ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗО-
ВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА"

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

специалиста

О мере иррациональности значения дзета функции Римана в точке 2

Студент 605 группы

Борин Дмитрий

Научный руководитель:
проф. доктор.ф.-м.н.
Нестеренко Юрий
Валентинович

Москва
2019 г.

1 Введение

Мерой иррациональности $\mu(\alpha)$ вещественного числа α называется точная верхняя грань множества чисел κ, для которых неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < q^{-\kappa}$$

имеет бесконечно много решений в рациональных числах p/q.

На сегодняшний день установлено достаточно много оценок мер иррациональности значений аналитических функции. В том числе большое внимание продолжает уделяться оценкам меры иррациональности значений дзета-функции Римана

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}, \tag{1}$$

в целых положительных точках s. Изучением свойств таких рядов занимался еще Эйлер. Он первый доказал равенство $\zeta(2) = \pi^2/6$ и более общее соотношение для четных значений

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k},$$

которое указывает на тесную связь (1) с π и B_k – числами Бернулли, определяемыми с помощью производящей функции

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k} \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

Первую оценку $\mu(\pi) \leqslant 30$ получил Малер [1]. Впоследствии её улучшили Миньотт [2], Чудновский [12], Хата [6]-[8] и В.Х. Салихов [13], получив лучший на данный момент результат $\mu(\pi) \leqslant 7.606308...$.

В 1978г. была впервые доказана иррациональность значения $\zeta(3)$. Р. Апери нашел рациональные приближения к $\zeta(3)$, где обе последовательности u_n, v_n удовлетворяют одному и тому же реккурентному уравнению

$$(n+1)^3 u_{n+1} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5)u_n + n^3 u_{n-1} = 0,$$

с начальными условиями $v_0 = 0,\ \ v_1 = 6,\ \ u_0 = 1,\ \ u_1 = 5$. Та же техника позволила применить метод для $\zeta(2)$ и получить в работе [14] оценку $\zeta(2) \leqslant 11.85078...$

Ф.Бейкерс нашел иное доказательства этого факта [15], рассматривая кратный интеграл

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy} dxdy = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)^n \frac{dxdy}{1-xy}, \qquad (2)$$

где $P_n(x) = \frac{d^n}{dt^n}(x^n(1-x)^n)$ - многочлен Лежандра. Позже было обнаружено, что обе конструкции (2) и из [14] дают одну и ту же последовательность рациональных приближений к $\zeta(2)$.

Хата улучшил оценку, рассматривая интеграл (2) в более общем виде, используя замену переменных

$$\tau(x,y) = \left(1-xy, \frac{1-x}{1-xy}\right),$$

которая переводит интеграл в себя, но меняет коэффициенты в линейной форме. Позже эта идея была развита в работах [9], [10], что привело к оценке

$$\mu(\zeta(2)) \leqslant 5.441243...$$

Этот результат оставался лучшим долгое время.

В 2013г. В. Зудилин обнаружил две различные интегральные конструкции, которые дают одинаковые рациональные приближения к $\zeta(2)$. Их совместное использование позволило более точно определить арифметические свойства линейных приближений, и получить лучшую на сегодняшний день оценку

$$\mu(\zeta(2)) \leqslant 5.0954...$$

К этому моменту стали чаще применяться гипергеометрические интегралы, вместо кратных вещественных. В частности, это обусловленно применением метода перевала для нахождения асимптотики, вместо теоремы Пуанкаре для реккурентных уравнений, которые хуже поддаются обобщениям. В работе [3] доказательство совпадения двух интегральных конструкций происходит сравнением соответствующих реккурентных уравнений, коэффициенты которых есть многочлены степени 64.

Данная дипломная работа посвящена обобщению конструкций работы [3], в надежде установить функциональную связь между интегральными формами. Попутно мы демонстрируем вывод оценки

$$\mu(\zeta(2)) \leqslant 5.20514736..,$$

с использованием только одного интеграла из [3].

2 Основная конструкция

Упорядоченным наборам целочисленных параметров $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, удовлетворяющих условиям

$$b_1, b_2, b_3 \leqslant a_1, a_2, a_3, a_4 < b_4,$$

$$d = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (b_1 + b_2 + b_3 + b_4) > 0, \tag{3}$$

поставим в соответствие рациональную функцию

$$R(\mathbf{a}, \mathbf{b}; t) = \Pi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \frac{\Gamma(t + a_1)\Gamma(t + a_2)\Gamma(t + a_3)\Gamma(t + a_4)}{\Gamma(t + b_1)\Gamma(t + b_2)\Gamma(t + b_3)\Gamma(t + b_4)}, \tag{4}$$

где

$$\Pi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{(b_4 - a_4 - 1)!}{(a_1 - b_1)!(a_2 - b_2)!(a_3 - b_3)!}$$

Эта функция имеет полюсы при $t = -k$, где $k = a_4, a_4 + 1, ..., b_4 - 1$, нули первого порядка при $t = -l$, где $l = b_1, b_1 + 1, ..., a_3 - 1$, и нули второго порядка при $t = -l$, где $l = b_2, b_2 + 1, ..., a_2 - 1$.

Разложение функции $R(t)$ в сумму простейших дробей имеет вид

$$R(t) = \sum_{k=a_4}^{b_4-1} \frac{A_k}{t + k} + P(t), \tag{5}$$

где $P(t)$ - многочлен степени d.

Наконец, определим величину

$$r(\mathbf{a}, \mathbf{b}; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \left(\frac{\pi}{\sin \pi\zeta}\right)^2 R(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \zeta) z^{-\zeta} d\zeta, \tag{6}$$

где C - произвольное число из интервала $-a_2 < C < 1-b_2$, и мы полагаем $z^{-\zeta} = e^{-\zeta \log z}$. Ветвь логарифма $\log z = \log |z| + i \arg z$ всегда выбирается так, что $|\arg z| < 2\pi$.

Лемма 1. *Обозначим*

$$I_1(l; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \left(\frac{\pi}{\sin \pi\zeta}\right)^2 \frac{z^{-\zeta}}{\zeta + l} d\zeta, \tag{7}$$

тогда для любого натурального l *и* $|z| \geqslant 1$ *выполняется*

$$z^{-l} I_1(l; z) = \mathrm{Li}_2(1/z) + \log z \log\left(1 - \frac{1}{z}\right) - \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{z^j} \left(\frac{\log z}{j} + \frac{1}{j^2}\right),$$

Доказательство. Пусть $\Psi(\zeta)$ обозначает подынтегральную функцию в (7). Так как

$$\left|\frac{1}{\sin\zeta}\right| \ll e^{-|t|}, \qquad |z^{-\zeta}| = e^{-\sigma\log|z|+t\arg(z)},$$

где $\zeta = \sigma + it$ и $|t| \geqslant 1$ в первом неравенстве, получим

$$|\Psi(\zeta)| \ll \frac{e^{-|t|(2\pi-|\arg(z)|)}}{|\zeta+l|}e^{-\sigma\log|z|}$$

Отсюда следует абсолютная сходимость интеграла I_1 при любой $z \neq 0$.

Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ с вершинами:

$$A = \left(\frac{1}{2}, N\right), \qquad B = \left(\frac{1}{2}+N, N\right),$$

$$C = \left(\frac{1}{2}+N, -N\right), \qquad D = \left(\frac{1}{2}, -N\right),$$

Интеграл от функции $\Psi(\zeta)$ по этому прямоугольнику равен сумме вычетов функции $\Psi(\zeta)$ в целых точках на отрезке $(1/2; N+1/2)$. Покажем, что интегралы от функции $\Psi(\zeta)$ по отрезкам AB, BC и CD стремятся к нулю с ростом N.

На отрезках AB и CD имеем $|t| = N$ и $\sigma > 1/2$, откуда следует оценка

$$|\Psi(\zeta)| \ll \frac{e^{-N(2\pi-|\arg(z)|)}}{\sqrt{N^2+(l+1/2)^2}}e^{-1/2\log|z|}$$

Из отрезка BC, на котором $\sigma = N+1/2$, выделим подотрезок с центром в точке $(N+1/2; 0)$ и длиной $2\sqrt{N}$, таким образом ограничивая $|t| < \sqrt{N}$, чтобы получить

$$|\Psi(\zeta)| \ll \frac{|z|^{-N-1/2}}{N+l+1/2}$$

Отрезок интегрирования на порядок меньше знаменателя, что позволяет заключить о стремлении интеграла по этому подотрезку к нулю. На оставшемся участке BC имеем $|t| > \sqrt{N}$, что приводит нас к оценке

$$|\Psi(\zeta)| \ll \frac{e^{-\sqrt{N}(2\pi-|\arg(z)|)}}{\sqrt{N+(N+l+1/2)^2}}|z|^{-N-1/2}$$

Интегрируя эти неравенства по соответствующим отрезкам, получаем нужное утверждение о стремлении интегралов к нулю.

Устремляя N к бесконечности, получаем

$$I_1(l;z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Res}_{\zeta=k}\left(\left(\frac{\pi}{\sin\pi\zeta}\right)^2 \frac{z^{-\zeta}}{\zeta+l}\right)$$

В окрестности точки k справедливы асимптотические представления

$$\left(\frac{\pi}{\sin\pi\zeta}\right)^2 = \frac{1}{(\zeta-k)^2} + O\left(1\right),$$

$$\frac{1}{\zeta+l} = \frac{1}{k+l} - \frac{1}{(k+l)^2}(\zeta-k) + O\left((\zeta-k)^2\right),$$
$$z^{-\zeta} = z^{-k}(1-(\zeta-k)\log z + O\left((\zeta-k)^2\right).$$

Поэтому,

$$\left(\frac{\pi}{\sin\pi\zeta}\right)^2 \frac{z^{-\zeta}}{\zeta+l} = \frac{z^{-k}}{(\zeta-k)^2(k+l)} + \frac{z^{-k}}{(\zeta-k)}\left(\frac{1}{(k+l)^2} + \frac{\log z}{k+l}\right) + O\left(1\right)$$

$$I_1(l;z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k}\left(\frac{1}{(k+l)^2} + \frac{\log z}{k+l}\right) = z^l \sum_{k=l+1}^{\infty} z^{-k}\left(\frac{1}{k^2} + \frac{\log z}{k}\right)$$

Последний ряд разбивается в терминах полилогарифма $\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}$ следующим образом:

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} z^{-k}\left(\frac{1}{k^2} + \frac{\log z}{k}\right) = \mathrm{Li}_2(1/z) + \log(z)\mathrm{Li}_1(1/z) - \sum_{k=1}^{l} z^{-k}\left(\frac{1}{k^2} + \frac{\log z}{k}\right)$$

Остается воспользоваться равенством

$$\mathrm{Li}_1(1/z) = \log\left(1 - \frac{1}{z}\right),$$

что приводит нас к утверждению леммы. $\square$

Лемма 2. *Пусть* $Q_n(x) = \prod_{j=1}^{n}(x-j)$ *- полином степени* $n \geqslant 0$,

$$I_2(n;z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\left(\frac{\pi}{\sin\pi\zeta}\right)^2 Q_n(\zeta)z^{-\zeta}d\zeta,$$

тогда при $z \neq 0$ *верно представление*

$$I_2(n;z) = (-1)^n\Gamma(n+1)\int_0^1 \frac{(1-\xi)^n}{z+\xi(1-z)}d\xi,$$

в частности

$$I_2(n;1) = (-1)^n\frac{\Gamma(n+1)}{n+1},$$

$$I_2(n;z) = (-1)^n\frac{\Gamma(n+1)}{n+1}z^{-1}{}_2F_1\left[\begin{matrix}n+1 & 1\\ n+2 & \end{matrix};\frac{z-1}{z}\right],$$

для $\left|\frac{z-1}{z}\right| < 1$.

Доказательство. Применение равенства $\Gamma(\zeta)\Gamma(1-\zeta) = \frac{\pi}{\sin\pi\zeta}$ следующим образом

$$\left(\frac{\pi}{\sin\pi\zeta}\right)^2 = (-1)^n\Gamma(\zeta)\Gamma(1-\zeta)\Gamma(\zeta-n)\Gamma(1-\zeta+n),$$

приводит подынтегральное выражение к виду

$$(-1)^l\Gamma(\zeta)^2\Gamma(1-\zeta)\Gamma(1-\zeta+n)z^{-\zeta}$$

Используем для слагаемых $\Gamma(\zeta)$ и $\Gamma(1-\zeta+n)$ их интегральное представление в области $\Re\zeta > 0$

$$\Gamma(\zeta) = \int_0^\infty x^{\zeta-1}e^{-x}dx,$$

чтобы получить исходный интеграл в форме

$$\int_0^\infty\int_0^\infty x^{-1}y^n e^{-x-y}\left(\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\Gamma(\zeta)\Gamma(1-\zeta)\left(\frac{y}{zx}\right)^\zeta d\zeta\right)dxdy$$

Сделав линейный сдвиг на $1/2$ в контурном интеграле и используя базовую формулу для интеграла Меллина-Барнса

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\Gamma(\lambda+\zeta)\Gamma(-\zeta)\frac{Y^\zeta}{X^{\lambda+\zeta}}d\zeta = \frac{\Gamma(\lambda)}{(X+Y)^\lambda},$$

получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\left(\frac{\pi}{\sin\pi\zeta}\right)^2 Q_n(\zeta)z^{-\zeta}d\zeta=(-1)^n\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{y^ne^{-x-y}}{x+zy}dxdy$$

Остается сделать замену $x=\eta\zeta,\ y=\eta(1-\xi)$, чтобы разделить переменные в кратном интеграле

$$\int_0^\infty\eta^ne^{-\eta}d\eta\int_0^1\frac{(1-\xi)^n}{z+\xi(1-z)}d\xi.$$

Последнее представление получается из соотношения

$$B(b,c-b)_2F_1\left[\begin{matrix}a\ b\\ c\end{matrix};z\right]=\int_0^1 y^{b-1}(1-y)^{c-b-1}(1-zy)^{-a}dx,\quad \Re(c)>\Re(b)>0,$$

что завершает доказательство. □

В дальнейшем будем использовать обозначение

$$c_1=\max\{a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3,b_4-a_2-1\},\quad c_2=\max\{d+1,b_4-a_2-1\}$$

Следствие 1. *Справедливо представление*

$$r(\mathbf{a},\mathbf{b};1)=q(\mathbf{a},\mathbf{b})\zeta(2)-p(\mathbf{a},\mathbf{b}),$$

где $q(\mathbf{a},\mathbf{b})\in\mathbb{Z},\ \ D_{c_1}D_{c_2}p(\mathbf{a},\mathbf{b})\in\mathbb{Z}$

Доказательство. Выберем прямую интегрирования $C=1/2-a_2$. Запишем разложение функции $R(t)$ на простейшие в виде

$$R(t)=\sum_{k=a_2}^{b_4-1}\frac{A_k}{t+k}+\sum_{j=0}^{d}\frac{\lambda_j}{j!}Q_j(t+a_2),$$

тогда

$$r(\mathbf{a},\mathbf{b};z)=\sum_{k=a_2}^{b_4-1}A_kI_1(k-a_2;z)+\sum_{j=0}^{d}\frac{\lambda_j}{j!}I_2(j;z)$$

В соотвествии с леммой 1 и 2 в точке $z=1$ верны соотношения

$$I_1(k-a_2;1)=\zeta(2)-\sum_{i=1}^{k-a_2}\frac{1}{i^2},$$

$$I_2(j;1) = (-1)^j \frac{j!}{j+1},$$

поэтому

$$r(\mathbf{a},\mathbf{b};1) = \zeta(2) \sum_{k=a_2}^{b_4-1} A_k - \sum_{k=a_2}^{b_4-1} \sum_{i=0}^{k-a_2} \frac{A_k}{i^2} + \sum_{j=0}^{d} \frac{(-1)^j \lambda_j}{j+1}, \tag{8}$$

Коэффициенты A_k находятся явно из соотношения

$$A_k = (R(t)(t+k))\Big|_{t=-k} = (-1)^{d+b_4+k} \binom{k-b_1}{k-a_1} \binom{k-b_2}{k-a_2} \binom{k-b_3}{k-a_3} \binom{b_4-a_4-1}{k-a_4},$$

что влечёт включение $A_k \in \mathbb{Z}$. Теперь покажем, что $D_c b_j \in \mathbb{Z}$, где $c = \max\{a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3\}$. Для этого запишем

$$P(-l) = \frac{d}{dt}(P(t)(t+l))\Big|_{t=-l} = \frac{d}{dt}\left(R(t)(t+l) - \sum_{k=a^4}^{b^4-1} \frac{A_k}{t+k}(t+l)\right)\Bigg|_{t=-l} =$$

$$\frac{dR_{(3)}(t)}{dt}\Big|_{t=-l} (-1)^{l-a_4} \binom{b_4-a_4-1}{l-a_4} + \sum_{k=a_2}^{b_4-1} (-1)^{k-a_4} \binom{b_4-a_4-1}{b_4-k} \frac{R_{(3)}(-l) - R_{(3)}(-k)}{k-l},$$

где мы обозначили

$$R_{(3)}(t) = \frac{\prod_{j=b_1}^{a_1-1}(t+j)}{(a_1-b_1)!} \frac{\prod_{j=b_2}^{a_2-1}(t+j)}{(a_2-b_2)!} \frac{\prod_{j=b_3}^{a_3-1}(t+j)}{(a_3-b_3)!}$$

Остается заметить, что для любых $l, k \in \mathbb{Z}$, $l \neq k$ выполняются включения

$$D_c \frac{dR_{(3)}(t)}{dt}\Big|_{t=-l} \in \mathbb{Z}, \quad D_c \frac{R_{(3)}(-l) - R_{(3)}(-k)}{k-l} \in \mathbb{Z}$$

Для этого сначала прямым вычислением проверим включения для функции

$$R_{(1)}(t) = \frac{\prod_{j=b_1}^{a_1-1}(t+j)}{(a_1-b_1)!} \in \mathbb{Z},$$

Затем рассмотрим $R_{(2)}(t) = R_{(1)}(t)\tilde{R}_{(1)}(t)$

$$(R_{(2)}(t))\Big|_{t=k} = R_{(1)}(k)\tilde{R}_{(1)}(k) \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{d}{dt}(R_{(2)}(t))\Big|_{t=k} = R_{(1)}(k)\frac{d}{dt}\tilde{R}_{(1)}(t))\Big|_{t=k} + \tilde{R}_{(1)}(k)\frac{d}{dt}R_{(1)}(t))\Big|_{t=k}$$

$$\frac{R_{(2)}(k)-\tilde{R}_{(2)}(l)}{k-l} = \frac{R_{(1)}(k)-R_{(1)}(l)}{k-l}\tilde{R}_{(1)}(k) + \frac{\tilde{R}_{(1)}(k)-\tilde{R}_{(1)}(l)}{k-l}R_{(1)}(l)$$

Для $R_{(3)}(t)$ теперь это получается аналогично.

Возвращаясь к записи (8), группируя найденные включения, получаем утверждение леммы. □

3 Асимптотика и арифметика линейных форм

Данный раздел посвящен описанию арифметических и асимптотических свойств линейной конструкции $r(\mathbf{a}, \mathbf{b}; 1)$. Методы анализа поведения схожих последовательностей подробно описаны в работах [3], [5]. Они базируются на изыскании точек перевала в применении к методу Лапласа. Альтернативный способ нахождения асимптотического поведения таких последовательностей связан с применением теоремы Пуанкаре для рекурентных уравнений (см. например [4]). Однако, в нашем случае рекурентные уравнения будут выглядет очень громоздко, поэтому мы стараемся избегать этого подхода.

Введем обозначения

$$\begin{gathered}
a_1 = \alpha_1 n + 1, \quad a_2 = \alpha_2 n + 1, \quad a_3 = \alpha_3 n + 1, \quad a_4 = \alpha_4 n + 1, \\
b_1 = \beta_1 n + 1, \quad b_2 = \beta_2 n + 1, \quad b_3 = \beta_3 n + 1, \quad b_4 = \beta_4 n + 2, \qquad (9) \\
h(\tau) = \sum_{i=1}^{4} \left(\alpha_i \log(\tau - \alpha_i) - \beta_i \log(\tau - \beta_i) - (\alpha_i - \beta_i)\log|\alpha_i - \beta_i|\right)
\end{gathered}$$

В этих терминах будем использовать также запись

$$r_n = r(\mathbf{a}, \mathbf{b}; 1), \quad q_n = q(\mathbf{a}, \mathbf{b}; 1), \quad p_n = p(\mathbf{a}, \mathbf{b}; 1).$$

Лемма 3. ([3], Лемма 4.6) Пусть уравнение

$$(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)(t-\alpha_3)(t-\alpha_4) = (t-\beta_1)(t-\beta_2)(t-\beta_3)(t-\beta_4)$$

имеет один вещественный корень t_1 и пару комплексно-сопряженных корней $t_0, \bar{t}_0$, тогда

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log|r_n|}{n} = \Re h(t_0), \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log|q_n|}{n} = \Re h(t_1)$$

Лемма 4. ([3], Лемма 4.7) Обозначим

$$\phi(x)=\min_{0\leqslant y<1}\left(\sum_{i=0}^{3}\left(\lfloor y-\beta_i x\rfloor-\lfloor y-\alpha_i x\rfloor-\lfloor(\alpha_i-\beta_i)x\rfloor\right)\right.$$
$$\left.-\lfloor y-\alpha_4 x\rfloor-\lfloor\beta_4 x-y\rfloor+\lfloor(\beta_4-\alpha_4)x\rfloor\right),$$

$$\Delta_n=\prod_{p<c_1}p^{\phi(\frac{n}{p})}$$

В приведенных обозначениях справедливы включения

$$\Delta_n^{-1}q_n\in\mathbb{Z},\quad \Delta_n^{-1}D_{c_1}D_{c_2}p_n\in\mathbb{Z}$$

Кроме того,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\Delta_n}{n}=\int_0^1\phi(x)d\psi(x)-\int_0^{1/\gamma_1}\frac{\phi(x)}{x^2}dx, \tag{10}$$

где $\psi(x)$ - логарифмическая производная гамма-функции, $\gamma_1=c_1/n$.

Доказательство. Используя формулу вхождения простого в факториал $\nu_p(n!)=\sum_p\left[\frac{n}{p^k}\right]$, находим оценку для коэффициента A_k

$$\nu_p(A_k)\geqslant\sum_{i=1}^{3}\left(\left\lfloor\frac{k-b_i}{p}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{k-a_i}{p}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{a_i-b_i}{p}\right\rfloor\right)+\left\lfloor\frac{b_4-a_4}{p}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{k-a_4}{p}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{b_4-k}{p}\right\rfloor,$$

подставляя значения параметров в виде (9) и используя неравенство для произвольных целых ϱ_k

$$\nu_p\left(\sum_{k=a_4}^{b_4-1}\varrho_k A_k\right)\geqslant\min_{a_4\leqslant k\leqslant b_4-1}\nu_p(A_k)\geqslant\min_{0\leqslant y<1}\phi(x),$$

где мы обозначили $x=\frac{n}{p}$ и минимизировали по $y=\frac{k-1}{p}$.

Соотношение (10) является следствием леммы Хата [док-во см. [11], теорема 4.3] о поведении в среднем сумм вида

$$\frac{1}{n}\sum_{\substack{p>\sqrt{Cn}\\ \{n/p\}\in[u,v)}}\log p=\int_u^v d\psi(x)+o(1).$$

□

Лемма 5. ([6], Лемма 2.1) Пусть α - действительное иррациональное число и последовательность пар целых чисел q_n, p_n удовлетворяет условиям

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log|q_n| = \sigma > 0, \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log|q_n\alpha - p_n| \leqslant -\tau, \quad \tau > 0.$$

Тогда показатель иррациональности числа α удовлетворяет неравенству

$$\mu(\alpha) \leqslant 1 + \frac{\sigma}{\tau}.$$

Теорема 1. *Показатель иррациональности числа* $\zeta(2) = \pi^2/6$ *удовлетворяет неравенству*

$$\mu(\zeta(2)) \leqslant 5.20514736...$$

Доказательство. Выберем параметры следующим образом

$$a_1 = 5n+1, \quad a_2 = 6n+1, \quad a_3 = 7n+1, \quad a_4 = 8n+1,$$

$$b_1 = n+1, \quad b_2 = 2n+1, \quad b_3 = 3n+1, \quad b_4 = 13n+2.$$

Тогда $c_1 = c_2 = 7n,\ d = 7n-1$, и в соответствии с Леммой 3

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log|r_n|}{n} = -C_0 = -12.18263246...,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log|q_n|}{n} = C_1 = 19.80176959635...,$$

Функция $\phi(x)$ будет определяться следующим образом

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[\frac{1}{7}; \frac{1}{5}\right) \cup \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{5}\right) \cup \left[\frac{5}{8}; \frac{2}{3}\right) \cup \left[\frac{4}{5}; \frac{7}{8}\right) \\ 2, & x \in \left[\frac{2}{5}; \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{3}{5}; \frac{5}{8}\right) \cup \left[\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right) \\ 3, & x \in \left[\frac{2}{5}; \frac{1}{2}\right) \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Поэтому, используя Лемму 4, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \Delta_n}{n} = 7.96213152...$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log D_{7n}^2\Delta_n^{-1}}{n}=C_2=14-7.96213152...=6.03786847...$$

Остается применить Лемму 5, чтобы найти

$$\mu(\zeta(2))\leqslant\frac{C_0+C_1}{C_0-C_2}=5.20514736...$$

□

4 Вторая конструкция

На этот раз будем рассматривать рациональную функцию

$$\hat{R}(\hat{\mathbf{a}},\hat{\mathbf{b}};t)=\hat{\Pi}(\hat{\mathbf{a}},\hat{\mathbf{b}})\frac{\Gamma(2t+\hat{a}_0)\Gamma(t+\hat{a}_1)\Gamma(t+\hat{a}_2)\Gamma(t+\hat{a}_3)}{\Gamma(2t+\hat{b}_0)\Gamma(t+\hat{b}_1)\Gamma(t+\hat{b}_2)\Gamma(t+\hat{b}_3)}, \tag{11}$$

$$\Pi(\hat{\mathbf{a}},\hat{\mathbf{b}})=\frac{(b_3-a_3-1)!(b_2-a_2-1)!}{(a_0-b_0)!(a_1-b_1)!},$$

с целочисленными упорядоченными параметрами $\hat{\mathbf{a}}=(\hat{a}_0,\hat{a}_1,\hat{a}_2,\hat{a}_3)$, $\hat{\mathbf{b}}=(\hat{b}_0,\hat{b}_1,\hat{b}_2,\hat{b}_3)$ и $\hat{a}_0^*=\min\{\hat{a}_0,2\hat{a}_2\}$, удовлетворяющими условиям

$$\frac{1}{2}\hat{b}_0,\hat{b}_1\leqslant\frac{1}{2}\hat{a}_0,\hat{a}_1,\hat{a}_3<\hat{b}_2,\hat{b}_3,$$

$$\hat{a}_0+\hat{a}_1+\hat{a}_2+\hat{a}_3=\hat{b}_0+\hat{b}_1+\hat{b}_2+\hat{b}_3-2. \tag{12}$$

Эта функция имеет полюсы при $t=-k$, где $\hat{a}_2\leqslant k\leqslant\hat{b}_3-1$, двойные полюсы при $t=-k$, где $\hat{a}_3\leqslant k\leqslant\hat{b}_2-1$, и нули при $t=-l/2$, где $\hat{b}_0\leqslant l\leqslant\hat{a}_0^*-1$. Кроме того, соотношение (12) означает, что $\hat{R}(t)=O(1/t^2)$ при $t\to\infty$.

Разложение функции $\hat{R}(t)$ в сумму простейших дробей имеет вид

$$\hat{R}(t)=\sum_{k=\hat{a}_3}^{\hat{b}_2-1}\frac{B_k}{(t+k)^2}+\sum_{k=\hat{a}_2}^{\hat{b}_3-1}\frac{C_k}{t+k}, \tag{13}$$

где

$$B_k=(\hat{R}(t)(t+k)^2)\Big|_{t=-k},\quad C_k=\frac{d}{dt}(\hat{R}(t)(t+k)^2)\Big|_{t=-k},$$

$$-\sum_{k=\hat{a}_2}^{\hat{b}_3-1} C_k = \mathrm{Res}_{t=\infty}\hat{R}(t) = 0, \tag{14}$$

согласно теореме о сумме вычетах.

Аналогично определим величину

$$\hat{r}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}; z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{\pi}{\sin 2\pi\zeta}\, \hat{R}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}; \zeta) z^{-\zeta} d\zeta,$$

где C выбирается произвольным из интервала $-\hat{a}_0^* < C < 1 - \hat{b}_0$.

Лемма 6. *Обозначим*

$$\hat{I}_0(l; z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{\pi}{\sin 2\pi\zeta}\frac{z^{-\zeta}}{(l+\zeta)^2} d\zeta, \quad \hat{I}_1(l; z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{\pi}{\sin 2\pi\zeta}\frac{z^{-\zeta}}{l+\zeta} d\zeta,$$

тогда для любого целого l и $|z| \geqslant 1$ выполняется

$$-\frac{z^{-l}}{2}\hat{I}_0(l; z) = \mathrm{Li}_2(-1/\sqrt{z}) - \sum_{i=1}^{2l-\hat{a}_0^*} \frac{(-1)^i}{i^2(\sqrt{z})^i}, \quad -z^{-l}\hat{I}_1(l; z) = \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{z}}\right) - \sum_{i=1}^{2l-\hat{a}_0^*} \frac{(-1)^i}{i(\sqrt{z})^i}$$

Доказательство. Действуя аналогично доказательству леммы 1, находим

$$\hat{I}_0(l; z) = -\sum_{m=1-\hat{a}_0^*}^{\infty} \mathrm{Res}_{\zeta=m/2}\left(\frac{\pi}{\sin 2\pi\zeta}\frac{z^{-\zeta}}{(l+\zeta)^2}\right) = \sum_{m=1-\hat{a}_0^*}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} z^{-m/2}}{2(l+\frac{m}{2})^2}$$

$$= -2z^l \sum_{m=1-\hat{a}_0^*+2l}^{\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^m \frac{1}{m^2},$$

$$\hat{I}_1(l; z) = -\sum_{m=1-\hat{a}_0^*}^{\infty} \mathrm{Res}_{\zeta=m/2}\left(\frac{\pi}{\sin 2\pi\zeta}\frac{z^{-\zeta}}{l+\zeta}\right) = \sum_{m=1-\hat{a}_0^*}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} z^{-m/2}}{2(l+\frac{m}{2})}$$

$$= -z^l \sum_{m=1-\hat{a}_0^*+2l}^{\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^m \frac{1}{m}.$$

Остается воспользоваться

$$\mathrm{Li}_1(-1/\sqrt{z}) = \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{z}}\right),$$

□

Введем обозначения

$\hat{c}_1 = \max\{\hat{a}_0 - \hat{b}_0, \hat{a}_1 - \hat{b}_1, \hat{b}_3 - \hat{a}_2 - 1, \hat{b}_3 - \hat{a}_3 - 1, 2\hat{b}_2 - \hat{a}_0^* - 2\}, \quad \hat{c}_2 = 2\hat{b}_3 - \hat{a}_0^* - 2.$

Следствие 2. *Справедливо представление*

$$\hat{r}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}; 1) = \hat{q}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}})\zeta(2) + \hat{p}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}),$$

где $\hat{q}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) \in \mathbb{Z}, \ D_{\hat{c}_1} D_{\hat{c}_2} \hat{p}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) \in \mathbb{Z}.$

Доказательство. Используя разложение (13) рациональной функции $\hat{R}(t)$, получим

$$\hat{r}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}; z) = \sum_{k=\hat{a}_3}^{\hat{b}_2 - 1} B_k \hat{I}_0(k; z) + \sum_{k=\hat{a}_2}^{\hat{b}_3 - 1} C_k \hat{I}_1(k; z)$$

Подставляя $z = 1$, используя соотношение (14) и равенство

$$\mathrm{Li}_2(-1) = -\frac{\zeta(2)}{2},$$

найдем

$$\hat{r}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}; 1) = \zeta(2) \sum_{k=\hat{a}_3}^{\hat{b}_2 - 1} B_k - 2 \sum_{k=\hat{a}_3}^{\hat{b}_2 - 1} \sum_{i=1}^{2k - \hat{a}_0^*} \frac{(-1)^{i+1} B_k}{i^2} - \sum_{k=\hat{a}_2}^{\hat{b}_3 - 1} \sum_{i=1}^{2k - \hat{a}_0^*} \frac{(-1)^{i+1} C_k}{i}.$$

Включения следуют из явных формул

$$B_k = (\hat{R}(t)(t+k)^2)\Big|_{t=-k} = (-1)^{\hat{d}} \binom{2k - \hat{b}_0}{2k - \hat{a}_0} \binom{k - \hat{b}_1}{k - \hat{a}_1} \binom{\hat{b}_2 - \hat{a}_2 - 1}{k - \hat{a}_2} \binom{\hat{b}_3 - \hat{a}_3 - 1}{k - \hat{a}_3}$$

□

5 Заключение

В работе сделан подход к исследованию двух разных интегральных конструкций, равенство которых доказано в работе [3]. Найденные представления для обобщенных величин $r(\mathbf{a}, \mathbf{b}; z)$ и $\hat{r}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}; z)$, показывают, что они являются разными функциями от z. Этот факт не позволяет утверждать о совпадении интегралов в функциональном виде, но является шагом к пониманию природы их совпадения в точке $z = 1$.

Литература

[1] K. Mahler, On the approximation of π, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, 56:1 (1953), 30–42.

[2] M. Mignotte, Approximations rationnelles de π et quelques autres nombres, Bull. Soc. Math. France Suppl. M em., 37 (1974), 121–132.

[3] В. В. Зудилин, Теорема Апери и задачи для значении дзета-функции Римана и их q-аналогов, https://arxiv.org/abs/1312.6919v1.

[4] Ю. В. Нестеренко, Некоторые замечания о $\zeta(2)$, Матем. заметки 59:6 (1996), 865–880.

[5] Ю.В. Нестеренко, О показателе иррациональности числа ln2, Матем. заметки 88:4 (2010), 549–564.

[6] M. Hata, Rational approximations to and some other numbers, Acta Arith., 63:4 (1993), 335–349.

[7] M. Hata, Legendre type polynomials and irrationality measures, J. Reine Angew. Math., 407:1 (1990), 99–125.

[8] M. Hata, A lower bound for rational approximations to π, J. Number Theory, 43:1 (1993), 51–67.

[9] G. Rhin and C. Viola, On the irrationality measure of (2), Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 43:1 (1993), 85–109

[10] G. Rhin, C. Viola, On a permutation group related to $\zeta(2)$, Acta Arith., 77:1 (1996), 23–56.

[11] G. V. Chudnovsky, On the method of Thue–Siegel, Ann. of Math. II Ser. 117:2 (1983), 325–382.

[12] G.V. Chudnovsky, Hermite–Pad e approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π, The Riemann Problem, Complete Integrability and Arithmetic Applications (Bures-sur-Yvette/New York, 1979/1980), Lecture Notes in Math., 925, Springer-Verlag, Berlin, 1982, 299–322 71-84.

[13] В.Х. Салихов, О мере иррациональности числа π, УМН, 63:3 (2008), 163–164.

[14] A. van der Poorten, A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$ (An informal report), Math. Intelligencer 1:4 (1978/79), 195–203

[15] F. Beukers, A note on the irrationality of (2) and (3), Bull. London Math. Soc. 11:3 (1979), 268–272.