ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛОВ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ТИПА

Выполнил студент
632 группы
Джуган Александр Олегович

____

подпись студента

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент
Уланский Евгений Александрович

____

подпись научного руководителя

Москва
2018

1 Введение

В настоящей работе читателю предстоит познакомиться с таким объектом математики, как кратные дзета-значения, которые происходят из обобщения *классической дзета-функции Римана*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

с $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > 1$. В своей статье [1] Хоффман вводит обобщения дзета-функции Римана, кратные дзета-функции, которые в натуральных точках называются *кратными дзета-значениями*:

$$\zeta(s_1, s_2, \dots, s_k) = \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_k \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_k^{s_k}} \tag{1}$$

$$\zeta^*(s_1, s_2, \dots, s_k) = \sum_{n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_k^{s_k}}, \tag{2}$$

где $s_1, \dots, s_k \in \mathbb{N}, s_1 > 1$. Сходимость рядов обеспечивается условиями $Re(s_1) > 1$ и $\sum\limits_{k=1}^{l} Re(s_k) > l$.

Данный труд не претендует на то, чтобы быть полным обзором всех существующих методов работы с кратными дзета-значениями, он только затрагивает некоторые специфические методы работы с последними. Работа включает в себя три раздела. Первый раздел посвящён общеизвестным наиболее важным результатам, касающимся кратных дзета-значений. Как кратные дзета-значения являются обобщением классической дзета-функции Римана, так обобщённые полилогарифмы являются естественным обобщением кратных дзета-значений. Мы будем использовать *обобщённые полилогарифмы* для доказательства некоторых фактов. Напомним читателю определение данного объекта:

$$Li_{s_1,\dots,s_k}(z) = \sum_{n_1 > \dots > n_k \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_k^{s_k}},$$

ряд сходится при $|z| < 1$. Целые числа $l(\mathbf{s}) = k$ и $|\mathbf{s}| = \sum_{i=1}^{k} |s_i|$ называются *длиной (глубиной)* и *весом* набора $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k)$.

Во втором разделе рассматривается такой метод изучения кратных дзета-значений, как кратные гармонические суммы, и представлены некоторые методы работы с суммами. Кратные гармонические суммы могут рассматриваться как элементарные "кирпичики" для вывода нетривиальных тождеств. Прежде чем приступить к обсуждению этого вопроса, мы дадим точные определения этих объектов. Для $r \in \mathbb{N}$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_r) \in (\mathbb{Z})^r$ и неотрицательного целого n *знакочередующаяся кратная гармоническая сумма* определяется как

$$H_n(s_1, s_2, \dots, s_r) = \sum_{n \geq k_r > \dots > k_2 > k_1 \geq 1} \prod_{i=1}^{r} \frac{sgn(s_i)^{k_i}}{k_i^{|s_i|}}.$$

В случае, если все $s_1, \ldots, s_r$ положительны, $H_n(s_1, s_2, \ldots, s_r)$ называют *кратной гармонической суммой*. Для $\overline{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_r) \in (\mathbb{N})^r$ можно определить *кратную гармоническую сумму со звёздочкой*

$$S_n(s_1, s_2, \ldots, s_r) = \sum_{n \geq k_r \geq \ldots \geq k_2 \geq k_1 \geq 1} \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{k_1^{s_1} \cdots k_r^{s_r}}.$$

По определению положим $H_n(\mathbf{s}) = 0$ при $n < r$, и $H_n(\varnothing) = S_n(\varnothing) = 1$. Под $\{s_1, s_2, \ldots, s_j\}^m$ понимается последовательность длины mj с m повторениями $(s_1, s_2, \ldots, s_j)$. Кратные гармонические суммы естественно возникают в различных областях математики, таких как комбинаторика, теория чисел, алгебраическая геометрия, квантовая теория и теория узлов. Предельные случаи кратных гармонических сумм положили начало изучению кратных дзета-значений:

$$\zeta(s_1, s_2, \ldots, s_r) = \lim_{n \to \infty} H_n(s_1, s_2, \ldots, s_r),$$

$$\zeta^*(s_1, s_2, \ldots, s_r) = \lim_{n \to \infty} S_n(s_1, s_2, \ldots, s_r),$$

определённые для $s_1 \geq 2$ и $s_2, \ldots, s_{r-1} \geq 1$, чтобы обеспечить сходимость рядов.

Третий раздел посвящён интегралам гипергеометрического типа.

Обозначим $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n), \overline{b} = (b_1, \ldots, b_n), \overline{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ и

$$I_n(\overline{a}; \overline{b}; \overline{c}|z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)\Gamma(b_i - a_i)} \int\limits_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1 - zx_1 \ldots x_i)^{c_i}} d\overline{x}, \tag{3}$$

где $z, a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}$, $|arg(1-z)| < \pi$ и $\Re(b_i) > \Re(a_i) > 0$ при $i = 1, \ldots, m$, и кратко обозначено $d\overline{x} = dx_1 \cdots dx_m$.

Этот интеграл при различных наборах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ при $z = 1$ представляет собой линейные комбинации дзета-значений с рациональными коэффициентами.

Пусть $0 = r_0 < r_1 < \ldots < r_{l-1} < r_l = n$ и $c_i = 0$, если $i \notin \{\, r_1, \ldots, r_l \,\}$, $i = 1, \ldots, n$, так что

$$\overline{c} = (\{\, 0 \,\}^{r_1 - r_0 - 1}, c^{r_1}, \ldots, \{\, 0 \,\}^{r_l - r_{l-1} - 1}, c^{r_l}).$$

Тогда интеграл (3) представляется в виде ряда

$$I_n(\overline{a}; \overline{b}; \overline{c}\,|z) = \sum_{k_1 \geq 0, \ldots, k_n \geq 0} z^{k_1 + \ldots + k_n} \prod_{j=1}^{l} \left[\frac{\Gamma(c_{r_j} + k_j)}{\Gamma(c_{r_j})(k_j)!} \prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} \frac{\Gamma(a_i + k_j + \ldots + k_l)}{\Gamma(b_i + k_j + \ldots + k_l)} \frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)} \right], \tag{4}$$

который является более общим случаем обобщённой гипергеометрической функции

$$ {}_{n+1}F_n \left(\begin{array}{c|c} a_0, a_1, \ldots, a_n & \\ b_1, \ldots, b_n & z \end{array} \right) = $$

$$\sum_{k \geq 0} \frac{\Gamma(a_0 + k)}{\Gamma(a_0)} \frac{\Gamma(a_1 + k)}{\Gamma(a_1)} \cdots \frac{\Gamma(a_n + k)}{\Gamma(a_n)} \frac{\Gamma(b_1)}{\Gamma(b_1 + k)} \cdots \frac{\Gamma(b_n)}{\Gamma(b_n + k)} \frac{z^k}{k!}$$

при $\overline{c} = (0, \ldots, 0, a_0)$. Иногда для удобства восприятия мы будем записывать параметры $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ строками друг над другом, как это сделано выше.

В третьем разделе обсуждаются способы получения результатов для интегралов типа (3), и доказывается несколько интересных тождеств для рядов вида (4).

2 Периодические дзета-значения

Основным результатом, повлиявшим на изучение кратных дзета-значений и кратных дзета-значений со звёздочкой можно назвать работу Загира [2], в которой был рассмотрен и доказан следующий результат:

$$\zeta(\{2\}^q) = \frac{\pi^{2q}}{(2q+1)!}. \tag{5}$$

Доказательство (5) широко известно, но мы приведём его как для того, чтобы эта работа была полной, так и потому что аналогичные идеи доказательств будут использоваться далее: рассматривается производящая функция $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\zeta(\{2\}^n)x^{2n+1}$ и из определения $\zeta(\{2\}^n)$ находится

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\zeta(\{2\}^n)x^{2n+1} = x\prod_{m=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{m^2}) = \frac{\sin \pi x}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n}x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

последние два равенства были получены Эйлером. Похожим образом может быть получено тождество

$$\zeta^*(\{2\}^q) = 2(1-2^{1-2q})\zeta(2q), \quad q \geq 0. \tag{6}$$

В [3] авторами доказано, что

$$\zeta(\{3,1\}^n) = \frac{2\pi^{4n}}{(4n+2)!}, \quad n \geq 0. \tag{7}$$

Мы будем использовать обобщённые полилогарифмы для доказательства этого факта. Если $\overline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ и $s = \sum_{j=1}^{k} s_j$, то каждый периодический полилогарифм $Li_{\{\overline{s}\}^r}(z)$ имеет производящую функцию

$$L_{\overline{s}}(z,t) := \sum_{r=0}^{\infty} Li_{\{\overline{s}\}^r}(z)t^{rs},$$

которая удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению по переменной z. В простейшем случае, $k = 1$, $\overline{s}$ трансформируется в скаляр, и дифференциальное уравнение для производящей функции выглядит как $D_s - t^s = 0$, где

$$D_s := \left((1-z)\frac{d}{dz}\right)^1 \left(z\frac{d}{dz}\right)^{s-1}.$$

Решением является ряд обобщённой гипергеометрической функции

$$
\begin{aligned}
L_s(z,t) &= 1+\sum_{r=1}^{\infty} z^r \frac{t^s}{r^s}\prod_{j=1}^{r-1}\left(1+\frac{t^s}{j^s}\right)\\
&= {}_sF_{s-1}\left(\begin{matrix} -\omega t, & -\omega^3 t, & \ldots, & -\omega^{2s-1}t; \\ 1, & 1, & \ldots, & 1 \end{matrix}\,\middle|\, z\right),
\end{aligned}
$$

где $\omega = e^{\pi i/s}$ – примитивный корень из -1 степени s.

Будем обозначать гипергеометрическую функцию Гаусса как $F(a,b,c\,|z)$, тогда

$$
\sum_{n=0}^{\infty} Li_{(3,1)}(z)t^{4n} = F(\frac{1}{2}t(1+i),-\frac{1}{2}t(1+i),1\,|z)F(\frac{1}{2}t(1-i),-\frac{1}{2}t(1-i),1\,|z). \tag{8}
$$

Обе части рассматриваемого равенства начинаются с

$$
1+\frac{t^4}{8}z^2+\frac{t^4}{18}z^3+\frac{t^8+44t^4}{1536}z^4+\cdots
$$

и уничтожаются дифференциальным оператором

$$
D_{31} := \left((1-z)\tfrac{d}{dz}\right)^2\left(z\tfrac{d}{dz}\right)^2 - t^4.
$$

Для левой части это справедливо ввиду того, что функция $Li_{s_1,\ldots,s_k}(z)$ удовлетворяет системе дифференциальный уравнений

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dz}Li_{s_1,\ldots,s_k}(z) &= \frac{1}{z}Li_{s_1-1,\ldots,s_k}(z), \qquad \text{если } s_1>1,\\
\frac{d}{dz}Li_{s_1,\ldots,s_k}(z) &= \frac{1}{1-z}Li_{s_2,\ldots,s_k}(z), \qquad \text{иначе.}
\end{aligned}
$$

Известно, что гипергеометрическая функция Гаусса удовлетворяет дифференциальному уравнению Эйлера

$$
z(1-z)\frac{d^2}{dz^2}F(a,b,c\,|z)+(c-(a+b+1))\frac{d}{dz}F(a,b,c\,|z)-ab_2F_1(a,b;c\,|z)=0.
$$

Таким образом, благодаря системе

$$
\begin{aligned}
z(1-z)\frac{d^2}{dz^2}F(\frac{1}{2}t(1+i),-\frac{1}{2}t(1+i),1\,|z) &= -\frac{it^2}{2z(1-z)}F(\frac{1}{2}t(1+i),-\frac{1}{2}t(1+i),1\,|z)\\
z(1-z)\frac{d^2}{dz^2}F(\frac{1}{2}t(1-i),-\frac{1}{2}t(1-i),1\,|z) &= -\frac{it^2}{2z(1-z)}F(\frac{1}{2}t(1-i),-\frac{1}{2}t(1-i),1\,|z)
\end{aligned}
$$

достигается равенство правой части (8) нулю после применения оператора D_{31}.

Теорема суммирования Гаусса утверждает

$$
F(a,-a,1\,|\,1)=\frac{1}{\Gamma(1-a)\Gamma(1+a)}=\frac{\sin(\pi a)}{\pi a}.
$$

Значит, положив $z=1$ в производящей функции (8), мы получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\zeta(\{3,1\}^n)t^{4n}$$

$$\begin{aligned}
&= F(\frac{1}{2}t(1+i),-\frac{1}{2}t(1+i),1\,|\,1)F(\frac{1}{2}t(1-i),-\frac{1}{2}t(1-i),1\,|\,1)\\
&= \frac{2\sin(\frac{1}{2}(1+i)\pi t)\sin(\frac{1}{2}(1-i)\pi t)}{\pi^2t^2}\\
&= \frac{1}{2\pi^2t^2}(e^{(1+i)\pi t/2}-e^{-(1+i)\pi t/2})(e^{(1-i)\pi t/2}-e^{-(1-i)\pi t/2})\\
&= \frac{1}{2\pi^2t^2}(e^{\pi t}-e^{-\pi t}-e^{i\pi t}-e^{-i\pi t})\\
&= \frac{1}{2\pi^2t^2}\sum_{m=0}^{\infty}(1+(-1)^m-i^m-(-i)^m)\frac{(\pi t)^m}{m!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\pi^{4n}t^{4n}}{(4n+2)!}.
\end{aligned}$$

Таким образом, было получено доказательство (7).

При помощи метода производящей функции могут быть получены также и некоторые другие замечательные тождества (см., например, [4]), аналогичные (7). В работе Васильева [5] приводится и доказывается следующее тождество:

$$\zeta^*(\{2\}^q,1)=2\zeta(2q+1),$$

которое является особым случаем формулы с циклической суммой [6]:

$$\zeta^*(\{2,\{1\}^{q-2}\}^m,1)=q\zeta(qm+1),\qquad k\in\mathbb{N},s\geq 2.$$

3 Кратные гармонические суммы

В [8] приводится наинтереснейший результат о кратных дзета-значениях. Авторы манипулируют конечными рядами, суммы которых стремятся к дзета-значениям. Данный метод в последнее время приобретает популярность (см., например, [9]), поэтому в данном обзоре мы решили посмотреть на него поближе:

$$\zeta^*(\{2\}^a,3,\{2\}^b)=2\overline{\zeta}(2a+2b+3)+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}H_{k-1}(2a+1)}{k^{2b+2}},\tag{9}$$

$$\zeta^*(\{2\}^a,1,\{2\}^b)=2\overline{\zeta}(2a+2b+1)-4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_{k-1}(-2a)}{k^{2b+1}},\qquad a,b\geq 1,\tag{10}$$

где

$$\overline{\zeta}(s):=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^s}=(1-2^{1-s})\zeta(s)$$

является знакочередующейся дзета-функцией, в том числе $\overline{\zeta}(1) = log2$.

Эти тождества могут быть получены из нижеприведённых тождеств при устремлении n к бесконености:

$$S_n(\{2\}^a, 3, \{2\}^b) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\binom{n}{k}}{k^{2a+2b+3}\binom{n+k}{k}} + 4\sum_{k=1}^{n} \frac{H_{k-1}(2a+1)(-1)^{k-1}\binom{n}{k}}{k^{2b+2}\binom{n+k}{k}} \tag{11}$$

$$S_n(\{2\}^a, 1, \{2\}^b) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\binom{n}{k}}{k^{2(a+b)+1}\binom{n+k}{k}} - 4\sum_{k=1}^{n} \frac{H_{k-1}(-2a)\binom{n}{k}}{k^{2b+1}\binom{n+k}{k}} \tag{12}$$

Тождество (11) является следствием следующего доказанного факта:

Утверждение 1. *Для положительного целого числа n и неотрицательных целых чисел a, b, и $c \geq 2$ выполнено*

$$S_n(\{2\}^a, c, \{2\}^b) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\binom{n}{k}}{k^{2a+2b+c}\binom{n+k}{k}} + 4\sum_{\substack{i+j+|s|=c \\ i\geq 1, j\geq 2, |s|\geq 0}} 2^{l(s)} \sum_{k=1}^{n} \frac{H_{k-1}(2a+i, \mathbf{s})(-1)^{k-1}\binom{n}{k}}{k^{2b+j}\binom{n+k}{k}}, \tag{13}$$

где $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_r) \in \mathbb{N}^r$ для $r \geq 0$, и $|\mathbf{s}| = \sum_{i=1}^{n} s_i, \quad l(s) = r$.

Для доказательства вышеупомянутых тождеств нам понадобится лемма, которая будет далее активно использоваться.

Лемма 1. *Для любых положительных целых чисел m, n и неотрицательного целого l выполняется*

$$\sum_{k=l+1}^{n} (-1)^{k-1}\binom{mn}{n-k} = (-1)^l \binom{mn-1}{n-l-1}, \tag{14}$$

$$2\sum_{k=l+1}^{n} \frac{k\binom{n}{k}}{\binom{n+k}{k}} = \frac{n\binom{n-1}{l}}{\binom{n+l}{l}}, \tag{15}$$

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k\binom{n+k}{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}. \tag{16}$$

Если $l \geq 1$, то

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{k}{l}}{k^2\binom{k+l}{l}} = \frac{\binom{n}{l}}{l^2\binom{n+l}{l}}. \tag{17}$$

Если $n \geq 2$, то

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k k^2\binom{n}{k}}{\binom{n+k}{k}} = 0. \tag{18}$$

Здесь и далее удобно использовать обычные биномиальные коэфиициенты $\binom{n}{k}$ в более широком смысле. Позволим нижнему индексу $\binom{n}{k}$ быть также произвольным целым числом, полагая $\binom{n}{k} = 0$, если $k < 0$.

Перед началом **доказательства** первого тождества мы заметим, что

$$(-1)^{k-1}\binom{mn}{n-k} = G(n, k+1) - G(n, k) \tag{19}$$

для положительных целых n, k с

$$G(n.k) = (-1)^k \binom{mn-1}{n-k}.$$

Тогда суммируя обе части уравнения (19) по k от $l+1$ до n, получаем

$$\sum_{k=l+1}^{n} (-1)^{k-1}\binom{mn}{n-k} = G(n, n+1) - G(n, l+1) = -G(n, l+1) = (-1)^l \binom{mn-1}{n-l-1}.$$

Второе тождество доказывается похожим образом. Из

$$\frac{2k\binom{n}{k}}{\binom{n+k}{k}} = R(n, k+1) - R(n, k) \tag{20}$$

для положительных целых n, k с

$$R(n, k) = -\frac{(n+k)\binom{n}{k}}{\binom{n+k}{k}}$$

Суммируя обе части уравнения (20) по k от $l+1$ до n, получаем требуемое. Чтобы доказать (18) заметим, что для целых $n \geq 2, k \geq 0$,

$$\frac{(-1)^k k^2 \binom{n}{k}}{\binom{n+k}{k}} = Q(n, k+1) - Q(n, k), \tag{21}$$

где

$$Q(n, k) = \frac{(-1)^{k-1} k(k-1)(n+k)\binom{n}{k}}{2(n-1)\binom{n+k}{k}}.$$

Действительно, расписав по определению разность в правой части (21), получаем цепочку равенств

$$\frac{(-1)^k (k+1)kn!n!}{(n-k-1)!2(n-1)(n+k)!} + \frac{(-1)^k k(k-1)(n+k)n!n!}{(n-k)!2(n-1)(n+k)!} =$$
$$\frac{(-1)^k n!n!k}{2(n-1)(n+k)!(n-k)!}((k^2+k)(n-k) + (k^2-k)(n+k)) = \frac{(-1)^k n!n!k^2}{(n+k)!(n-k)!},$$

последнее же выражение является ни чем иным, как левой частью (21). Далее, суммируя обе части равенства (21) по k от 1 до n, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k k^2 \binom{n}{k}}{\binom{n+k}{k}} = Q(n, n+1) - Q(n, 1) = 0,$$

и **лемма доказана**.

Лемма 2. *Пусть k, m, n являются положительными целыми числами, $A_{n,k}^{(m)} = (-1)^k \binom{mn}{n-k} c_n^{(m)}$, где $c_n^{(m)}$ случайная последовательность, не зависящая от k, и a неотрицательное целое число. Тогда для всех $c \in \mathbb{N}$*

$$\frac{1}{n^c} \sum_{k=1}^{n} \frac{H_{k-1}(\mathbf{b}) A_{n,k}^{(m)}}{k^a} = \sum_{k=1}^{n} \frac{H_{k-1}(\mathbf{b}) A_{n,k}^{(m)}}{k^{a+c}} + \sum_{\substack{j+|\mathbf{s}|=a+c \\ j\geq 0, s_1>a}} m^{l(\mathbf{s})} \sum_{k=1}^{n} \frac{H_{k-1}(\mathbf{b}, \mathbf{s}) A_{n,k}^{(m)}}{k^j} \tag{22}$$

где $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_r) \in \mathbb{N}^r$ для $r \geq 0$, и $|\mathbf{s}| = \sum_{i=1}^{n} s_i, l(s) = r$.

Из (14) следует, что

$$\frac{m}{l} \sum_{k=l+1}^{n} A_{n,k}^{(m)} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{l}\right) A_{n,l}^{(m)}. \tag{23}$$

Докажем (22) по индукции по c. Из (23) имеем

$$m \sum_{k=1}^{n} H_{k-1}(\mathbf{b}, a+1) A_{n,k}^{(m)} = m \sum_{l=1}^{n} \frac{H_{l-1}(\mathbf{b})}{l^{a+1}} \sum_{k=l+1}^{n} A_{n,k}^{(m)} =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \frac{H_{l-1}(\mathbf{b}) A_{n,l}^{(m)}}{l^a} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{l}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{H_{l-1}(\mathbf{b}) A_{n,l}^{(m)}}{l^a} - \sum_{l=1}^{n} \frac{H_{l-1}(\mathbf{b}) A_{n,l}^{(m)}}{l^{a+1}},$$

что является (22) для $c = 1$. Теперь положим $c > 1$. Тогда по предположению индукции имеем

$$\frac{1}{n^c} \sum_{k=1}^{n} \frac{H_{k-1}(\mathbf{b}) A_{n,k}^{(m)}}{k^a} = \frac{1}{n^{c-1}} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{H_{k-1}(\mathbf{b}) A_{n,k}^{(m)}}{k^a}\right) =$$

$$= \frac{1}{n^{c-1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{H_{k-1}(\mathbf{b}) A_{n,k}^{(m)}}{k^{a+1}} + \frac{m}{n^{c-1}} \sum_{k=1}^{n} H_{k-1}(\mathbf{b}, a+1) A_{n,k}^{(m)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{H_{k-1}(\mathbf{b}) A_{n,k}^{(m)}}{k^{a+c}} + \sum_{\substack{j+|\mathbf{s}|=a+c \\ j\geq 0, s_1>a+1}} m^{l(\mathbf{s})} \sum_{k=1}^{n} \frac{H_{k-1}(\mathbf{b}, \mathbf{s}) A_{n,k}^{(m)}}{k^j} +$$

$$= m \sum_{k=1}^{n} \frac{H_{k-1}(\mathbf{b}, a+1) A_{n,k}^{(m)}}{k^{c-1}} + m \sum_{\substack{j+|\mathbf{s}|=c-1 \\ j\geq 0, s_1>0}} m^{l(\mathbf{s})} \sum_{k=1}^{n} \frac{H_{k-1}(\mathbf{b}, a+1, \mathbf{s}) A_{n,k}^{(m)}}{k^j} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{H_{k-1}(\mathbf{b}) A_{n,k}^{(m)}}{k^{a+c}} + \sum_{\substack{j+|\mathbf{s}|=a+c \\ j\geq 0, s_1>a+1}} m^{l(\mathbf{s})} \sum_{k=1}^{n} \frac{H_{k-1}(\mathbf{b}, \mathbf{s}) A_{n,k}^{(m)}}{k^j} + \sum_{\substack{j+|\mathbf{s}|=a+c \\ j\geq 0, s_1=a+1}} m^{l(\mathbf{s})} \sum_{k=1}^{n} \frac{H_{k-1}(\mathbf{b}, \mathbf{s}) A_{n,k}^{(m)}}{k^j}.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство (13) проведём по индукции по n. Для $n=1$ имеем $S_1(\{2\}^a, c, \{2\}^b) = 1$ и формула верна. Для $n>1$ мы поступим следующим образом. Если $c=2$, то следует доказать, что

$$S_n(\{2\}^m) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\binom{n}{k}}{k^{2m}\binom{n+k}{k}}, \tag{24}$$

где $m=a+b+1$. Заметим сначала, что

$$S_n(\{2\}^m) = \sum_{1\le k_1\le k_2\le\ldots\le k_m\le n} \frac{1}{{k_1}^2{k_2}^2\ldots{k_m}^2} = \sum_{l=0}^{m}\frac{1}{n^{2(m-l)}}S_{n-1}(\{2\}^l).$$

Затем по предположению индукции имеем

$$S_n(\{2\}^m) = 2\sum_{l=0}^{n}\frac{1}{n^{2(m-l)}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k}}{k^{2l}\binom{n+k-1}{k}} = \frac{2}{n^{2m}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k}}{\binom{n+k-1}{k}}\sum_{l=0}^{m}\frac{n^{2l}}{k^{2l}} =$$
$$= \frac{2}{n^{2m+2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n^{2m+2}-k^{2m+2})}{k^{2m}\binom{n+k}{k}}$$
$$= 2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\binom{n}{k}}{k^{2m}\binom{n+k}{k}} - \frac{2}{n^{2m+2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}k^2\binom{n}{k}}{\binom{n+k}{k}}$$

и формула (24) получается моментально при использовании равенства (18). Для доказательства (13) для $c>2$ заметим, что для $n>1$

$$S_n(\{2\}^a, c, \{2\}^b) = \sum_{1\le k_1\le\ldots\le k_a\le k_{a+1}\le k_{a+2}\le\ldots\le k_{a+b+1}\le n}\frac{1}{{k_1}^2\ldots{k_a}^2{k_{a+1}}^c{k_{a+2}}^2\ldots{k_{a+b+1}}^2}$$
$$= \sum_{l=0}^{b}\frac{1}{n^{2(b-l)}}S_{n-1}(\{2\}^a, c, \{2\}^l) + \frac{1}{n^{2b+c}}S_n(\{2\}^a).$$

Далее по предположению индукции и формуле (24) имеем

$$S_n(\{2\}^a, c, \{2\}^b) = 2\sum_{l=0}^{b}\frac{1}{n^{2(b-l)}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k}}{k^{2(a+l)+c}\binom{n+k-1}{k}} +$$
$$+4\sum_{l=0}^{b}\frac{1}{n^{2(b-l)}}\sum_{\substack{i+j+|\mathbf{s}|=c\\ i\ge1, j\ge2, |\mathbf{s}|\ge0}} s^{l(\mathbf{s})}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{H_{k-1}(2a+i,\mathbf{s})(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k}}{k^{2l+j}\binom{n-1+k}{k}} +$$
$$+\frac{2}{n^{2b+c}}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\binom{n}{k}}{k^{2a}\binom{n+k}{k}}$$

Меняя порядок суммирования и вычисляя внутреннюю сумму

$$\frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{n-1+k}{k}}\sum_{l=0}^{b}\frac{n^{2l}}{k^{2l}}=\frac{n^{2b+2}-k^{2b+2}}{(n^2-k^2)k^{2b}}\frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{n-1+k}{k}}=\left(\frac{n^{2b}}{k^{2b}}-\frac{k^2}{n^2}\right)\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+k}{k}}, \tag{25}$$

получаем

$$S_n(\{2\}^a,c,\{2\}^b)=2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\binom{n}{k}}{k^{2a+2b+c}\binom{n+k}{k}}+$$
$$+4\sum_{\substack{i+j+|\mathbf{s}|=c\\ i\geq 1,j\geq 2,|\mathbf{s}|\geq 0}}2^{l(\mathbf{s})}\sum_{k=1}^{n}\frac{H_{k-1}(2a+i,\mathbf{s})(-1)^{k-1}\binom{n}{k}}{k^{2b+j}\binom{n+k}{k}}+$$
$$+\frac{2}{n^{2b+c}}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\binom{n}{k}}{k^{2a}\binom{n+k}{k}}-\frac{2}{n^{2b+2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\binom{n}{k}}{k^{2a+c-2}\binom{n+k}{k}}+$$
$$-\frac{4}{n^{2b-2}}\sum_{\substack{i+j+|\mathbf{s}|=c\\ i\geq 1,j\geq 2,|\mathbf{s}|\geq 0}}2^{l(\mathbf{s})}\sum_{k=1}^{n}\frac{H_{k-1}(2a+i,\mathbf{s})(-1)^{k-1}\binom{n}{k}}{k^{j-2}\binom{n+k}{k}}$$

Финальный результат следует немедленно, как только покажем, что

$$\frac{1}{n^{c-2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{A_{n,k}^{(2)}}{k^{2a}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_{n,k}^{(2)}}{k^{2a+c-2}}+2\sum_{\substack{i+j+|\mathbf{s}|=c\\ i\geq 1,j\geq 2,|\mathbf{s}|\geq 0}}2^{l(\mathbf{s})}\sum_{k=1}^{n}\frac{H_{k-1}(2a+i,|\mathbf{s}|)A_{n,k}^{(2)}}{k^{j-2}},$$

где $A_{n,k}^{(2)}=(-1)^{k-1}\binom{n}{k}/\binom{n+k}{k}$. Равенство сраведливо ввиду Леммы 2, так как

$$2\sum_{\substack{i+j+|\mathbf{s}|=c\\ i\geq 1,j\geq 2,|\mathbf{s}|\geq 0}}2^{l(\mathbf{s})}\sum_{k=1}^{n}\frac{H_{k-1}(2a+i,|\mathbf{s}|)A_{n,k}^{(2)}}{k^{j-2}}=\sum_{\substack{j+|\mathbf{s}|=2a+c-2\\ j\geq 0,|\mathbf{s}_1|>2a}}2^{l(\mathbf{s})}\sum_{k=1}^{n}\frac{H_{k-1}(\mathbf{s})A_{n,k}^{(2)}}{k^{j}}.$$

Для доказательства же (12) воспользуемся индукцией по n. Очевидно, формула справедлива при $n=1$. При $n>1$ используем равенство

$$S_n(\{2\}^a,1,\{2\}^b)=\sum_{l=0}^{b}\frac{1}{n^{2(b-l)}}S_{n-1}(\{2\}^a,1,\{2\}^l)+\frac{1}{n^{2b+1}}S_n(\{2\}^a)$$

и повторим те же рассуждения, что и при доказательстве Утверждения 1. Тогда с помощью соотношения (15) можно получить желаемое.

Отметим, что формула (2) может быть получена также при устремлении n к бесконечности в тождестве

$$S_n(\{2\}^q,1)=2\sum_{l=1}^{n}\frac{\binom{n}{l}}{l^{2q+1}\binom{n+l}{l}},$$

которое может быть получено с использованием кратных гармонических сумм.

В статье [2] Загир выражает $\zeta(2,\ldots,2,3,2,\ldots,2)$ через простые дзета-значения. Рассуждениями, абсолютно аналогичными только что проведённым, авторы [8] приводят гораздо более простое доказательство результата Загира. Этот результат был существенно использован Брауном в [7] для доказательства того, что дзета-функции, аргументы которых состоят только из наборов двоек и троек фиксированного веса, являются образующими линейного пространства, порождённого всеми дзета-функциями этого веса.

В работе японского математика Сюдзи Ямамото [10] рассматриваются соотношения несколько другого типа: определяются

$$s(p,q)=\sum_{\substack{j_0,j_1,\ldots,j_{2p}\geq 0\\ j_0+j_1+\cdots+j_{2p}=q}}\zeta(\{2\}^{j_0},3,\{2\}^{j_1},1,\{2\}^{j_2},3,\ldots,\{2\}^{j_{2p-1}},1,\{2\}^{j_{2p}}), \tag{26}$$

для которых явная формула была выведена Боуманом и Брэдли [11]:

$$s(p,q)=\binom{2p+q}{q}\frac{\pi^{4p+2q}}{(2p+1)(4p+2q+1)!}.$$

Похожим образом можно определить

$$s^*(p,q)=\sum_{\substack{j_0,j_1,\ldots,j_{2p}\geq 0\\ j_0+j_1+\cdots+j_{2p}=q}}\zeta^*(\{2\}^{j_0},3,\{2\}^{j_1},1,\{2\}^{j_2},3,\ldots,\{2\}^{j_{2p-1}},1,\{2\}^{j_{2p}}.$$

Злобин в своей работе приводит явную формулу для случая $p=0$, она выглядит следующим образом:

$$s^*(0,q)=\zeta^*(\{2\}^q)=(2^{2q}-2)\frac{(-1)^{q-1}B_{2q}}{(2q)!}\pi^{2q}$$

(B_{2q} – $2q$-ое число Бернулли). В этой статье приводится доказательство следующего соотношения между $s(p,q)$ и $s^*(p,q)$:

$$s^*(p,q)=\sum_{\substack{2i+k+u=2p\\ j+l+v=q}}\binom{k+l}{k}\binom{u+v}{u}s(i,j)\zeta^*(\{2\}^{k+l})\zeta^*(\{2\}^{u+v}). \tag{27}$$

Идея доказательства состоит в манипуляции конечными рядами $H_m(\mathbf{k})$ и $S_m(\mathbf{k})$ с набором $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_n)$ $(k_1,\ldots,k_n\geq 1)$.

Далее мы фиксируем a,b и c, удовлетворяющие условию $a+b=2c$. Для целых $p,q\geq 0$ введём $I_{p,q}=I_{p,q}^{a,b,c}$ - множество, содержащее все наборы, полученные путём перемешивания двух последовательностей $(\{a,b\}^q)$ и $(\{c\}^p)$. Можно также рассматривать конечные варианты сумм MZV, подобным $s(p,q)$ и $s^*(p,q)$:

$$s_m(p,q)=\sum_{\mathbf{k}\in I_{p,q}}H_m(\mathbf{k}),\qquad s_m^*(p,q)=\sum_{\mathbf{k}\in I_{p,q}}S_m(\mathbf{k}),$$

Тогда (27) может быть получено из следующего тождества при $(a,b,c) = (3,1,2)$ и устремляя $m \to \infty$:

$$s^*_m(p,q) = \sum_{\substack{2i+k+u=2p \\ j+l+v=q}} (-1)^{j+k} \binom{k+l}{k} \binom{u+v}{u} s_m(i,j) S_m(\{c\}^{k+l}) S_m(\{c\}^{u+v}), \quad p,q \geq 0, m \geq 0 \tag{28}$$

Если положить

$$F_m(x,y) = \sum_{p,q\geq 0} s_m(p,q) x^{2p} y^q, \qquad K_m(z) = \sum_{r\geq 0} H_m(\{c\}^r) z^r,$$
$$F^*_m(x,y) = \sum_{p,q\geq 0} s^*_m(p,q) x^{2p} y^q, \qquad K^*_m(z) = \sum_{r\geq 0} S_m(\{c\}^r) z^r,$$

то несложно увидеть, что (28) эквивалентна следующему тождеству производящих функций:

$$F^*_m(x,y) = F_m(x,-y) K^*_m(y-x) K^*_m(y+x) \tag{29}$$

Для доказательства этой теоремы определяется $J_{p,q} = J^{a,b,c}_{p,q}$, которое содержит все наборы, полученные путём перемешивания двух последовательностей $(b, \{a,b\}^q)$ и $(\{c\}^p)$ и вводятся

$$t_m(p,q) = \sum_{\mathbf{k}\in J_{p,q}} H_m(\mathbf{k}), \qquad G_m(x,y) = \sum_{p,q\geq 0} t_m(p,q) x^{2p+1} y^q,$$
$$t^*_m(p,q) = \sum_{\mathbf{k}\in J_{p,q}} S_m(\mathbf{k}), \qquad G^*_m(x,y) = \sum_{p,q\geq 0} t^*_m(p,q) x^{2p+1} y^q.$$

Доказательство вышеприведённой теоремы полностью заключено в ключевой лемме:

Для $m \geq 0$ *верно*

$$\begin{pmatrix} F_m(x,y) \\ G_m(x,y) \end{pmatrix} = U_m U_{m-1} \cdots U_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F^*_m(x,y) \\ G^*_m(x,y) \end{pmatrix} = V_m V_{m-1} \cdots V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где

$$U_l = \begin{pmatrix} 1 + \frac{y}{l^c} & \frac{x}{l^a} \\ \frac{x}{l^b} & 1 + \frac{y}{l^c} \end{pmatrix},$$

$$V_l = \frac{1}{(1 - \frac{y-x}{l^c})(1 - \frac{y+x}{l^c})} \begin{pmatrix} 1 + \frac{y}{l^c} & \frac{x}{l^a} \\ \frac{x}{l^b} & 1 + \frac{y}{l^c} \end{pmatrix}.$$

Чтобы доказать эту лемму, требуется разложить $F_m(x,y)$ на три суммы: первую, отвечающую $m_1 < m$, вторую, отвечающую $m_1 = m$ и $k_1 = a$ и последнюю с $m_1 = m$ и $k_1 = c$. Тогда может быть получено соотношение

$$F_m(x,y) = F_{m-1}(x,y) + \frac{x}{m^a} G_{m-1}(x,y) + \frac{y}{m^c} F_{m-1}(x,y).$$

Проделав аналогичные вычисления, можно получить

$$G_m(x,y) = G_{m-1}(x,y) + \frac{x}{m^b}F_{m-1}(x,y) + \frac{y}{m^c}G_{m-1}(x,y).$$

Комбинируя два полученных тождества, имеем

$$\begin{pmatrix} F_m(x,y) \\ G_m(x,y) \end{pmatrix} = U_m \begin{pmatrix} F_{m-1}(x,y) \\ G_{m-1}(x,y) \end{pmatrix}.$$

И первое соотношение из леммы вытекает по индукции. Схожим образом может быть показано, что

$$F_m^*(x,y) = F_{m-1}^*(x,y) + \frac{x}{m^a}G_m(x,y) + \frac{y}{m^c}F_m(x,y),$$

$$G_m^*(x,y) = G_{m-1}^*(x,y) + \frac{x}{m^b}F_m^*(x,y) + \frac{y}{m^c}G_m^*(x,y),$$

значит,

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{y}{m^c} & -\frac{x}{m^a} \\ -\frac{x}{m^b} & 1-\frac{y}{m^c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_m(x,y) \\ G_m(x,y) \end{pmatrix} = U_m \begin{pmatrix} F_{m-1}(x,y) \\ G_{m-1}(x,y) \end{pmatrix}$$

Из того, что

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{y}{m^c} & -\frac{x}{m^a} \\ -\frac{x}{m^b} & 1-\frac{y}{m^c} \end{pmatrix}^{-1} = V_m$$

и предположения $a+b=2c$, следует второе предположение леммы путём индукции. Теперь не представляет труда доказать теорему (29). Действительно, из леммы следует, что

$$\begin{pmatrix} F_m^*(x,y) \\ G_m^*(x,y) \end{pmatrix} = \prod_{l=1}^{m} \left\{ \left(1-\frac{y-x}{l^c})(1-\frac{y+x}{l^c}\right) \right\}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F_m(x,-y) \\ G_m(x,-y) \end{pmatrix}$$

$$= K_m^*(y-x)K_m^*(y+x) \begin{pmatrix} F_m(x,-y) \\ G_m(x,-y) \end{pmatrix}.$$

4 Интегралы гипергеометрического типа

Из разложения (4) следует, что в пределах блока из нулей и некоторого c_{r_h} можно делать перестановки внутри групп a_i и b_j , так как от инверсии двух верхних или двух нижних параметров значение функции не изменится. Также видно, что если один из верхних параметров равен какому-либо из нижних в пределах блока из нулей, то параметры сократятся, и порядок функции понизится на единицу.

Гипергеометрическая функция Гаусса $F(a_0, a_1, b_1 \,|\, z)$ является частным случаем интеграла (3):

$$F(a_0, a_1, b_1 \,|\, z) \;=\; I_1(a_1; b_1; a_0 \,|\, z). \tag{30}$$

Согласно [12] в области $|arg(1-z)| < \pi$ справедливы равенства:

$$F(a_0, a_1, b_1 \,|\, z) \ = (1-z)^{-a_1} F\left(b_1 - a_0, a_1, b_1 \,\middle|\, \frac{-z}{1-z}\right), \tag{31}$$

$$F(a_0, a_1, b_1 \,|z) \ = (1-z)^{-a_0} F\left(a_0, b_1 - a_1, b_1 \,\middle|\, \frac{-z}{1-z}\right), \tag{32}$$

$$F(a_0, a_1, b_1 \,|\, z) \ = (1-z)^{b_1 - a_1 - a_0} F(b_1 - a_0, b_1 - a_1, b_1 \,|\, z). \tag{33}$$

Вышеприведённые равенства могут быть получены заменами

$$x \to \frac{x}{1 - z(1-x)}, \qquad x \to 1 - x, \qquad x \to \frac{1-x}{1-zx}$$

в интегральном представлении (3). В своей работе [13] Е.А. Уланский использует обобщённый вид первой замены и приводит доказательство более общего тождества для (31), а именно

$$I_n(\overline{a}; \overline{b}; \overline{c}|z) = (1-z)^{-a_1} I_n(\overline{a}; \overline{b}; b_1 - a_2 - c_1, \ldots, b_{n-1} - a_n - c_{n-1}, b_n - c_n \big| \frac{-z}{1-z}). \tag{34}$$

В представленной работе получим аналогичные результаты для (32) и (33).

Обозначим $\hat{c}_i = c_i + \ldots + c_n$, где $i = 1, \ldots, n$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия для параметров интеграла* (3)*. Тогда*

$$I_n(\overline{a}; \overline{b}; \overline{c}|z) = (1-z)^{-\hat{c}_1} I_{2n-1} \left(\begin{array}{cccccc} \hat{c}_1, & a_1, & \hat{c}_2, & \ldots, & a_{n-1}, & \hat{c}_n; \\ b_1, & \hat{c}_1, & b_2, & \ldots, & \hat{c}_{n-1}, & b_n; \\ b_1 - a_1, & 0, & b_2 - a_2, & \ldots, & 0, & b_n - a_n \end{array} \middle| \frac{-z}{1-z} \right). \tag{35}$$

Доказательство проведём индукцией по n. При $n = 1$, принимая во внимание равенство (30), утверждение теоремы совпадает с (32). Пусть теперь $n > 1$ и для $n-1$ утверждение теоремы верно. Напишем определение и произведём замену $x_n \to 1 - x_n$. Получим

$$I_n(\overline{a}; \overline{b}; \overline{c}|z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)\Gamma(b_i - a_i)} \int\limits_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^{a_i - 1}(1-x_i)^{b_i - a_i - 1}}{(1 - zx_1 \ldots x_i)^{c_i}} d\overline{x} =$$

$$= \frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)\Gamma(b_i - a_i)} \int\limits_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{x_i^{a_i - 1}(1-x_i)^{b_i - a_i - 1}}{(1 - zx_1 \ldots x_i)^{c_i}} \frac{x_n^{b_n - a_n - 1}(1-x_n)^{a_n - 1}}{(1 - zx_1 \ldots x_{n-1})^{c_n}(1 - \frac{-zx_1 \ldots x_n}{1 - zx_1 \ldots x_{n-1}})^{c_n}} d\overline{x}.$$

Пусть $|z| < 1$ и $\left|\dfrac{-z}{1-z}\right| < 1$, тогда знаменатель последней дроби может быть представлен в виде ряда, а именно: $\left(1 - \dfrac{-zx_1 \ldots x_n}{1 - zx_1 \ldots x_{n-1}}\right)^{-c_n} = \sum\limits_{k \geq 0} \dfrac{\Gamma(c_n + k)}{\Gamma(c_n)k!} \left(\dfrac{-zx_1 \ldots x_n}{1 - zx_1 \ldots x_{n-1}}\right)^k.$

Подставим это выражение в интеграл, затем, пользуясь равномерной сходимостью, поменяем местами знаки суммирования и интегрирования и проинтегрируем по x_n, определив $d\overline{x}' = dx_1 \ldots dx_{n-1}$:

$$\sum_{k\geq 0} \frac{\Gamma(c_n+k)}{\Gamma(c_n)k!} \frac{\Gamma(b_n-a_n+k)\Gamma(a_n)}{\Gamma(b_n+k)} \frac{\Gamma(b_1)\ldots\Gamma(b_n)}{\Gamma(a_1)\ldots\Gamma(a_{n-1})\Gamma(a_n)\Gamma(b_1-a_1)\ldots\Gamma(b_n-a_n)}(-z)^k\times$$

$$\times \int\limits_{[0,1]^{n-1}} \prod_{i=1}^{n-2} \frac{x_i^{a_i+k-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1-zx_1\ldots x_i)^{c_i}} \frac{x_{n-1}^{a_{n-1}+k-1}(1-x_{n-1})^{b_{n-1}-a_{n-1}-1}}{(1-zx_1\ldots x_{n-1})^{c_{n-1}+c_n+k}} d\overline{x}' =$$

$$= \sum_{k\geq 0} \frac{\Gamma(c_n+k)}{\Gamma(c_n)k!} \frac{\Gamma(b_n-a_n+k)}{\Gamma(b_n+k)} \frac{\Gamma(b_1)\ldots\Gamma(b_n)}{\Gamma(a_1)\ldots\Gamma(a_{n-1})} \frac{\Gamma(a_1+k)\ldots\Gamma(a_{n-1}+k)}{\Gamma(b_n-a_n)\Gamma(b_1+k)\ldots\Gamma(b_{n-1}+k)}(-z)^k\times$$

$$\times I_{n-1}(a_1+k,\ldots,a_{n-1}+k; b_1+k,\ldots,b_{n-1}+k; c_1,\ldots,c_{n-2},c_{n-1}+c_n+k|z).$$

Далее применим предположение индукции, попутно обозначив $d\overline{x}'' = dx_1 \ldots dx_{2n-3}$, будем иметь

$$\sum_{k\geq 0}(-z)^k \frac{\Gamma(c_n+k)}{\Gamma(c_n)k!} \frac{\Gamma(b_n-a_n+k)}{\Gamma(b_n+k)} \frac{\Gamma(b_1)\ldots\Gamma(b_n)}{\Gamma(a_1)\ldots\Gamma(a_{n-1})} \frac{\Gamma(a_1+k)\ldots\Gamma(a_{n-1}+k)}{\Gamma(b_n-a_n)\Gamma(b_1+k)\ldots\Gamma(b_{n-1}+k)}\times$$

$$\times(1-z)^{-\hat{c}_1-k} I_{2n-3}\left(\begin{array}{cccccc|c} \hat{c}_1+k, & a_1+k, & \hat{c}_2+k, & \ldots, & a_{n-2}+k, & \hat{c}_{n-1}+k; & \\ b_1+k, & \hat{c}_1+k, & b_2+k, & \ldots, & \hat{c}_{n-2}+k, & b_{n-1}+k; & \dfrac{-z}{1-z} \\ b_1-a_1, & 0, & b_2-a_2, & \ldots, & 0, & b_{n-1}-a_{n-1} & \end{array}\right) =$$

$$= (1-z)^{-\hat{c}_1} \sum_{k\geq 0} (\frac{-z}{1-z})^k \frac{\Gamma(c_n+k)}{\Gamma(c_n)k!} \frac{\Gamma(b_n-a_n+k)}{\Gamma(b_n+k)} \frac{\Gamma(b_1)\ldots\Gamma(b_n)}{\Gamma(a_1)\ldots\Gamma(a_{n-1})} \frac{\Gamma(a_{n-1}+k)}{\Gamma(b_n-a_n)}\times$$

$$\times \frac{1}{\Gamma(\hat{c}_{n-1}+k)\Gamma(b_1-\hat{c}_1)\ldots\Gamma(b_{n-1}-\hat{c}_{n-1})\Gamma(\hat{c}_1-a_1)\ldots\Gamma(\hat{c}_{n-2}-a_{n-2})}\times$$

$$\times \int\limits_{[0,1]^{2n-3}} \frac{x_1^{\hat{c}_1+k-1}(1-x_1)^{b_1-\hat{c}_1-1}}{(1-\frac{-z}{1-z}x_1)^{b_1-a_1}} \cdots \frac{x_{2n-4}^{a_{n-2}+k}(1-x_{2n-4})^{\hat{c}_{n-2}-a_{n-2}-1} x_{2n-3}^{\hat{c}_{n-1}+k-1}(1-x_{2n-3})^{b_{n-1}-\hat{c}_{n-1}-1}}{(1-\frac{-z}{1-z}x_1\ldots x_{2n-3})^{b_{n-1}-a_{n-1}}} d\overline{x}''.$$

Вновь поменяем местами интегрирование и суммирование и сгруппируем гамма-множители нужным образом, чтобы создать из некоторых бета-функцию, которую представим в виде интегралов по дополнительным переменным:

$$(1-z)^{-\hat{c}_1} \sum_{k\geq 0} \left(\frac{-z}{1-z}\right)^k \frac{\Gamma(b_n-a_n+k)}{\Gamma(b_n-a_n)k!}\times$$

$$\times \frac{\Gamma(b_1)}{\Gamma(b_1-\hat{c}_1)\Gamma(\hat{c}_1)} \frac{\Gamma(\hat{c}_1)}{\Gamma(a_1)\Gamma(\hat{c}_1-a_1)} \cdots \frac{\Gamma(b_{n-1})}{\Gamma(b_{n-1}-\hat{c}_{n-1})\Gamma(\hat{c}_{n-1})} \frac{\Gamma(\hat{c}_{n-1})}{\Gamma(a_{n-1})\Gamma(\hat{c}_{n-1}-a_{n-1})} \frac{\Gamma(b_n)}{\Gamma(c_n)\Gamma(b_n-c_n)}\times$$

$$\times \int\limits_{[0,1]^{2n-1}} \frac{x_1^{\hat{c}_1+k-1}(1-x_1)^{b_1-\hat{c}_1-1}}{(1-\frac{-z}{1-z}x_1)^{b_1-a_1}} \cdots \frac{x_{2n-4}^{a_{n-2}+k}(1-x_{2n-4})^{\hat{c}_{n-2}-a_{n-2}-1} x_{2n-3}^{\hat{c}_{n-1}+k-1}(1-x_{2n-3})^{b_{n-1}-\hat{c}_{n-1}-1}}{(1-\frac{-z}{1-z}x_1\ldots x_{2n-3})^{b_{n-1}-a_{n-1}}}\times$$

$$\times x_{2n-2}^{a_{n-1}+k-1}(1-x_{2n-2})^{\hat{c}_{n-1}-a_{n-1}-1}x_{2n-1}^{c_n+k-1}(1-x_{2n-1})^{b_n-c_n-1}dx_1\dots dx_{2n-1}.$$

Мы получили сходящийся при $\left|\dfrac{-z}{1-z}\right| < 1$ ряд

$$\sum_{k\geq 0}\frac{\Gamma(b_n-a_n+k)}{\Gamma(b_n-a_n)k!}\left(\frac{-z}{1-z}x_1\dots x_{2n-1}\right)^k = \frac{1}{(1-\frac{-z}{1-z}x_1\dots x_{2n-1})^{b_n-a_n}},$$

что даёт

$$(1-z)^{-\hat{c}_1}\frac{\Gamma(b_1)}{\Gamma(b_1-\hat{c}_1)\Gamma(\hat{c}_1)}\frac{\Gamma(\hat{c}_1)}{\Gamma(a_1)\Gamma(\hat{c}_1-a_1)}\cdots\frac{\Gamma(\hat{c}_{n-1})}{\Gamma(a_{n-1})\Gamma(\hat{c}_{n-1}-a_{n-1})}\frac{\Gamma(b_n)}{\Gamma(c_n)\Gamma(b_n-c_n)}\times$$

$$\times\int\limits_{[0,1]^{2n-1}}\frac{x_1^{\hat{c}_1-1}(1-x_1)^{b_1-\hat{c}_1-1}}{(1-\frac{-z}{1-z}x_1)^{b_1-a_1}}\cdots\frac{x_{2n-4}^{a_{n-2}}(1-x_{2n-4})^{\hat{c}_{n-2}-a_{n-2}-1}x_{2n-3}^{\hat{c}_{n-1}-1}(1-x_{2n-3})^{b_{n-1}-\hat{c}_{n-1}-1}}{(1-\frac{-z}{1-z}x_1\dots x_{2n-3})^{b_{n-1}-a_{n-1}}}\times$$

$$\times\frac{x_{2n-2}^{a_{n-1}-1}(1-x_{2n-2})^{\hat{c}_{n-1}-a_{n-1}-1}x_{2n-1}^{c_n-1}(1-x_{2n-1})^{b_n-c_n-1}}{(1-\frac{-z}{1-z}x_1\dots x_{2n-1})^{b_n-a_n}}dx_1\dots dx_{2n-1} =$$

$$= (1-z)^{-\hat{c}_1}I_{2n-1}\left(\begin{array}{cccccc|c} \hat{c}_1, & a_1, & \hat{c}_2, & \dots, & a_{n-1}, & \hat{c}_n; & \\ b_1, & \hat{c}_1, & b_2, & \dots, & \hat{c}_{n-1}, & b_n; & \dfrac{-z}{1-z} \\ b_1-a_1, & 0, & b_2-a_2, & \dots, & 0, & b_n-a_n & \end{array}\right).$$

Теорема была доказана в области $\{\,|z|<1\,\}\cup\{\,|\frac{-z}{1-z}|\,\}<1$, но она остаётся верной во всей области $|arg(1-z)|<\pi$, поскольку обе части равенства определены. **Теорема 1 доказана.**

Введём для удобства $d_i = b_i + \ldots + b_n - a_{i+1} - \ldots - a_n - c_i - \ldots - c_n$ для $i = 1, \ldots, n-1$ и $d_n = b_n - c_n$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия для параметров интеграла* (3)*. Тогда*

$$I_n(\overline{a};\overline{b};\overline{c}|z) = (1-z)^{d_1-a_1} I_{2n-1}\left(\begin{array}{ccccccc} d_1, & a_1, & d_2, & \ldots, & a_{n-1}, & b_n - c_n; \\ b_1, & d_1, & b_2 & \ldots, & d_{n-1}, & b_n; \\ b_1 - a_1, & 0, & b_2 - a_2 & \ldots, & 0, & b_n - a_n \end{array}\middle| z\right).$$

Доказательство проведём индукцией по n, как и в предыдущей теореме. Воспользуемся теми же рассуждениями и заметим, что при $n = 1$, принимая во внимание равенство (30), тождество совпадает с (33). В этот же раз применим замену $x_n \to \frac{1-x_n}{1-zx_1\ldots x_n}$:

$$I_n(\overline{a};\overline{b};\overline{c}|z) =$$
$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)\Gamma(b_i-a_i)} \int\limits_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1-zx_1\ldots x_i)^{c_i}} d\overline{x} = \tfrac{\Gamma(b_1)\ldots\Gamma(b_n)}{\Gamma(a_1)\ldots\Gamma(a_n)\Gamma(b_1-a_1)\ldots\Gamma(b_n-a_n)} \times$$
$$\times \int\limits_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1-zx_1\ldots x_i)^{c_i}} \frac{x_n^{b_n-a_n-1}(1-x_n)^{a_n-1}}{(1-zx_1\ldots x_{n-1})^{c_n+a_n-b_n}(1-zx_1\ldots x_n)^{b_n-c_n}} d\overline{x}.$$

Разложим знаменатель последней дроби в ряд:

$$(1-zx_1\ldots x_n)^{-(b_n-c_n)} = \sum_{k\geq 0} \frac{\Gamma(b_n-c_n+k)}{\Gamma(b_n-c_n)k!}(zx_1\ldots x_n)^k,$$

проинтегрировав затем по x_n, получим

$$\sum_{k\geq 0} \frac{\Gamma(b_n-c_n+k)}{\Gamma(b_n-c_n)k!} \frac{\Gamma(b_n-a_n+k)\Gamma(a_n)}{\Gamma(b_n+k)} \frac{\Gamma(b_1)\ldots\Gamma(b_n)}{\Gamma(a_1)\ldots\Gamma(a_{n-1})\Gamma(a_n)\Gamma(b_1-a_1)\ldots\Gamma(b_n-a_n)} z^k \times$$
$$\times \int\limits_{[0,1]^{n-1}} \prod_{i=1}^{n-2} \frac{x_i^{a_i+k-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1-zx_1\ldots x_i)^{c_i}} \frac{x_{n-1}^{a_{n-1}+k-1}(1-x_{n-1})^{b_{n-1}-a_{n-1}-1}}{(1-zx_1\ldots x_{n-1})^{c_{n-1}+c_n+a_n-b_n}} d\overline{x}' =$$

$$= \sum_{k\geq 0} \frac{\Gamma(b_n-c_n+k)}{\Gamma(b_n-c_n)k!} \frac{\Gamma(b_n-a_n+k)}{\Gamma(b_n+k)} \frac{\Gamma(b_1)\ldots\Gamma(b_n)}{\Gamma(a_1)\ldots\Gamma(a_{n-1})} \frac{\Gamma(a_1+k)\ldots\Gamma(a_{n-1}+k)}{\Gamma(b_n-a_n)\Gamma(b_1+k)\ldots\Gamma(b_{n-1}+k)} z^k \times$$
$$\times I_{n-1}(a_1+k,\ldots,a_{n-1}+k; b_1+k,\ldots,b_{n-1}+k; c_1,\ldots,c_{n-2}, c_{n-1}+c_n+a_n-b_n|z).$$

Применим предположение индукции и продолжим доказательство аналогичным методом:

$$\sum_{k\geq 0} z^k \frac{\Gamma(b_n-c_n+k)}{\Gamma(b_n-c_n)k!} \frac{\Gamma(b_n-a_n+k)}{\Gamma(b_n+k)} \frac{\Gamma(b_1)\ldots\Gamma(b_n)}{\Gamma(a_1)\ldots\Gamma(a_{n-1})\Gamma(b_n-a_n)} \frac{\Gamma(a_1+k)\ldots\Gamma(a_{n-1}+k)}{\Gamma(b_1+k)\ldots\Gamma(b_{n-1}+k)} \times$$

$$\times(1-z)^{d_1-a_1} I_{2n-3}\left(\begin{array}{cccccc|c} d_1+k, & a_1+k, & d_2+k, & \ldots, & a_{n-2}+k, & d_{n-1}+k; & \\ b_1+k, & d_1+k, & b_2+k, & \ldots, & d_{n-2}+k, & b_{n-1}+k; & z \\ b_1-a_1, & 0, & b_2-a_2, & \ldots, & 0, & b_{n-1}-a_{n-1} & \end{array}\right).$$

$$= (1-z)^{d_1-a_1} \sum_{k\geq 0} z^k \tfrac{\Gamma(b_n-c_n+k)}{\Gamma(b_n-c_n)k!} \tfrac{\Gamma(b_n-a_n+k)}{\Gamma(b_n+k)} \tfrac{\Gamma(b_1)\ldots\Gamma(b_n)}{\Gamma(a_1)\ldots\Gamma(a_{n-1})\Gamma(b_n-a_n)} \tfrac{\Gamma(a_1+k)\ldots\Gamma(a_{n-1}+k)}{\Gamma(b_1+k)\ldots\Gamma(b_{n-1}+k)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(b_1+k)}{\Gamma(d_1+k)\Gamma(b_1-d_1)}\frac{\Gamma(d_1+k)}{\Gamma(a_1+k)\Gamma(d_1-a_1)}\cdots\frac{\Gamma(d_{n-2}+k)}{\Gamma(a_{n-2}+k)\Gamma(d_{n-2}-a_{n-2})}\frac{\Gamma(b_{n-1}+k)}{\Gamma(d_{n-1}+k)\Gamma(b_{n-1}-d_{n-1})}\times$$

$$\times \int\limits_{[0,1]^{2n-3}} \frac{x_1^{d_1+k-1}(1-x_1)^{b_1-d_1-1}}{(1-zx_1)^{b_1-a_1}}\cdots\frac{x_{2n-4}^{a_{n-2}+k-1}(1-x_{2n-4})^{d_{n-2}-a_{n-2}-1}x_{2n-3}^{d_{n-1}+k-1}(1-x_{2n-3})^{b_{n-1}-d_{n-1}-1}}{(1-zx_1\ldots x_{2n-3})^{b_{n-1}-a_{n-1}}}d\overline{x}''.$$

Вновь сгруппируем должным образом Гамма-множители и введём две дополнительных переменных интегрирования:

$$= (1-z)^{d_1-a_1}\sum_{k\geq 0} z^k \frac{\Gamma(b_n-a_n+k)}{\Gamma(b_n-a_n)k!}\frac{\Gamma(b_1)}{\Gamma(d_1)\Gamma(b_1-d_1)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(d_1)}{\Gamma(a_1)\Gamma(d_1-a_1)}\cdots\frac{\Gamma(b_{n-1})}{\Gamma(d_{n-1})\Gamma(b_{n-1}-d_{n-1})}\frac{\Gamma(d_{n-1})}{\Gamma(a_{n-1})\Gamma(d_{n-1}-a_{n-1})}\frac{\Gamma(b_n)}{\Gamma(b_n-c_n)\Gamma(c_n)}\times$$

$$\times \int\limits_{[0,1]^{2n-1}} \frac{x_1^{d_1+k-1}(1-x_1)^{b_1-d_1-1}}{(1-zx_1)^{b_1-a_1}}\cdots\frac{x_{2n-4}^{a_{n-2}+k-1}(1-x_{2n-4})^{d_{n-2}-a_{n-2}-1}x_{2n-3}^{d_{n-1}+k-1}(1-x_{2n-3})^{b_{n-1}-d_{n-1}-1}}{(1-zx_1\ldots x_{2n-3})^{b_{n-1}-a_{n-1}}}\times$$

$$\times x_{n-2}^{a_{n-1}+k-1}(1-x_{n-2})^{d_{n-1}-a_{n-1}-1}x_{2n-1}^{d_n+k-1}(1-x_{2n-1})^{b_n-d_n-1}dx_1\ldots dx_{2n-1} =$$

$$= (1-z)^{d_1-a_1}\tfrac{\Gamma(b_1)}{\Gamma(d_1)\Gamma(b_1-d_1)}\tfrac{\Gamma(d_1)}{\Gamma(a_1)\Gamma(d_1-a_1)}\cdots\tfrac{\Gamma(b_{n-1})}{\Gamma(d_{n-1})\Gamma(b_{n-1}-d_{n-1})}\tfrac{\Gamma(d_{n-1})}{\Gamma(a_{n-1})\Gamma(d_{n-1}-a_{n-1})}\tfrac{\Gamma(b_n)}{\Gamma(d_n)\Gamma(b_n-d_n)}\times$$

$$\times \int\limits_{[0,1]^{2n-1}} \frac{x_1^{d_1-1}(1-x_1)^{b_1-d_1-1}}{(1-zx_1)^{b_1-a_1}}\cdots\frac{x_{2n-4}^{a_{n-2}-1}(1-x_{2n-4})^{d_{n-2}-a_{n-2}-1}x_{2n-3}^{d_{n-1}-1}(1-x_{2n-3})^{b_{n-1}-d_{n-1}-1}}{(1-zx_1\ldots x_{2n-3})^{b_{n-1}-a_{n-1}}}\times$$

$$\times\frac{x_{2n-2}^{a_{n-1}-1}(1-x_{2n-2})^{d_{n-1}-1}x_{2n-1}^{d_n-a_{n-1}-1}(1-x_{2n-1})^{b_n-d_n-1}}{(1-zx_1\ldots x_{2n-1})^{b_n-a_n}}dx_1\ldots dx_{2n-1} =$$

$$= (1-z)^{d_1-a_1} I_{2n-1}\left(\begin{array}{cccccc|c} d_1, & a_1, & d_2, & \ldots, & a_{n-1}, & b_n-c_n; & \\ b_1, & d_1, & b_2, & \ldots, & d_{n-1}, & b_n; & z \\ b_1-a_1, & 0, & b_2-a_2 & \ldots, & 0, & b_n-a_n & \end{array}\right).$$

Теорема 2 доказана.

Внимательный читатель заметит, что при применении к правой части тождества (34) утверждения (35) может быть получен результат второй теоремы. Обратим внимание и на результат применения (34) к правой части (35). Будем иметь в итоге $I_n(a_1,\ldots,a_{n-1},a_n;b_1,\ldots,b_{n-1},b_n;0,\ldots,0,c_n\,|\,z) = I_n(a_1,\ldots,a_{n-1},c_n;b_1,\ldots,b_{n-1},b_n;0,\ldots,0,a_n\,|\,z)$. Также зная разложение в ряд интеграла (3), нетрудно догадаться, что если в Теореме 1 положить $\overline{c}=(0,\ldots,0,c_n)$, то получится

$$
I_n \left(\begin{array}{ccccc} c_n, & a_1, & \ldots, & a_{n-2}, & a_{n-1}; \\ b_1, & b_2, & \ldots, & b_{n-1}, & b_n; \\ b_1 - a_1, & b_2 - a_2, & \ldots, & b_{n-1} - a_{n-1}, & b_n - a_n \end{array} \middle| \, \frac{-z}{1-z} \right),
$$

а это не что иное, как (34), применённое к $I_n(c_n, a_1, \ldots, a_{n-1}; b_1, \ldots, b_n; 0, \ldots, 0, a_n \,|\, z)$.

Используемый же в доказательствах метод был почерпнут из работы С. Злобина [14]. Этот метод заключается в разложении в ряд последнего знаменателя с последующим интегрированием по последней переменной, применением предположения индукции и обратным сворачиванием ряда в знаменатель.

Список литературы

[1] **M. E. Hoffman** "Multiple harmonic series"// Pacific journal of mathematics 1992. Vol. 152. №2, 272-290.

[2] **D. Zagier** "Evaluation of the multiple zeta values $\zeta(2,...,2,3,2,...,2)$"// Annals of Math. 175 (2012), 977-1000.

[3] **Jonathan M. Borwein, David M. Bradley, David J. Broadhurst and Petr Lisonek** "Special values of multiple polylogarithms"// Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), 907-941.

[4] **В. В. Зудилин** "Алгебраические соотношения для кратных дзета-значений", *УМН*, 2003, том 58, выпуск 1(349), 3–32

[5] **Д. В. Васильев** "Некоторые формулы для дзета-функции Римана в целых точках"// Вестн. Моск. Ун- та. Матем. Механ. 1996, N 1, 81-84.

[6] **С. С. Злобин** Производящие функции для значений кратной дзета-функции // Вестник МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 2005. №2, 55-59.

[7] **F. C. S. Brown** "Motivic periods and $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$"in *Proceedings of the International Conference of Mathematicians (Seoul, 2014)* // Vol. 2, S. Y. Jang et. al. (eds.), Kyung Moo Sa, Seoul, 2014, pp. 309-332

[8] **Kh. Hessami Pilehrood, T. Hessami Pilehrood, and R. Tauraso** ”New properties of multiple harmonic sums modulo p and p-analogues of Leshchiner's series"// Trans. Amer. Math. Soc. 366 (2014), 3131-3159.

[9] **J. Zhao** ”Identity families of multiple harmonic sums and multiple zeta (star) families"// Department of Mathematics, Eckerd College, St. Petersburg, FL 33711.

[10] **S. Yamamoto** "Explicit evaluation of certain sums of multiple zeta-star values"// JSPS Research Fellow, Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Meguro, Tokyo, 153-8914 Japan.

[11] **D. Bowman and D. M. Bradley** "The algebra and combinatorics of shuffles and multiple zeta values"// J. Combin. Theory Ser. A 97 (2002), 43–61.

[12] **Г. Бейтман, А. Эрдейи** *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра.* Издательство «МИР», 1965.

[13] **Е. А. Уланский** "Обобщение одного тождества для интегралов гипергеометрического типа", *УМН*, **98:2** (2015) 318-320.

[14] **С. А. Злобин** "О некоторых интегральных тождествах", *Успехи матем. наук*, **57:3** (2002) 153-154.