МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

Задачи евклидовой теории Рамсея

Выполнил:
Студент 606 группы
Просанов Р. И.

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Мощевитин Н. Г.

Москва
2017 г.

1 Введение

Определим *хроматическое число* $\chi(\mathbb{R}^n)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ как наименьшее число цветов, в которые можно так раскрасить все точки этого пространства, чтобы любые две точки на расстоянии 1 были окрашены в разные цвета. Задача нахождения хроматического числа впервые была поставлена Нелсоном в 1950 году для случая $\mathbb{R}^2$ (см. подробности в [19], [21], [22], [23]).

Точное значение хроматического числа неизвестно даже для евклидовой плоскости. Лучшими оценками на сегодняшний день являются

$$4 \leqslant \chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7$$

(см. [19]). Для случая многомерного евклидова пространства Райгородским (нижняя оценка, см. [18]) и Ларманом совместно с Роджерсом (верхняя оценка, см. [9]) установлено, что

$$(1.239 + o(1))^n \leqslant \chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (3 + o(1))^n.$$

Мы рассмотрим случай сферического пространства. Заметим, что так как на сфере нет подобия, то задача о хроматическом числе начинает зависеть от запрещённого расстояния. Эквивалентно, можно рассматривать задачу с запрещённым расстоянием 1 на сфере радиуса R. В этом случае обозначим искомое хроматическое число $\chi(S^n_R)$. Задача оценки $\chi(S^n_R)$ также имеет некоторую историю. В 1981 году Эрдеш [8] выдвинул гипотезу, что для любого фиксированного $R > 1/2$, $\chi(S^n_R)$ стремится к бесконечности с ростом n. Это было доказано Ловасом ([11]) в 1983 с использованием интересного сочетания комбинаторных и топологических методов. Ловас, помимо прочего, сделал в этой статье заявление, что при $R < \sqrt{\frac{n+1}{2n+4}}$ (т.е. когда длина стороны правильного $(n+1)$-симплекса, вписанного в сферу, меньше 1) имеем $\chi(S^n_R) = n + 1$. Однако, как было показано Райгородским в [20], это заявление ошибочно: Ловас неправильно оценил диаметр рассматриваемых им в этом случае одноцветных частей. В [20] было показано, что на самом деле для любого фиксированного $R > 1/2$ величина $\chi(S^n_R)$ растёт экспоненциально.

Очевидно, что поскольку S^n_R вкладывается в $\mathbb{R}^{n+1}$, то

$$\chi(S^n_R) \leqslant (3 + o(1))^n.$$

Несмотря на интерес к задаче, в общем случае никакой оценки лучше до сих пор не было предложено. Для небольших радиусов существует более сильная оценка, элементарно вытекающая из работ Роджерса. Мы попросту берём сферическую шапочку на S^n_R такого радиуса, чтобы её евклидов диаметр был бы чуть меньше единицы, покрываем копиями этой шапочки всю поверхность сферы и красим каждую копию в свой цвет. Таким образом, мы получаем оценку

$$\chi(S^n_R) \leqslant (2R + o(1))^n.$$

В настоящей работе мы предъявим новую оценку $\chi(S^n_R)$ при $R \geqslant \frac{\sqrt{5}}{2}$, улучшив при данных значениях радиуса упомянутые выше уже известные оценки. Более точно, положим

$$x(R) = \sqrt{5 - \frac{2}{R^2} + 4\sqrt{1 - \frac{5R^2 - 1}{4R^4}}}.$$

Тогда имеет место следующий результат:

Теорема 1. *Для* $R \geqslant \frac{\sqrt{5}}{2}$ *верна оценка* $\chi(S_R^n) \leqslant (x(R) + o(1))^n$.

Очевидно, что для всех таких R основание экспоненты меньше трёх. (Однако, при $R \to \infty$ он стремится к 3.) Из доказательства также будет ясно, что он меньше, чем $2R$. Отметим, что при $\frac{1}{2} \leqslant R \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2}$ улучшения известных оценок нами не получено, но методы настоящей работы позволяют на этом промежутке получить альтернативное доказательство оценки $\chi(S_R^n) \leqslant (2R + o(1))^n$.

Пусть $B_R^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ есть евклидов шар радиуса R (с центром в 0). Оказывается, что конструкция в доказательстве теоремы 1 также влечёт следующее утверждение:

Теорема 2. *Для* $R \geqslant \frac{\sqrt{5}}{2}$ *верна оценка* $\chi(B_R^{n+1}) \leqslant (x(R) + o(1))^n$. *Для* $\frac{1}{2} \leqslant R \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2}$ *верно* $\chi(B_R^{n+1}) \leqslant (2R + o(1))^n$.

Последняя теорема утверждает, что любой ограниченный кусок $\mathbb{R}^{n+1}$ можно правильно покрасить, использовав существенно (в экспоненту раз) менее, чем $(3+o(1))^n$ цветов (оценка Лармана–Роджерса). Это представляет особый интерес в связи с теоремой Эрдеша–Де Брейна [6], которая доказывает, что хроматическое число каждого евклидова пространства достигается на конечном дистанционном графе. Автор благодарен А. Б. Купавскому за указание того, что теорема 2 должна следовать из теоремы 1.

Дальнейшая структура работы такова. В разделе 2 приводится сжатое изложение метода и даны ссылки на некоторые работы, связанные с использованием аналогичных техник. В разделе 3 вводятся необходимые обозначения и определения. В разделе 4 приводится доказательство теоремы 1, а в разделе 5 — теоремы 2.

2 Изложение метода

Доказательство теоремы 1 базируется на подходе, предложенном Ларманом и Роджерсом при оценке ими хроматического числа евклидова пространства [9]. Мы построим множество на S_R^n, не содержащее пары точек на расстоянии 1, оценим его плотность, а затем покроем копиями этого множества всю сферу. Заметим, что реализация всех этих пунктов в статье [9] не обобщается на случай сферического пространства и требует привлечения новых идей. Построение множества без расстояния 1 в [9] использует некоторые глубокие результаты из теории решёток в $\mathbb{R}^n$ и их связи с выпуклой геометрией. Также существенно наличие гомотетии в $\mathbb{R}^n$ и изменение объёма при гомотетии. В нашей работе будет предложена явная геометрическая конструкция для построения такого множества на сфере.

Оценка количества копий построенного множества, покрывающих всё $\mathbb{R}^n$, получается с помощью прямого применения теоремы Эрдеша–Роджерса [7] об оценке плотности периодического покрытия евклидова пространства с помощью копий выпуклого тела. На настоящий момент известно несколько различных подходов к доказательству этого результата (и его незначительных улучшений). Большая их часть использует вероятностный метод, а также существенно пользуется выпуклостью исходного тела и наличием гомотетии. В нашей работе нам предстоит покрывать сферу с помощью копий некоторого несвязного множества, состоящего из различных “кусков”, которые могут не являться даже сферически выпуклыми. Эти обстоятельства делают невозможными применение как самих традиционных методов доказательства подобных результатов, так и идей, лежащих за ними.

Принципиально иной подход к покрытиям одних геометрических объектов другими был предложен Насоди в статье [13]. В этой работе строится некоторый абстрактный конечный гиперграф таким образом, что решение задачи о рёберном покрытии этого гиперграфа эквивалентно решению исходной геометрической задачи. Далее, используется известный результат Ловаса (см. подробнее в следующем разделе) о размере оптимального покрытия в конечном гиперграфе с оптимальной величиной так называемого дробного покрытия. Последняя снова оценивается из геометрических соображений. Из работы Насоди, в частности, следует новое доказательство результата Эрдеша–Роджерса, а также результата Роджерса о покрытии сферы шапочками.

Доказательство третьего пункта нашего плана существенно вдохновлено работой [13]. Поскольку эта статья преследует цели, не связанные напрямую с нашими, то прямое использование полученных в ней результатов несколько затруднительно (теорема 1.4 оттуда может быть применена в наших условиях, однако, параметры, входящие в её формулировку, не слишком просто оценить). В связи с этим, в пункте 3.3 нами предъявлено доказательство всех необходимых нам утверждений независимо от [13]. Подобный подход уже был применён автором в работах [16] и [17] в связи с задачами в евклидовых пространствах.

Отметим, что переход от задач дискретной геометрии к эквивалентным задачам для гиперграфов известен давно и часто приносит впечатляющие плоды: смотрите, например, доказательство Алоном и Кляйтманом (p, q)–теоремы (прекрасно изложенное в книге [12]) или недавнее доказательство Паха и Палвелдьи существования неразложимого покрытия плоскости одинаковыми кругами [15]. Концепция "дробных" геометрических покрытий была предложена Арштейн-Авидян, Разом и Сломкой в статьях [1] и [2]. По подводу различных подходов к доказательству утверждений типа Эрдеша–Роджерса смотрите обзор Насоди [14].

3 Необходимые результаты и обозначения

Обозначим $C(x, \phi)$ сферическую шапочку с центром в точке $x \in S_R^n$ и угловым радиусом $\phi \leqslant \pi/2$. Её евклидов диаметр равен $2R \sin \phi$.

Пусть $\rho(.)$ это стандартная вероятностная мера на S_R^n, инвариантная относительно вращений. То есть, для измеримого множества $Z \subset S_R^n$, $\rho(Z) = \frac{\mathrm{vol}(Z)}{\mathrm{vol}(S_R^n)}$. Мы будем также называть $\rho(Z)$ *плотностью* множества Z.

Положим $\Theta(\phi) = \rho(C(x, \phi))$. Мы будем пользоваться следующими известными оценками:

Лемма 1, Берецки–Винш, [4]. *Для* $0 < \phi < \pi/2$ *и* $1 < t < \frac{\pi}{2\phi}$ *имеет место*

$$\Theta(t\phi) < t^n \Theta(\phi),$$

$$\Theta(\phi) > \frac{R^n \sin^n \phi}{\sqrt{2\pi(n+1)}}.$$

Рассмотрим некоторое множество Z, семейство его подмножеств $\mathcal{F}$. Минимальную мощность такого подсемейства $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, что объединение всех элементов $\mathcal{G}$ покрывает Z, мы обозначим $\tau(Z, \mathcal{F})$.

Рассмотрим конечный гиперграф $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$. *Покрытием* этого гиперграфа назовём семейство рёбер, в объединении которых содержатся все вершины. Обозначим $\tau(G)$ минимальный размер покрытия G.

Дробным покрытием гиперграфа G назовём такую функцию $\nu : \mathcal{E} \to [0; +\infty)$, что для каждого $w \in W$, $\sum\limits_{E \in \mathcal{E}: w \in E} \nu(E) \geqslant 1$. Определим

$\tau^*(G) = \inf\{\sum\limits_{E \in \mathcal{E}} \nu(E) : \nu$ — дробное покрытие $G\}$.

Имеет место следующее утверждение:

Лемма 2, Ловас, [10]. *Для любого конечного гиперграфа G выполнено*

$$\tau(G) < \left(1 + \ln\left(\max_{E \in \mathcal{E}}(|E|)\right)\right)\tau^*(G).$$

4 Доказательство теоремы 1

4.1 Построение плотного множества без расстояния 1

Фиксируем некоторый угол $\phi < \pi/4$. Выберем максимальное по мощности множество $X \subset S_R^n$ такое, что для всех $x_1, x_2 \in X$ верно $C(x_1, \phi) \cap C(x_2, \phi) = \emptyset$. Заметим, что тогда $\bigcup\limits_{x \in X} C(x, 2\phi) = S_R^n$. Рассмотрим разбиение Вороного Ψ сферы S_R^n на сферические полиэдры, связанное с множеством X. Обозначим ψ_x сферический полиэдр, связанный с точкой $x \in X$. Заметим, что $C(x, \phi) \subset \psi_x \subset C(x, 2\phi)$.

Рассмотрим касательную плоскость L к S_R^n в точке x. Пусть P_x есть цилиндр, образованный всеми прямыми, проходящими через точки ψ_x перпендикулярно L. Заметим, что он выпуклый. В самом деле, пусть $a, b \in \psi_x$. Рассмотрим сферический треугольник abx. При условии, что $a, b \in C(x, \pi/2)$ несложно заметить, что ортогональная проекция этого треугольника на L есть выпуклое множество. Значит, отрезок $ab \subset P_x$. Рассмотрим гомотетию этого цилиндра с центром в точке x и некоторым коэффициентом λ, где $0 < \lambda < 1$. Обозначим образ P'_x. Положим $\psi'_x = P'_x \cap S_R^n$. Также положим $\Psi' = \bigcup\limits_{x \in X} \psi'_x$.

Ясно, что ψ'_x лежит в сферической шапочке, евклидов диаметр которой отличается от евклидова диаметра шапочки $C(x, 2\phi)$ в λ раз. Таким образом, диаметр множества ψ'_x не превосходит $2R\lambda \sin(2\phi)$. Угловой радиус этой шапочки равен γ, где γ задаётся уравнением $\sin\gamma = \lambda \sin(2\phi)$.

Покажем, что угловое расстояние от ψ'_x до границы ψ_x не меньше $\phi - \alpha$, где α задаётся уравнением $\sin\alpha = \lambda \sin\phi$. ψ_x — сферический полиэдр, так что он получается как пересечение некоторого полиэдрального конуса с нашей сферой S_R^n. Пусть l есть некоторая гипергрань этого конуса. Докажем, что угловое расстояние от ψ'_x до $l \cap S_R^n$ не меньше $\phi - \alpha$. Ясно, что достаточно рассмотреть точки ψ'_x, прообразы которых принадлежали $l \cap S_R^n$.

Пусть $\phi_1 \geqslant \phi$ это угловое расстояние от точки x до $l \cap S^n_R$, α_1 задаётся уравнением $\sin\alpha_1 = \lambda \sin\phi_1$. Заметим, что $\phi_1 - \alpha_1$ не меньше $\phi - \alpha$. В самом деле, достаточно рассмотреть производную функции $\phi - \arcsin(\lambda \sin\phi)$. Она равна

$$1 - \frac{\lambda\cos\phi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\phi}} > 0.$$

Дальше будем доказывать, что угловое расстояние от ψ'_x до $l \cap S^n_R$ не меньше $\phi_1 - \alpha_1$. Геометрическое место точек S^n_R, удалённых от $l \cap S^n_R$ на угловое расстояние не меньше $\phi_1 - \alpha_1$ и лежащих по ту же сторону от l, что и x, это некоторая сферическая шапочка, получаемая пересечением S^n_R с полупространством, ограниченным плоскостью $\tilde{l}$, параллельной l и выбранной так, чтобы сферическое расстояние между $l \cap S^n_R$ и $\tilde{l} \cap S^n_R$ было бы равно $\phi_1 - \alpha_1$.

Рассмотрим теперь произвольную точку $a \in l \cap S^n_R$. Пусть a' — соответствующая точка на границе ψ'_x, т.е. получаемая пересечением S^n_R с прямой, которая есть гомотетия перпендикуляра к L, проведённого через a. Обозначим $\tilde{a}$ точку пересечения $\tilde{l}$ и дуги $xa'a$. Нам нужно доказать, что точка $\tilde{a}$ лежит на этой дуге между точками a и a'. Положим угол $a'Ox = \alpha_2$, угол $\tilde{a}Ox = \tilde{\alpha}_2$, а угол $aOx = \phi_2 \geqslant \phi_1$, т.к. угловое расстояние от точки x до $l \cap S^n_R$ равно ϕ_1. Известно, что

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\phi_2} = \lambda = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\phi_1}.$$

Поскольку l и $\tilde{l}$ параллельны, то они делят все отрезки вида ax в одинаковом отношении. Отсюда имеем

$$\frac{\sin(\phi_2 - \tilde{\alpha}_2)}{\sin\phi_2} = \frac{\sin(\phi_1 - \alpha_1)}{\sin\phi_1}.$$

Достаточно доказать, что

$$\sin\tilde{\alpha}_2 \geqslant \sin\alpha_2 = \lambda\sin\phi_2 = \frac{\sin\alpha_1 \sin\phi_2}{\sin\phi_1},$$

что равносильно (поскольку все рассматриваемые углы не превосходят $\pi/4$)

$$\frac{\sin\tilde{\alpha}_2}{\sin\phi_2} \geqslant \frac{\sin\alpha_1}{\sin\phi_1}.$$

Положим

$$c = \frac{\sin(\phi_2 - \tilde{\alpha}_2)}{\sin\phi_2} = \frac{\sin(\phi_1 - \alpha_1)}{\sin\phi_1} < 1.$$

Рассмотрим $\alpha(\phi) = \phi - \arcsin(c \cdot \sin\phi)$ и

$$f(\phi) = \frac{\sin\alpha(\phi)}{\sin\phi} = \cos(\arcsin(c\cdot\sin\phi)) - c\cdot\cos\phi.$$

$$f'(\phi) = c\cdot\sin\phi - c^2\cdot\sin\phi\cos\phi\frac{1}{\sqrt{1-c^2\sin^2\phi}}.$$

При $0 < \phi < \pi/4$ условие $f'(\phi) > 0$ равносильно

$$1 > c^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi) = c^2.$$

Следовательно, эта функция возрастает на промежутке $(0; \pi/4)$, что доказывает искомое неравенство.

Аналогично мы можем доказать, что угловое расстояние от любой точки ψ'_x до любой сферической гиперграни, составляющей границу ψ_x, не меньше $\phi - \alpha$.

Теперь ясно, что угловое расстояние между любыми двумя точками из множеств ψ'_x и ψ'_y не меньше $2(\phi - \alpha)$. В самом деле, рассмотрим пару точек z_x и z_y соответственно. Выпустим геодезическую из z_x в z_y. Выделим на ней две дуги: от z_x до границы ψ_x и от границы ψ_y до z_y соответственно. Эти дуги не меньше $\phi - \alpha$, значит угловое расстояние между z_x и z_y не меньше $2(\phi - \alpha)$. Тогда расстояние между множествами ψ'_x и ψ'_y не меньше $2R\sin(\phi - \alpha)$.

Найдём такие ϕ и λ_0, что

$$\begin{cases} 2R\lambda_0 \sin(2\phi) = 1 \\ \sin\alpha = \lambda_0 \sin\phi \\ 2R\sin(\phi - \alpha) = 1 \end{cases}$$

Тогда для любого $\lambda < \lambda_0$ множество Ψ' не будет содержать точек на евклидовом расстоянии 1.

Сначала получим уравнение на λ_0 от ϕ. Приравнивая левые части первого и третьего уравнения, а также используя второе, получаем

$$2\lambda_0 \sin\phi\cos\phi = \sin\phi\cos\alpha - \sin\alpha\cos\phi =$$
$$= \sin\phi\sqrt{1 - \lambda_0^2\sin^2\phi} - \lambda_0\sin\phi\cos\phi.$$

Следовательно,

$$2\lambda_0\cos\phi = \sqrt{1 - \lambda_0^2\sin^2\phi} - \lambda_0\cos\phi,$$
$$9\lambda_0^2\cos^2\phi = 1 - \lambda_0^2\sin^2\phi,$$
$$\lambda_0^2 = \frac{1}{1 + 8\cos^2\phi}.$$

Теперь, подставляя это в первое уравнение, получим уравнение на ϕ:

$$1 + 8\cos^2\phi = 16R^2\sin^2\phi\cos^2\phi.$$

Решая это уравнение, находим:

$$\cos^2\phi = \frac{1}{2} - \frac{1}{4R^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{5R^2 - 1}{16R^4}}.$$

Поскольку нас интересуют только решения с $\phi < \pi/4$, то ясно, что нам нужен корень с плюсом. Выясним, когда он больше $1/2$. Надо решить неравенство:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4R^2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{5R^2 - 1}{16R^4}} > \frac{1}{2}.$$

Решая, получаем $R > \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Очевидно, что $\lambda_0 \geqslant \frac{1}{3}$. Также, поскольку из первого уравнения имеем

$$\lambda_0 = \frac{1}{2R\sin 2\phi},$$

то видим, что $\lambda_0 \geqslant \frac{1}{2R}$.

4.2 Оценка плотности множества Ψ'

Рассмотрим $x \in X$ и выберем ортогональную систему координат в $\mathbb{R}^{n+1}$ так, чтобы ось Ox_{n+1} совпадала с лучом Ox. Обозначим $\tilde{\Omega}$ и $\tilde{\Omega}'$ проекции ψ_x и ψ'_x соответственно на координатную гиперплоскость $Ox_1 ... x_n$. Очевидно, что $\frac{1}{\lambda}\tilde{\Omega}' = \tilde{\Omega}$.

Для множества $Z \subset S^n_R$ обозначим $\mathrm{vol}(Z)$ его сферический объём. Имеем:

$$\mathrm{vol}(\psi_x) = \int\limits_{\tilde{\Omega}} \dots \int \frac{R dx_1 \dots dx_n}{\sqrt{R^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2}} = \int\limits_{\frac{1}{\lambda}\tilde{\Omega}'} \dots \int \frac{R dx_1 \dots dx_n}{\sqrt{R^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2}} =$$

$$= \int\limits_{\tilde{\Omega}'} \dots \int \frac{\lambda^{-n} R dx_1 \dots dx_n}{\sqrt{R^2 - \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{\lambda^2}}}. \tag{1}$$

Заметим, что поскольку $\psi'_x \subset C(x, \gamma)$, то $\tilde{\Omega}' \subset B(O, R\sin\gamma) = B(O, R\lambda \sin(2\phi))$, где $B(o, r)$ это шар в $\mathbb{R}^{n+1}$ с центром в точке o и радиусом r.

Рассмотрим функцию $f(r) = \sqrt{\frac{R^2 - r^2}{R^2 - \frac{r^2}{\lambda^2}}}$. Для любого $0 < r_0 < \lambda R$ эта функция достигает максимума на отрезке $[0, r_0]$ в точке r_0. Тогда на отрезке $[0; R\lambda\sin(2\phi)]$ функция $f(r)$ принимает максимальное значение на правом конце. Тогда для любого r из этого отрезка имеет место неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 - \frac{r^2}{\lambda^2}}} \leqslant \sqrt{\frac{R^2 - R^2\lambda^2\sin^2(2\phi)}{R^2 - \frac{R^2\lambda^2\sin^2(2\phi)}{\lambda^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Тогда мы можем оценить интеграл в (1) следующим образом

$$\mathrm{vol}(\psi_x) \leqslant \lambda^{-n} \sqrt{\frac{R^2 - R^2\lambda^2\sin^2(2\phi)}{R^2 - \frac{R^2\lambda^2\sin^2(2\phi)}{\lambda^2}}} \int\limits_{\tilde{\Omega}'} \dots \int \frac{R dx_1 \dots dx_n}{\sqrt{R^2 - x_1^2 + \dots + x_n^2}} =$$

$$= \lambda^{-n} \sqrt{\frac{1 - \lambda^2\sin^2(2\phi)}{1 - \sin^2(2\phi)}} \cdot \mathrm{vol}(\psi'_x).$$

Переходя к плотности, получаем следующую оценку:

$$\rho(\Psi') \geqslant \min_{x \in X} \frac{\mathrm{vol}(\psi'_x)}{\mathrm{vol}(\psi_x)} \geqslant \lambda^n \sqrt{\frac{1 - \sin^2(2\phi)}{1 - \lambda^2\sin^2(2\phi)}}.$$

4.3 Покрытие S^n_R с помощью копий множества Ψ'

Зафиксируем некоторое $0 < \delta < 1$. Для точки $x \in X$ пусть P''_x есть образ цилиндра P'_x при гомотетии с центром в точке x и коэффициентом $1 - \delta$. Также положим $\psi''_x = P''_x \cap S^n_R$, а $\Psi'' = \bigcup\limits_{x \in X} \psi''_x$. Обозначим $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ семейства из всех образов множества Ψ' и Ψ'' соответственно при вращениях сферы S^n_R. Нам необходимо оценить $\tau(S^n_R, \mathcal{F}')$.

Выберем такое число β, что $\sin 2\beta = \lambda\delta \sin\phi$. Обозначим $W \subset S^n_R$ такое максимальное по мощности множество точек, что для всех $w_1, w_2 \in W$ верно $C(w_1,\beta) \cap C(w_2,\beta) = \emptyset$. Тогда, по очевидным соображениям, $S^n_R = \bigcup\limits_{w\in W} C(w, 2\beta)$.

Лемма 3. $\tau(S^n_R, \mathcal{F}') \leqslant \tau(W, \mathcal{F}'')$.

Доказательство. Мы покажем, что если некоторый набор вращений множества Ψ'' покрывает множество W, то этот же набор вращений множества Ψ' покрывает всю сферу S^n_R.

Пусть $w \in \Psi''$. Тогда в силу того, что $S^n_R = \bigcup\limits_{w\in W} C(w, 2\beta)$, достаточно доказать, что $C(w, 2\beta) \subset \Psi'$.

Рассмотрим такое x, что $w \in \psi''_x$. Обозначим Q образ цилиндра P_x при композиции гомотетии с центром в x и коэффициентом $\lambda\delta$ и сдвига на вектор $w - x$. Так как каждый цилиндр P_x содержит сферическую шапочку $C(x,\phi)$, а значит, содержит шар $B(x, R\sin\phi)$, то Q содержит шар $B(w, \lambda\delta R \sin\phi) = B(w, R\sin 2\beta)$. Тогда $C(w, 2\beta) \subset (Q \cap S^n_R)$. Следовательно, достаточно доказать, что $P'_x \supset Q$.

В самом деле, $Q = \delta(P'_x - x) + x + w - x = \delta(P'_x - x) + w \subset \delta(P'_x - x) + P''_x = \delta(P'_x - x) + (1-\delta)(P'_x - x) + x = P'$, что и требовалось. □

Рассмотрим гиперграф G, вершинами которого являются точки из W, а рёбрами множества вида $W \cap A\Psi'$, где $A \in SO(n+1)$ — некоторое вращение сферы. Напомним, что $\mathcal{E}$ обозначается множество всех его рёбер. Ясно, что $\tau(W, \mathcal{F}'') = \tau(G)$.

Из лемм 2 и 3 следует, что

$$\tau(S^n_R, \mathcal{F}') \leqslant \left(1 + \ln\left(\max_{E\in\mathcal{E}}(|E|)\right)\right)\tau^*(G).$$

Рассмотрим нормализованную меру Хаара σ на $SO(n+1)$. Очевидно, что для каждого $E \in \mathcal{E}$ множество $S(E) = \{A \in SO(n+1) : A\Psi'' \cap W = E\}$ измеримо. Определим на $\mathcal{E}$ функцию ν: $\nu(E) = \frac{\sigma(S(E))}{\rho(\Psi'')}$. Также для каждого $w \in W$ положим $S(w) = \{A \in SO(n+1) : w \in A\Psi''\}$; это также измеримое множество. Очевидно, что

$$\sum_{E\in\mathcal{E}: w\in E} \nu(E) = \frac{\sigma(S(w))}{\rho(\Psi'')}$$

(каждое $A \in S(w)$ лежит ровно в одном $S(E)$ таком, что $w \in E$, а также каждое такое $S(E)$ целиком лежит в $S(w)$). С другой стороны, для любой $w \in S^n_R$,

$$\sigma(\{A \in SO(n+1) : w \in A\Psi''\}) =$$

$$= \sigma(\{A \in SO(n+1) : w \in A^{-1}\Psi''\} =$$

$$= \sigma(\{A \in SO(n+1) : Aw \in \Psi''\} = \rho(\Psi'').$$

Тогда для всех $w \in W$, $\frac{\sigma(S(w))}{\rho(\Psi'')} = 1$. Получаем, что ν есть корректное дробное покрытие гиперграфа G. Отсюда имеем

$$\tau^*(G) \leqslant \sum_{E\in\mathcal{E}} \nu(E) \leqslant \frac{\sigma(SO(n+1))}{\rho(\Psi'')} = \frac{1}{\rho(\Psi'')}.$$

Меру $\rho(\Psi'')$ несложно оценить по аналогии с $\rho(\Psi')$, заменяя λ на $\lambda(1-\delta)$:

$$\rho(\Psi'') \geqslant \lambda^n(1-\delta)^n\sqrt{\frac{1-\sin^2(2\phi)}{1-\lambda^2(1-\delta)^2\sin^2(2\phi)}}.$$

Теперь оценим

$$\max_{E\in\mathcal{E}}(|E|) = \max_{A\in SO(n+1)}(|W\cap A\Psi''|).$$

Ясно, что $|X| \leqslant \frac{1}{\Theta(\phi)}$. Пусть γ' задаётся уравнением $\sin\gamma' = \lambda(1-\delta)\sin(2\phi)$. Так как $\psi''_x \subset C(x,\gamma')$, то если $w \in \psi''_x$, то $C(w,\beta) \subset C(x,\gamma'+\beta)$. Поскольку для всех $w_1, w_2 \in W$ верно $C(w_1,\beta)\cap C(w_2,\beta) = \emptyset$, то имеем (применяя лемму 1)

$$|W\cap F'| \leqslant \frac{|X|\Theta(\gamma'+\beta)}{\Theta(\beta)} < \frac{\left(1+\frac{\gamma'}{\beta}\right)^n}{\Theta(\phi)} < \left(1+\frac{\gamma'}{\beta}\right)^n\frac{\sqrt{2\pi(n+1)}}{R^n\sin^n\phi}.$$

Окончательно имеем:

$$\tau(S^n_R,\mathcal{F}') \leqslant$$

$$\leqslant \lambda^{-n}(1-\delta)^{-n}\sqrt{\frac{1-\lambda^2(1-\delta)^2\sin^2(2\phi)}{1-\sin^2(2\phi)}}\left(1+n\ln(1+\frac{\gamma'}{\beta})-n\ln(R\sin\phi)+\frac{1}{2}\ln(2\pi(n+1))\right).$$

Подставим $\delta = \frac{1}{2n\ln n}$ и используем (при больших n)

$$\left(1-\frac{1}{2n\ln n}\right)^{-n} \leqslant \exp\left(\frac{1}{\ln n}\right) \leqslant 1+\frac{2}{\ln n}.$$

$\sqrt{\frac{1-\lambda^2(1-\delta)^2\sin^2(2\phi)}{1-\sin^2(2\phi)}}$ при фиксированном R стремится к константе. Аналогично ведёт себя γ'. Лишь $\beta \sim \frac{\lambda\sin\phi}{4n\ln n}$. То есть всё, кроме λ^{-n}, ведёт себя как $n\ln n$. Тогда

$$\tau(S^n_R,\mathcal{F}') \leqslant (\lambda^{-1}+o(1))^n.$$

4.4 Замечание о радиусах из диапазона $\frac{1}{2} \leqslant R \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2}$

Пусть $\frac{1}{2} \leqslant R \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2}$. Рассматривая систему уравнений из раздела 3.1, несложно заметить, что для любого $0 < \phi < \pi/4$, положив $\lambda = \frac{1}{2R\sin 2\phi} - \varepsilon$ (ε — произвольное положительное число) мы получим множество Ψ' без расстояния 1. Плотность этого множества асимптотически максимизируется при $\phi \to \pi/4$. (По-видимому, вся конструкция работает и при $\phi = \pi/4$. Однако, в этом случае при оценке плотности получатся несобственные интегралы, и нужно будет произвести более тонкую оценку их сходимости. Мы не будем уделять этому внимание.) Получаем, что в этом случае

$$\chi(S^n_R) \leqslant (2R+o(1))^n.$$

Это неудивительно: при $\phi = \pi/4$ каждое из множеств ψ'_x лежит в шапочке $C(x,\gamma)$, которая в этом случае является шапочкой диаметра почти 1. То есть, оценка Роджерса получается как раз из покрытия сферы такими шапочками. При этом известно, что на сферу нельзя упаковать экспоненциальное количество шапочек $C(x,\pi/4)$ (можно лишь линейное): смотрите, например, [3]. То есть, наше множество Ψ' в этом случае представляет собой объединение линейного по n числа кусков, плотность каждого из которых не превосходит плотности шапочки $C(x,\gamma)$. Ясно, что это не может дать экспоненциального улучшения оценки Роджерса. Также заметим, что из нижних асимптотических оценок плотности упаковки шапочек (см. также [3]) следует, что при больших n невозможно построить множество точек X таким образом, чтобы $\bigcup\limits_{x\in X} C(x,\phi)$ было бы упаковкой, а $\bigcup\limits_{x\in X} C(x,\mu\phi)$, где $\mu < 2$, — покрытием. Из всего этого следует, что для данных значений R, используя подобную конструкцию множества без расстояния 1, по-видимому, нельзя улучшить оценку Роджерса.

5 Доказательство теоремы 2

Выберем малое ε. Пусть λ_0, ϕ есть решения системы уравнений 4.1. Положим $\lambda = \lambda_0 - \varepsilon$ и построим множество Ψ', соответствующее этому λ. Заметим, что для некоторого $\delta_{\varepsilon,R} > 0$ диаметр любого ψ'_x меньше $1-\delta_{\varepsilon,R}$, а расстояние между разными ψ'_x и ψ'_y больше $1+\delta_{\varepsilon,R}$. Ясно, что если для некоторых точек $a, b \in \mathbb{R}^{n+1}$ верно, что расстояние между ними меньше $1-\delta$ или больше $1+\delta$, то расстояние между любыми двумя точками из их $\delta/2$-окрестностей не равно 1.

Сопоставим этому покрытию раскраску. Положим $R_1 = R$, а $R_2 = R_1 - \frac{\delta_{\varepsilon,R_1}}{2}$. Мы можем покрыть $S^n_{R_1}$ не более, чем $(x(R_1)+\varepsilon+o(1))^n$ копиями Ψ'. Рассмотрим сферический пояс $D_1 = \{x \in B^{n+1}_{R_1} | x \notin B^{n+1}_{R_2}\}$. Продолжим нашу раскраску на D_1: точку $x \in D_1$ покрасим в тот же цвет, что и точка пересечения луча Ox и сферы $S^n_{R_1}$. Это раскраска D_1 без расстояния 1. Теперь аналогично рассмотрим для того же ε соответствующее множество Ψ' на сфере $S^n_{R_2}$. Положим $R_3 = R_2 - \frac{\delta_{\varepsilon,R_2}}{2}$, $D_2 = \{x \in B^{n+1}_{R_2} | x \notin B^{n+1}_{R_3}\}$ и построим таким же образом раскраску D_2 без расстояния 1 в не более, чем $(x(R_2)+\varepsilon+o(1))^n$ цветов (все цвета возьмём новые). Продолжим этот процесс. Если показать, что δ_{ε,R_k} не стремятся к 0, то рано или поздно мы дойдём до $R_k < 1/2$. Все точки $B^{n+1}_{R_k}$ мы покрасим в 1 новый цвет. Мы можем выбирать $\delta_{\varepsilon,r}$ непрерывно по r. Тогда функция $\delta_{\varepsilon,r}$ на отрезке $[1/2, R]$ принимает минимальное значение больше 0. Следовательно, δ_{ε,R_k} и правда не стремится к 0.

Теперь заметим, что, во-первых, на отрезке $[1/2, R]$ функция $x(r)$ монотонно убывает, поэтому в итоге мы использовали не более $k(x(R)+\varepsilon+o(1))^n$ цветов. Во-вторых, k зависит только от R и ε и не зависит от n. Поэтому, мы получаем асимптотическую оценку

$$\chi(B^{n+1}_R) \leqslant (x(R)+\varepsilon+o(1))^n.$$

В силу произвольности ε отсюда вытекает

$$\chi(B^{n+1}_R) \leqslant (x(R)+o(1))^n.$$

Автор выражает благодарность А. М. Райгородскому и Н. Г. Мощевитину за внимание к этой работе, а также А. Б. Купавскому и Д. Черкашину за полезные обсуждения.

Библиография

[1] S. Artstein-Avidan, O. Raz, *Weighted covering numbers of convex sets*, Adv. Math. **227** (2011), no. 1, 730-–744.

[2] S. Artstein-Avidan, B. A. Slomka, *On weighted covering numbers and the Levi–Hadwiger conjecture*, arXiv:1310.7892 [math].

[3] K. Böröczky Jr., *Finite packing and covering*, Cambridge University Press, 2004.

[4] K. Böröczky Jr. and G. Wintsche, *Covering the sphere by equal spherical balls*, Discrete and computational geometry, (2003), 235–251.

[5] G.J. Butler, *Simultaneous packing and covering in Euclidean space*, Proceedings of the London Mathematical Society, **s3–25**:4 (1972), 721–735.

[6] N. G. de Bruijn, P. Erdős, *A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. **54** (1951), no. 13, 369–373.

[7] P. Erdős, C. A. Rogers, *Covering space with convex bodies*, Acta Arith. **7** (1961/1962), 281–285.

[8] P. Erdős, R. L. Graham, *Problem proposed at the 6th Hungarian combinatorial conference*, Eger, July 1981.

[9] D.G. Larman, C.A. Rogers, *The realization of distances within sets in Euclidean space*, Mathematika, **19** (1972), 1–24.

[10] L. Lovász, *On the ratio of optimal integral and fractional covers*, Discrete Math., **13** (1975), no. 4, 383–390.

[11] L. Lovász, *Self-dual polytopes and the chromatic number of distance graphs on the sphere*, Acta Sci. Math. **45** (1983), 317—323.

[12] J. Matoušek, *Lectures on discrete geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 212, Springer-Verlag, New York, 2002.

[13] M. Naszodi, *On some covering problems in geometry*, Proceedings of the American Mathematical Society, **144** (2016), 3555–3562.

[14] M. Naszodi, *Flavors of translative coverings*, arXiv:1603.04481 [math].

[15] J. Pach and D. Pálvölgyi, *Unsplittable coverings in the plane*, arXiv: 1310.6900 [math].

[16] R.I. Prosanov, *A new proof of the Larman–Rogers upper bound for the chromatic number of the Euclidean space*, arXiv:1610.02846 [math].

[17] R.I. Prosanov, *Upper bounds of the chromatic numbers of the Euclidean spaces with forbidden Ramsey sets*, to appear.

[18] A.M. Raigorodskii, *On the chromatic number of a space*, Russian Mathematical Surveys, **55** (2000), no.2, 351–352.

[19] A. M. Raigorodskii, *Borsuk's problem and the chromatic numbers of some metric spaces*, Russian Mathematical Surveys, **56** (2001), no. 1, 103–139.

[20] A.M. Raigorodskii, *On the chromatic numbers of spheres in* $\mathbb{R}^n$, Combinatorica, **32** (2012), no. 1, 111–123.

[21] A.M. Raigorodskii, *Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters*, Thirty Essays on Geometric Graph Theory, J. Pach ed., Springer, 2013, 429–460.

[22] A.M. Raigorodskii, *Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters*, "Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics", AMS, Contemporary Mathematics, **625** (2014), 93–109.

[23] A. Soifer, *The mathematical coloring book: mathematics of coloring and the colorful life of its creators*, Springer Science and Business Media, 2008.