v}_0]$ и $[\mathbf{v}'_{-2}, \mathbf{v}'_0]$, удовлетворяющих условиям Предложения 8, существует единственный оператор $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, такой, что $A\mathbf{v}_{-2} = \mathbf{v}'_{-2}$ и $A\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}'_0$. Тогда в обозначениях Предложения 8 верно следующее

Следствие 2. *Пусть два данных полигона Клейна имеют одинаковую последовательность* $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$*, определенную выше. Тогда существует единственный оператор* $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$*, такой, что* $A\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i$*.*

2.3 Полигоны Клейна и цепные дроби

Связь между последовательностью $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ целочисленных длин и углов полигона Клейна с неполными частными цепных дробей устанавливает следующий факт:

Предложение 9. *Для любых $k, m \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant m$ определим p и q как коэффициенты разложения по базису: $\mathbf{v}_k = q\mathbf{v}_{m-2} + p\mathbf{v}_{m-1}$. Тогда p и q — взаимно-простые целые числа, и*

$$\frac{p}{q} = [a_m; a_{m+1}, \ldots, a_k].$$

В дальнейшем рассматриваются $\alpha > \beta$. Точки $(1, 0)$ и $(0, 1)$ являются вершинами смежных полигонов Клейна $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ тогда и только тогда, когда

$$\alpha > 1, \quad -1 < \beta < 0, \tag{3}$$

и в таком случае можно положить

$$\mathbf{v}_{-2} = (1, 0), \quad \mathbf{v}_{-1} = (0, 1). \tag{4}$$

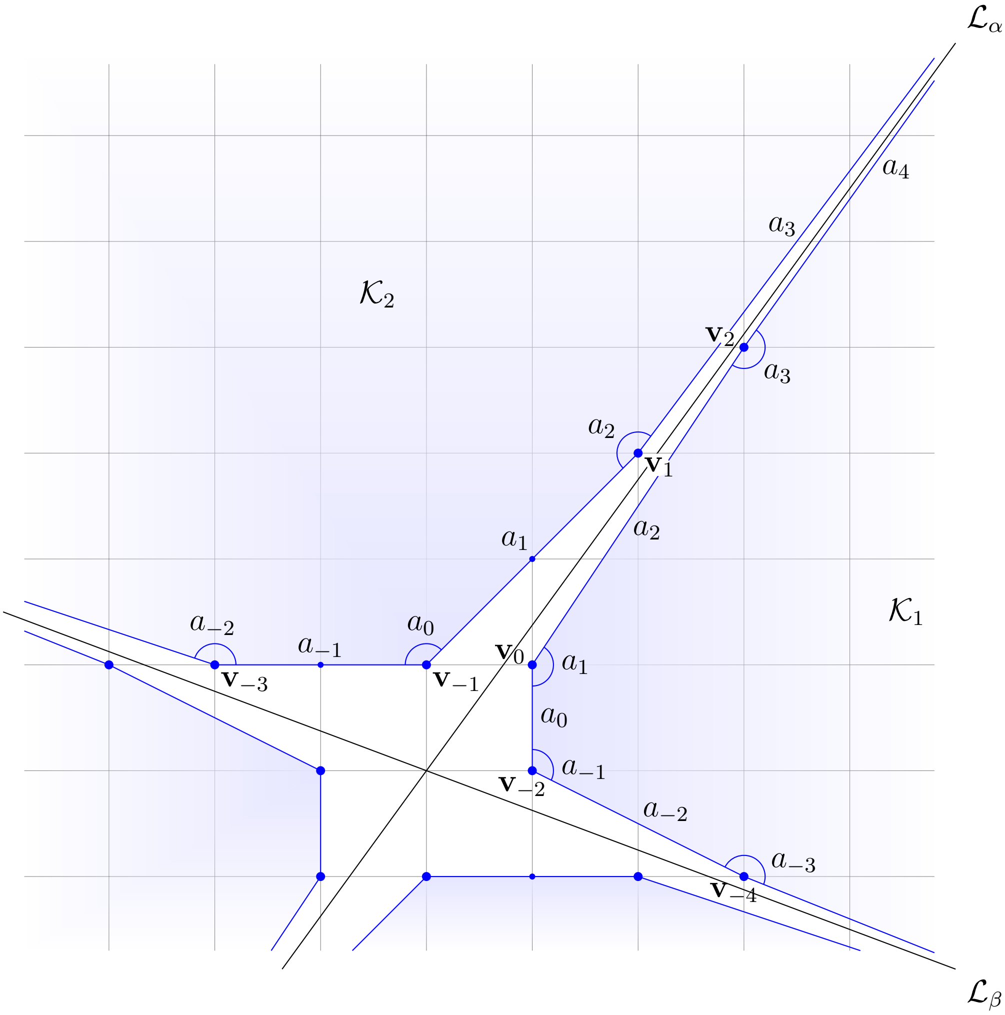


Рисунок 3: Полигоны Клейна и цепные дроби

Предложение 10. *Пусть α и β удовлетворяют (3). Пусть последовательность $(\mathbf{v}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, определяется через $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ соотношениями (2) и (4). Тогда*

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots] \quad \text{и} \quad -1/\beta = [a_{-1}; a_{-2}, a_{-3}, \dots].$$

При этом для любого $k \geqslant 0$ имеем $\mathbf{v}_k = (q_k, p_k)$, где p_k и q_k — числитель и знаменатель k-ой подходящей дроби α.

Доказательство. Утверждение следует из рассмотрения случая $m = 0$ в Предложении 9. При $k \geqslant 0, k \to \infty$ отношение ординаты p_k вершины $\mathbf{v}_k$ к её абсциссе q_k стремится к α. Соотношение на $-1/\beta$ получается поворотом конструкции на угол $\pi/2$ и сменой ориентации угла, а, значит, и смены последовательности $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ на $(a_{-1-k})_{k\in\mathbb{Z}}$. □

Так как операторы из $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ сохраняют целочисленные углы и длины, то для произвольных α и β, из Следствия 2 вытекает следующий факт:

Предложение 11. *Пусть $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ - смежные полигоны Клейна, соответствующие $\mathcal{L}_\alpha$ и $\mathcal{L}_\beta$ и разделенные $\mathcal{L}_\alpha$. Пусть $(\mathbf{v}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ из обозначений Следствия 1, с выбранной вершиной $\mathbf{v}_0$. Тогда существует единственный оператор $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, такой, что верно следующее:*

(а) *$A\mathbf{v}_{-2} = (1,0)$, $A\mathbf{v}_{-1} = (0,1)$, а, значит, и $A\mathbf{v}_0 = (1, a_0)$;*

(б) *$A\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{L}_{\alpha'}$, $A\mathcal{L}_\beta = \mathcal{L}_{\beta'}$ (в частности, $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$);*

(в) *α' и β' удовлетворяют (3);*

(г) *последовательность (a_k) есть последовательность, образованная склейкой бесконечных вправо и влево последовательностей всех неполных частных соответственно для цепных дробей α' и $-1/\beta'$.*

2.4 Квадратичные иррациональности

Теорема Лагранжа. Заметим, что для любых сопряженных квадратичных иррациональностей α и β их соответствующие направления $(1,\alpha)$ и $(1,\beta)$ переходят под действием $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ в направления, заданные двумя сопряженными квадратичными иррациональностями.

Для любой периодичной, возможно начиная с некоторого момента, цепной дроби α существует $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$-эквивалентная ей чисто периодическая цепная дробь, удовлетворяющая условиям Предложения 11. Обозначим такую дробь, порождаемую исходным периодом, через $\alpha' > 1$, а через β' - соответсвующее второе направление для α' и (a_k) из Предложении 10. Тогда существует оператор $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ с положительными собственными значениями, сдвигающий вершины $(\mathbf{v}_k)$ вдоль удвоенного периода, то есть, сохраняя на месте полигоны Клейна, которые соответствуют направлениям $\mathcal{L}_{\alpha'}$ и $\mathcal{L}_{\beta'}$. При этом $A\mathcal{L}_{\alpha'} = \mathcal{L}_{\alpha'}$, $A\mathcal{L}_{\beta'} = \mathcal{L}_{\beta'}$, значит α' (следовательно и α) — квадратичные иррациональности. В добавление к Преложению 10 получаем теорему Галуа о том, что если

$$\alpha' = [\overline{a_0; a_1, \ldots, a_t}],$$

то введенное выше β' является сопряженным к α', и имеет место

$$-1/\beta' = [\overline{a_t; a_{t-1}, \ldots, a_0}].$$

Обратно, для любой квадратичной иррациональности α существует такой оператор $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, что $(1, \alpha)$ является его собственным вектором. Квадратичная иррациональность гарантирует существование целочисленной симметрической матрицы с положительными собственными значениями, которая соответствует целой квадратичной форме, обнуляющей вектор $(1, \alpha)$. Таким образом, существует периодичность целочисленных длин и углов полигона Клейна для $\mathcal{L}_\alpha$ вдоль гиперболических сдвигов с собственным направлением $(1, \alpha)$, что гарантирует периодичность с некоторого момента последовательности неполных частных цепной дроби α.

3 Доказательство Теоремы 1

Пусть α - квадратичная иррациональность, и пусть $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ - последовательность целочисленных длин и углов полигона Клейна, соответствующего $\mathcal{L}_\alpha$ и $\mathcal{L}_{\bar{\alpha}}$. При этом длину любого фиксированного ребра или вершинного отрезка полигона Клейна можно обозначать за a_0 . Если $\omega \sim \alpha$, то существует такой $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, что $A\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{L}_\omega$ и $A\mathcal{L}_{\bar{\alpha}} = \mathcal{L}_{\bar{\omega}}$ и последовательность (a_k) является последовательностью целочисленных длин и углов полигона Клейна, соответствующего $\mathcal{L}_\omega$ и $\mathcal{L}_{\bar{\omega}}$

Последовательность (a_k) по теореме Лагранжа периодична, и её период a совпадает с периодом цепной дроби α. При этом период a является циклическим палиндромом тогда и только тогда, когда соответствующая бесконечная последовательность $(\bar{a}) = (a_k)$ симметрична. Центром этой симметрии является либо элемент (a_k), и в таком случае период представим в виде объединения регулярного палиндрома и этого центра; либо позиция между элементами (a_k), и в таком случае период представим в виде регулярного палиндрома. Таким образом, центр симметрии может быть *четным*, *нечетным* или *межпозиционным*.

Лемма 1. *Последовательность* (a_k) *имеет четный центр тогда и только тогда, когда*

$$\alpha \sim \omega: \ \omega + \bar{\omega} = 0. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть ω удовлетворяет (5). В этом случае $\mathcal{L}_\omega$ и $\mathcal{L}_{\bar{\omega}}$ симметричны относительно координатных осей. Обозначим полигон Клейна, содержащий точку $(1,1)$, через $\mathcal{K}$, и положим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда, если $|\omega| > 1$, то имеет место $A\mathcal{K} = \mathcal{K}$, и a_0 можно сопоставить вертикальному ребру полигона $\mathcal{K}'$ (см. Рис. 4). Если $|\omega| < 1$, то имеет место $B\mathcal{K} = \mathcal{K}$, и a_0 можно сопоставить вертикальному ребру $\mathcal{K}''$ (см Рис. 4). Тогда a_0 — четный центр симметрии (a_k).

Обратно, для данного (a_k) с четным центром a_0 положим

$$\mathbf{v}_{-2} = (1, -a_0/2), \quad \mathbf{v}_0 = (1, a_0/2).$$

В силу Леммы Коркиной для последовательности (a_k) и выбранной начальной пары $(\mathbf{v}_{-2}, \mathbf{v}_0)$ существует единственный полигон $\mathcal{K}$, соответствующий некоторым $\mathcal{L}_\omega$ и $\mathcal{L}_{\bar{\omega}}$. При этом $A\mathbf{v}_{-2} = \mathbf{v}_0$, $A\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_{-2}$. Повторное применение Леммы Коркиной к паре $(A\mathbf{v}_{-2}, A\mathbf{v}_0)$ и центральная симметрия (a_k) влекут следующие равенства:

$$A\mathcal{K} = \mathcal{K}, \quad A\mathcal{L}_\omega = \mathcal{L}_{\bar{\omega}}, \quad A\mathcal{L}_{\bar{\omega}} = \mathcal{L}_\omega.$$

Итак, $\bar{\omega} = -\omega$. $\square$

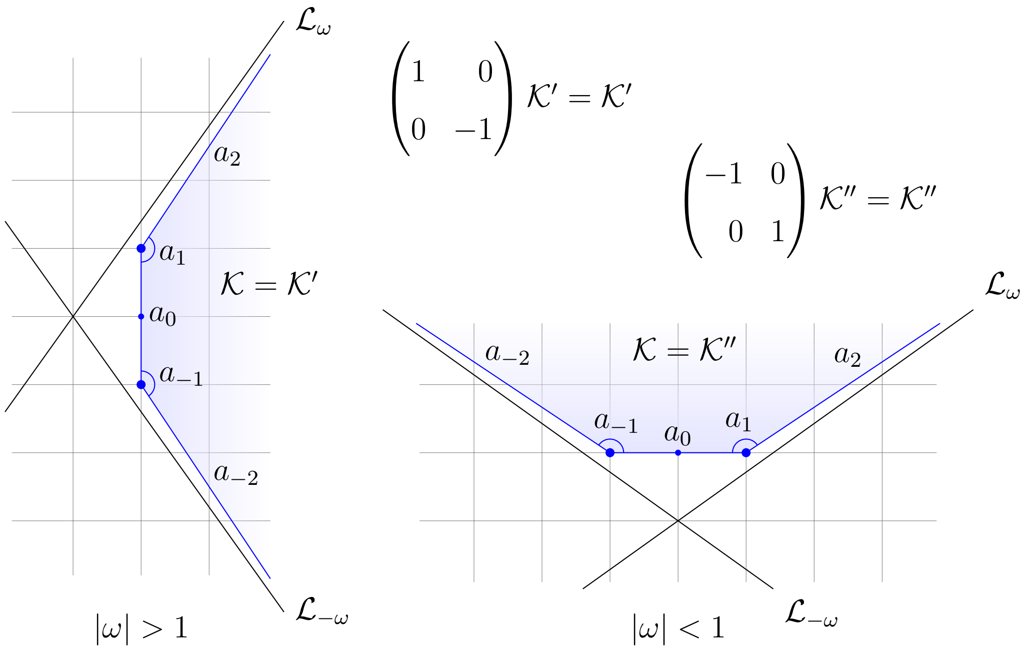


Рисунок 4: Симметрии в случае $\omega + \bar{\omega} = 0$

Лемма 2. *Последовательность* (a_k) *имеет нечетный центр тогда и только тогда, когда*

$$\alpha \sim \omega: \ \omega + \bar{\omega} = 1. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $\omega > \bar{\omega}$ удовлетворяют (6). В этом случае $\mathcal{L}_\omega$ и $\mathcal{L}_{\bar{\omega}}$ меняются местами под действием

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Обозначим полигон Клейна, содержащий точку $(1,1)$, через $\mathcal{K}$.

Если $\omega > 1$, то существует ребро полигона $\mathcal{K} = \mathcal{K}'$, содержащее точки $(1,0)$ и $(1,1)$. Тогда этому ребру можно сопоставить a_0 (см. Рис. 5). Значит, a_0 — нечетный центр симметрии (a_k), так как

$$A\mathcal{K} = \mathcal{K} \quad \text{и} \quad A\begin{pmatrix}1\\ 1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1/2\end{pmatrix}.$$

Если $\omega < 1$, то существует ребро полигона $\mathcal{K} = \mathcal{K}''$, содержащее точки $(-1,0)$ и $(1,1)$. Тогда этому ребру можно сопоставить a_0 (см. Рис. 5). Значит, a_0 — нечетный

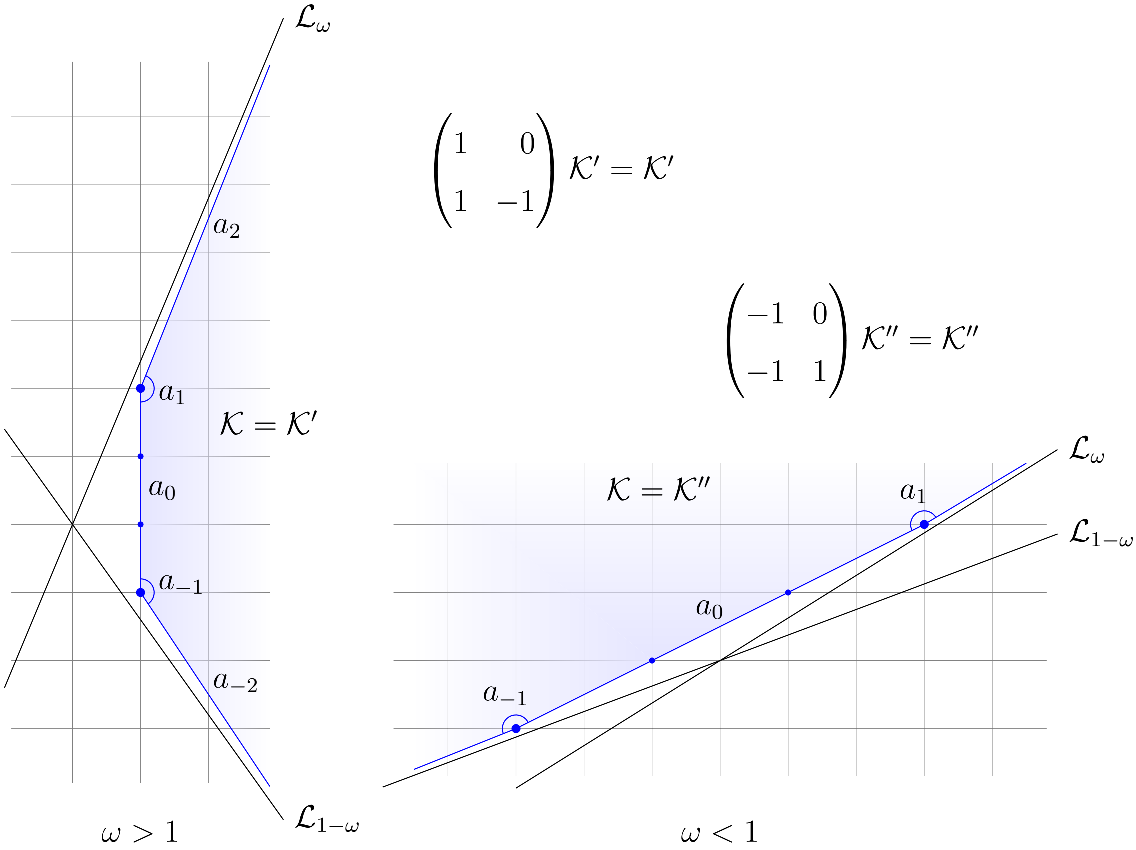


Рисунок 5: Симметрии в случае $\omega + \bar{\omega} = 1$

центр симметрии (a_k), так как

$$B\mathcal{K} = \mathcal{K} \quad \text{и} \quad B\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Обратно, для данного (a_k) с нечетным центром a_0 положим

$$\mathbf{v}_{-2} = (1, (1 - a_0)/2), \quad \mathbf{v}_0 = (1, (1 + a_0)/2).$$

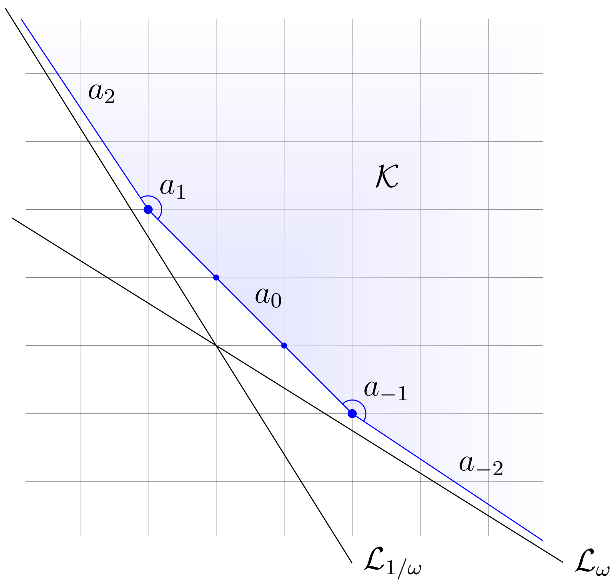
Рассуждения из обратной части доказательства Леммы 1 аналогичным образом устанавливают соотношения:

$$A\mathcal{K} = \mathcal{K}, \quad A\mathcal{L}_\omega = \mathcal{L}_{\bar{\omega}}, \quad A\mathcal{L}_{\bar{\omega}} = \mathcal{L}_\omega.$$

Итак, $\bar{\omega} = 1 - \omega$. □

Лемма 3. *Последовательность (a_k) имеет нечетный центр тогда и только тогда, когда*

$$\alpha \sim \omega : \ \omega\bar{\omega} = 1. \tag{7}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{K} = \mathcal{K}$$

Рисунок 6: Симметрии в случае $\omega\bar{\omega} = 1$

Доказательство. Пусть ω удовлетворяет (7). В этом случае $\mathcal{L}_\omega$ и $\mathcal{L}_{\bar{\omega}}$ меняются местами под действием

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть для определенности $\omega < 0$. Обозначим через $\mathcal{K}$ - полигон Клейна, содержащий на своем ребре точки $(1, 0)$ и $(0, 1)$ (см. Рис. 6). Тогда этому ребру можно сопоставить a_0. Значит, a_0 — нечетный центр симметрии (a_k), так как

$$A\mathcal{K} = \mathcal{K} \quad \text{и} \quad A \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Обратно, для данного (a_k) с нечетным центром a_0 положим

$$\mathbf{v}_{-2} = \left(\frac{1 + a_0}{2}, \frac{1 - a_0}{2} \right), \quad \mathbf{v}_0 = \left(\frac{1 - a_0}{2}, \frac{1 + a_0}{2} \right).$$

Рассуждения из обратной части доказательства Леммы 1 аналогичным образом устанавливают соотношения:

$$A\mathcal{K} = \mathcal{K}, \quad A\mathcal{L}_\omega = \mathcal{L}_{\bar{\omega}}, \quad A\mathcal{L}_{\bar{\omega}} = \mathcal{L}_\omega.$$

Итак, $\bar{\omega} = 1/\omega$. □

Лемма 4. *Последовательность (a_k) имеет межпозиционный центр тогда и только тогда, когда*

$$\alpha \sim \omega : \ \omega\bar{\omega} = -1. \tag{8}$$

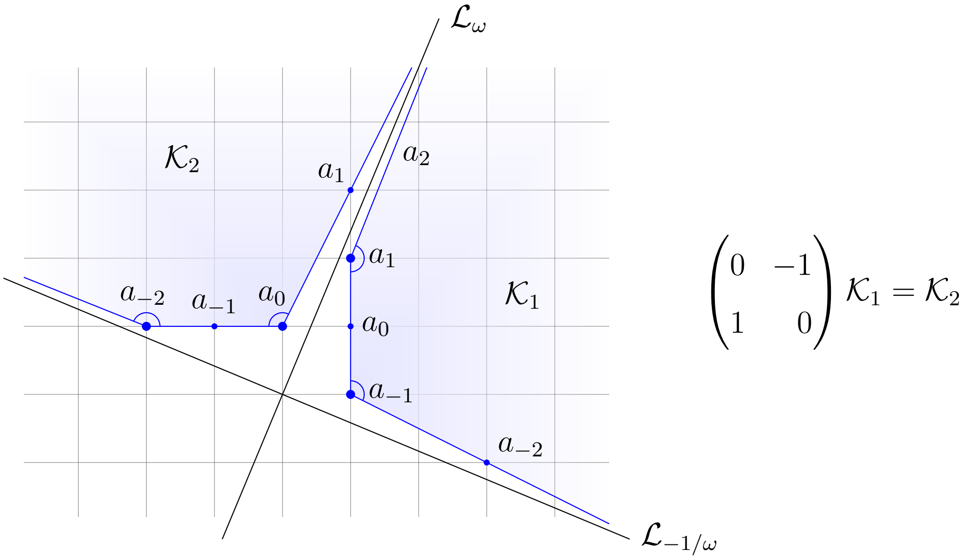


Рисунок 7: Симметрии в случае $\omega\bar{\omega} = -1$

Доказательство. Пусть ω удовлетворяет (8). В этом случае $\mathcal{L}_\omega$ и $\mathcal{L}_{\bar{\omega}}$ ортогональны и меняются местами под действием

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть для определенности $\omega > 1$. Тогда ω и $\bar{\omega}$ удовлетворяют (3) и можно положить

$$\mathbf{v}_{-2} = (1, 0), \quad \mathbf{v}_{-1} = (0, 1),$$

сопоставляя a_0 вертикальному ребру полигона Клейна, соответствующему углу между $(1, \omega)$ и $(1, \bar{\omega})$ (см. Рис. 7). Таким образом, для любого четного k верно $A\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{-3-k}$, откуда для любого целого k

$$a_k = a_{-1-k}\,, \tag{9}$$

что эквивалентно симметрии (a_k) с центром в позиции между a_0 и a_{-1}

Обратно, для данного (a_k) с центром симметрии в позиции между a_0 и a_{-1} положим

$$\mathbf{v}_{-2} = (1, 0), \quad \mathbf{v}_0 = (1, a_0).$$

При выполнении (9) два полигона Клейна $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ с соответствующими вершинами $\mathbf{v}_{2m}$ и $\mathbf{v}_{2m+1}$, $m \in \mathbb{Z}$ являются изоморфными. Тогда Следствие 2 влечет существование такого $B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, что

$$B\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{-3-k}\,.$$

Но отрезок $[\mathbf{v}_{-1}, \mathbf{v}_{-3}]$ ортогонален $[\mathbf{v}_{-2}, \mathbf{v}_0]$. Итак, $B = A$ и $\omega\bar{\omega} = -1$. $\square$

4 Многомерное обобщение симметрии периода цепной дроби

В случае обыкновенной цепной дроби теорема Лагранжа ставит любой квадратичной иррациональности в соответствие оператор $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ с различными иррациональными положительными собственными значениями, для которого вектора $(1, \alpha)$ и $(1, \bar{\alpha})$ являются собственными и образуют полигон Клейна $\mathcal{K}$, соответствующий направлениям $\mathcal{L}_\alpha$ и $\mathcal{L}_{\bar{\alpha}}$. Оператор A сдвигает последовательность целочисленных длин и углов полигона $\mathcal{K}$ вдоль некоторого периода $(\bar{a})$, а, значит, на $\partial\mathcal{K}$ имеется свободное действие группы, порожденной целыми степенями A. Более того, $\alpha \sim \omega$ тогда и только тогда, когда существует $G \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, устанавливающий изоморфизм полигонов Клейна и

$$G \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \end{pmatrix},$$

откуда в силу Следствия 2 в изоморфном полигоне оператор $GAG^{-1} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ сдвигает последовательность целочисленных длин и углов полигона $G\mathcal{K}$ вдоль того же периода $(\bar{a})$.

4.1 Полиэдры Клейна многомерных симплицальных конусов

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ даны n гиперплоскостей общего положения, содержащих начало координат $\mathbf{0}$ и разибвающих пространство на $N = 2^n$ симплицальных конусов $C_1, \ldots, C_N$. Пусть C - один из этих конусов.

Определение 7. Выпуклая оболчка $\mathcal{K}$ решетки $\mathbb{Z}^n$ внутри конуса C называется *полиэдром Клейна* или *(n-1)-мерной цепной дробью. Парусом* называется граница полиэдра Клейна $\partial\mathcal{K}$.

В случае, когда определяющие полиэдр n гиперплоскостей не содержат целых точек, верно следующее

Предложение 12 ([9]). *Пусть n гиперплоскостей, определяющих конус C и полиэдр $\mathcal{K}$, не содержат целых точек, за исключением* $\mathbf{0}$. *Тогда:*

(а) *$\mathcal{K}$ - замкнутое множество;*

(б) *$\pi \cap C$ - компактно для любой опорной гиперплоскости π к $\mathcal{K}$;*

(в) *$\pi \cap \partial\mathcal{K}$ - выпуклый многогранник;*

(г) *$\partial\mathcal{K}$ является объединением $(n-1)$-мерных граней, любая точка из $\partial\mathcal{K}$ лежит лишь в конечном множестве этих граней;*

(д) *$\partial\mathcal{K}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^{n-1}$.*

4.2 Теорема Дирихле и представление группы Дирихле

Определение 8. Пусть P - поле алгебраических чисел степени n над $\mathbb{Q}$. Произвольная аддитивная подгруппа P ранга n называется *полным модулем* над P. Если полный модуль $D \subset P$ является кольцом с единицей, то он называется *порядком.*

Единицей порядка D называется такое $\varepsilon \in D$, что $\varepsilon^{-1} \in D$. Теорема Дирихле о единицах утверждает существование и единственность разложения всех единиц данного порядка через степени других единиц следующим образом(см. [10]):

Предложение 13. *Пусть P - поле алгебраических чисел степени $n = s+2t$, где s и t - соответсвенно количество вещественных и комплексных изоморфизмов из P в $\mathbb{C}$, а D - произвольный порядок над P. Тогда D содержит такие единицы $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$, где $r = s + t - 1$, что любая единица $\varepsilon \in D$ единственным образом представима в виде*

$$\varepsilon = \xi \varepsilon_1^{a_1} \dots \varepsilon_r^{a_r},$$

где $a_1, \dots, a_r$ - целые, а ξ - корень из единицы, содержащийся в D.

Пусть дан оператор A, удовлетворяющий

$$A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}), \quad \chi_A\text{- \textit{неприводим над} } \mathbb{Q}, \quad \sigma(A) \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

В таком случае оператор A имеет n различных иррациональных собственных значений. Собственные вектора этого оператора есть образующие некоторого симплициального конуса C, причем образующие прямые не содержат рациональных точек, кроме $\mathbf{0}$, откуда из различности собственных значений никакая грань C не содержит рациональных, а стало быть, и целых точек. Таким образом, для собственных конусов таких операторов A выполняется условие Предложения 12.

Пусть $Dir(A)$ - *группа Дирихле* матрицы A, состоящая из всех целых коммутирующих с A матриц из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, а $Dir_+(A) \subset Dir(A)$ - подмножество этой группы, состоящее из матриц с положительными собственными значениями. Тогда верно следующее

Предложение 14. *Пусть матрица A удовлетворяет (10). Тогда любая матрица $B \in Dir(A)$ представима в виде многочлена от A степени $n-1$ с рациональными коэффициентами.*

Доказательство. Рассмотрим вектор $e \in \mathbb{Z}^n$. Так как оператор A удовлетворяет условию Предложения 12, то все координаты вектора e в собственном базисе оператора A отличны от 0. Тогда целые вектора $e, Ae, \ldots, A^{n-1}e$ линейно независимы и образуют базис $\mathbb{R}^n$ в силу неравенства нулю как координат, так и определителя Вандермонда для различных собственных значений $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Значит целый вектор Be имеет в целом базисе рациональные координаты, то есть $Be = b_0 e + b_1 Ae + \ldots + b_{n-1}A^{n-1}e$, где $b_i \in \mathbb{Q}$. Тогда $B = b_0 E + b_1 A + \ldots + b_{n-1}A^{n-1}$. Действительно, на произвольном базисном векторе из коммутативности A и B следует

$$B(A^k e) = A^k(Be) = (b_0 E + b_1 A + \ldots + b_{n-1}A)A^k e$$

□

Замечание 1. Заметим, что в доказательстве не использовалось условие $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, а значит факт верен для всех $B \in Mat_n(\mathbb{Z})$, коммутирующих с A. Пусть $\Gamma(A)$ - множество всех таких матриц B.

Пусть α - собственное значение оператора A, удовлетворяющего (10). $\mathbb{Q}(\alpha)$ - простое алгебраическое расширение, $\mathbb{Q}(A)$ - многочлены с рациональными коэффициентами от A. При этом

$$Dir_+(A) \subset Dir(A) \subset \Gamma(A) \subset \mathbb{Q}(A) \cong \mathbb{Q}[x]/_{\chi_A(x)} \cong \mathbb{Q}(\alpha),$$

а значит существует естественный изоморфизм $h_{A,\alpha} : \mathbb{Q}(A) \mapsto \mathbb{Q}(\alpha)$. Следующий факт устанавливает связь между группой $Dir(A)$ и единицами некоторого порядка над полем $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Предложение 15 ([11]). *Пусть α - собственное значение оператора A, удовлетворяющего (10). Тогда группа $Dir(A)$ изоморфна мультипликативной группе единиц порядка $h_{A,\alpha}(\Gamma(A))$ над полем $\mathbb{Q}(\alpha)$, причем изоморфизм этот достигается сужением $h_{A,\alpha}$ на $Dir(A)$.*

Если все корни неприводимого над $\mathbb{Q}$ характеристического многочлена для α вещественны, то все изоморфизмы из $\mathbb{Q}(\alpha)$ в $\mathbb{C}$ вещественны, а корнями из единицы могут быть только ± 1. При этом $Dir_+(A)$ не может содержать $-E$ и является подгруппой свободной абелевой группы $Dir(A)$. Таким образом, следующее утверждение является следствием Предложений 13 и 15.

Предложение 16. *Пусть α - собственное значение оператора A, удовлетворяющего (10). Тогда $Dir(A) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}^{n-1}$, $Dir_+(A) \cong \mathbb{Z}^{n-1}$.*

4.3 Симметрии парусов

Любая матрица из $Dir_+(A) \cong \mathbb{Z}^{n-1}$ при действии в собственном для A конусе C сохраняет решетку и образующие этого конуса (как собственные направления). Положительность собственных значений влечет сохранение C, а значит $\mathcal{K}$ и $\partial\mathcal{K}$. Таким образом, имеется свободное действие на $\partial\mathcal{K}$ группы с $(n-1)$ образующей без неподвижных точек, а значит в полигоне существует односвязная связная *фундаментальная область*, составленная из объединения граней полиэдра и содержащая ровно одного представителя орбиты любой точки $P \in \partial\mathcal{K}$ или, что тоже самое, ровно одного представителя орбиты любой грани $\partial\mathcal{K}$. Образ фундаментальной области при действии $Dir_+(A)$ есть весь парус $\partial\mathcal{K}$, и в этом смысле можно говорить о его периодичности. Более того, если в парусе $\partial\mathcal{K}$ есть такая область, являющейся фундаментальной относительно действия группы $\mathfrak{A} \cong \mathbb{Z}^{n-1}$ на этом парусе, то $\partial\mathcal{K}$ соответсвует собственному конусу некоторого оператора A, удовлетворяющего (10), а значит и $\mathfrak{A} \cong Dir_+(A)$.

Рассмотрим оператор A вида (10) и соответствующий ему конус C. Любой оператор $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, сохраняющий C, очевидно, сохраняет $\mathcal{K}$ и $\partial\mathcal{K}$, при этом упорядоченный набор собственных направлений C переставляется по циклу. Если эта перестановка тождественна, то оператор G коммутирует с A и имеет положительные собственные значения, а, значит, $G \in Dir_+(A)$, и этот оператор сдвигает фундаментальную область вдоль периода. В случае нетождественности перестановки фундаментальная область не обязана отображаться на себя, более того, это может произойти с любой фундаментальной областью. Если оператор $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ сохраняет некоторую фундаментальную область F (не обязательно состоящую из граней, но содержащее ровно по одному представителю орбит паруса $\partial\mathcal{K}$ при действии $Dir_+(A)$), то $\partial\mathcal{K}$, а значит и C сохраняется под действием G. Более того, верно следующее

Предложение 17. *Пусть дан оператор A вида (10) и соответствующий ему конус C. Рассмотрим произвольный оператор $G \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(а) *G сохраняет C и имеет неподвижную точку P внутри C, а значит и неподвижные точки вдоль направления $\mathbf{0P} \subset C$;*

(б) *G сохраяняет некоторую фундаментальную область паруса F в смысле действия группы $Dir_+(A)$.*

Доказательство. Пункт (б), очевидно, влечет (а), поскольку образы любых различных ячеек $F_1 = A_1(F)$ и $F_2 = A_2(F)$, где $A_1 \neq A_2$, $A_i \in Dir_+(A)$, являются различными ячейками $GA_1G^{-1}(F)$ и $GA_2G^{-1}(F)$.

Докажим обратную часть. Рассмотрим $G \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$, сохраняющий C и имеющий неподвижные точки вдоль направления $\mathbf{0P} \subset C$. Обозначим через (u_1, u_2, u_3) - собственный базис оператора A. Оператор G имеет неподвижную точку внутри C, а значит из сохранения разложения этой точки по собственному базису следует то, что оператор G нетождественным образом переставляет (u_1, u_2, u_3) и растягивает их на некоторые коэффициенты. При этом очевидно, что операции перестановок и растяжений коммутируют. Таким образом, в собственном базисе этот оператор имеет вид $G = J_\sigma D_\lambda$, где $J_\sigma \neq E$ - матрица нетривиальных перестановок базисных векторов (u_1, u_2, u_3), в каждом столбце и строке которой ровно по одной 1, а оператор $D_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. Аналогично, из разложения неподвижной точки по собственному базису верно: $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$.

Рассмотрим подмножество гиперболоида $S = \{x_1x_2x_3 = 1, x_i \geq 0\}$ в координатном представлении (u_1, u_2, u_3). Разложение оператора G очевидным образом влечет равенство $G(S) = S$, при этом наличие направления с неподвижными точками в

C означает наличие неподвижной точки в S под действием G. Отображение π_{log}, задаваемое системой уравнений $\{y_i = \log x_i\}$, отображает гомеоморфно S на гиперплоскость $y_1+y_2+y_3 = 0$. Покажем, что индуцированное действие $\pi_{log}\circ G\circ\pi_{log}^{-1}$ на этой плоскости есть движение с неподвижной точкой. Действительно, любые две различные точки (y_1, y_2, y_3) и (y'_1, y'_2, y'_3) переходят при этом отображении соответственно в точки с координатами

$$(\log\lambda_{\sigma^{-1}(1)} + y_{\sigma^{-1}(1)}, \log\lambda_{\sigma^{-1}(2)} + y_{\sigma^{-1}(2)}, \log\lambda_{\sigma^{-1}(3)} + y_{\sigma^{-1}(3)}),$$

$$(\log\lambda_{\sigma^{-1}(1)} + y'_{\sigma^{-1}(1)}, \log\lambda_{\sigma^{-1}(2)} + y'_{\sigma^{-1}(2)}, \log\lambda_{\sigma^{-1}(3)} + y'_{\sigma^{-1}(3)}),$$

что в точности означает сохранение евклидовых расстояний при этом действии на гиперплоскости $y_1+y_2+y_3 = 0$. При этом образ неподвижной точки на S под действием G является неподвижной точкой гиперплоскости под индуцированным действием. Таким образом, $\pi_{log}\circ G\circ\pi_{log}^{-1}$ является осевой симметрией или поворотом на угол $\frac{2\pi}{k}$, где $k = 2$ или $k = 3$. Это влечет существование такой фундаментальной области F', в смысле действия параллельных переносов вдоль независимых направлений, порожденных $\{\pi_{log}\circ B\circ\pi_{log}^{-1}, B \in Dir_+(A)\}$, что $\pi_{log}\circ G\circ\pi_{log}^{-1}(F') = F'$. Положив $F_S = \pi_{log}^{-1}(F')$, имеем $G(F_S) = F_S$. Гомеоморфность S и паруса, которая достигается проекцией $\partial\mathcal{K}$ на S лучами, проходящими через $\mathbf{0}$, аналогичным образом показывает существование требуемой фундаментальной области в $\partial\mathcal{K}$. □

Таким образом, симметрии периода цепной дроби в многомерном случае есть в точности симметрии конуса, соответствующего этому парусу, содержащие неподвижные точки вдоль некоторого направления.

4.4 Частный случай симметрии парусов в $\mathbb{R}^3$

Пусть дан оператор $A \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ вида (10) и соответствующий ему конус C. Рассмотрим частный случай сохранения C и неподвижности точки $P \in \mathbb{Z}^3$ внутри C под действием $G \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$. В таком случае существует такой оператор $\tilde{G} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$, что

$$\tilde{G}(P) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Тогда полиэдр Клейна $\mathcal{K}$ и парус $\partial\mathcal{K}$ для такого конуса C будут изоморфны полиэдру Клейна $\tilde{G}\mathcal{K}$ и парусу $\tilde{G}(\partial\mathcal{K})$ конуса $\tilde{G}C$, который является собственным для оператора $A' = \tilde{G}A\tilde{G}^{-1}$ вида (10). При этом оператор $G' = \tilde{G}G\tilde{G}^{-1}$ сохраняет $C' = \tilde{G}C$, $\mathcal{K}' = \tilde{G}\mathcal{K}$ и $\partial\mathcal{K}' = \tilde{G}(\partial\mathcal{K})$, оставляя неподвижной точку $e = (1, 1, 1)$.

Как мы выяснили, оператор G' с неподвижной точкой внутри C' действует на направления этого конуса нетождественной циклической перестановкой. Пусть эта перестановка имеет порядок 3. Рассмотрим оператор

$$G' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда конус с периодическим парусом переходит в себя при действии этого оператора в том и только в том случае, когда направления этого конуса представимы в виде $(1, \alpha_1, \alpha_2)$, $(1, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{\alpha_1}{\alpha_2})$ и $(1, \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_1})$. Стало быть, если конус C' переходит в себя при действии этого оператора и имеет неподвижную точку, то вектора, задающие собственные направления, вида $(1, \alpha_1, \beta_1)$, $(1, \alpha_2, \beta_2)$ и $(1, \alpha_3, \beta_3)$, удовлетворяют соотношениям:

$N(\alpha_1) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 1, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – *сопряженные кубические иррациональности*;

$N(\beta_1) = \beta_1\beta_2\beta_3 = 1, (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ – *сопряженные кубические иррациональности.*

Список литературы

[1] А. Я. Хинчин *Цепные дроби.* М.: «Наука» (1978).

[2] А. М. Лежандр *Théorie des nombres.* (3 éd.), Париж (1830).

[3] Ж.-А. Серре *Sur le développement en fraction continue de la racine carrée d'un nombre entier.* J. Math. Pures Appl., **12** (1847), 518–520.

[4] В. И. Арнольд *Цепные дроби* МЦНМНО (2009)

[5] Ф. Айкарди *Symmetries of quadratic form classes and of quadratic surd continued fractions. Part II: Classification of the periods' palindromes.* Bull. Braz. Math. Soc., New Series, **41**:1 (2010), 83–124.

[6] Э. Галуа *Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques.* Annales de Mathématiques, **19** (1828), 294–301.

[7] О. Перрон *Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band I.* (3 Aufl.), Teubner (1954).

[8] Е. И. Коркина *Двумерные цепные дроби. Самые простые примеры.* Тр. МИАН., **209** (1995), 124–144.

[9] Ж.-О. Муссафи *Convex hulls of integral points.Zapiski nauch. sem.* POMI, **266** (2000).

[10] З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич И.Р *Теория чисел.* Наука, (1964).

[11] О. Н. Карпенков *Geometry of Continued Fractions.* Algorithms and Computation in Mathematics, **26**, Springer-Verlag (2013).