ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

Мера иррациональности π

Выполнил студент
605 группы:
Вахитов Мурат Валиуллович

____
подпись студента

Научный руководитель:
Чл.-корр.РАН
Нестеренко Юрий Валентинович

____
подпись научного руководителя

Москва
2019

Содержание

1. Введение **3**

2. Основная часть **4**

2.1. Вычисление интеграла. 4

2.2. Оценка знаменателей. 9

2.3. Асимптотика. 26

2.4. Доказательство теоремы. 41

3. Выводы и заключение **43**

1. Введение

Для каждого иррационального числа α можно определить количественную характеристику того, насколько α отличается от рациональных. Эта характеристика носит название показатель (мера) иррациональности и определяется как точная нижняя грань множества чисел μ, таких что неравенство $0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{\mu}}$ имеет лишь конечное число решений в целых числах p и $q > 0$.
Для этой характеристики принято обозначение $\mu(\alpha)$. Для числа π неизвестно точного значения $\mu(\pi)$, но есть методы с помощью которых можно получить оценку сверху на эту величину.

В теории диофантовых приближений роль весьма полезного инструмента играют интегралы вида

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\left(\frac{n!}{z(z-1)\cdots(z-n)}\right)^{K+1} e^{tz}dz\,,$$

где C контур, содержащий все полюса интегрирования.

В 1953 г. К. Малер [1], используя этот интеграл в случае $K = 10$, установил, что $\mu(\pi) < 42$. Он также установил, что показатель 42 может быть понижен до 30. Позже M. Miggnotte [2] и Г. В. Чудновский [3] улучшили эту оценку до 20 и $19,8899944...$ соответственно.

В 1989 г. Г. В. Чудновский и Д. В. Чудновский [4], используя многочлены Лежандра, получили, что мера иррациональности π^2 не превосходит $7,51$, откуда, в частности, следует, что $\mu(\pi) < 15,02$.

В 1991 г. М. Хата [5], пользуясь классическим методом и модифицировав интеграл (1), получил следующую оценку: $\mu(\pi) < 13,398$. Впоследствии, ему удалось установить новую оценку $8,0161$, но уже с использованием интеграла другого вида [6]. И, наконец, в 2008 г. В. Х. Салихов [10] получил наилучшую на сегодня оценку $7,06063\ldots$.

В моей дипломной работе предлагается иной способ вывода оценки М. Хаты: $\mu(\pi) < 13,398$, опирающийся на методы доказательства Ю.В. Нестеренко иррациональности числа $\zeta(3)$ [8] и на методы вывода оценки меры иррациональности $\ln 2$ [9].

2. Основная часть

2.1. Вычисление интеграла.

Рассмотрим следующий интеграл

$$I_n(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \Phi_{n,m}(\zeta)e^{t\zeta}d\zeta\,, \tag{1}$$

где

$$\Phi_{n,m}(\zeta) = R_{n+3m}(\zeta)R_{n+m}(\zeta-m)R_{n-m}(\zeta-2m)R_{n-3m}(\zeta-3m)\,, \tag{2}$$

$$R_n(\zeta) = \frac{n!}{\zeta(\zeta-1)\cdots(\zeta-n)} \tag{3}$$

и $m = [\lambda n]$, $\lambda \in \left(0\,, \frac{1}{3}\right)$ для каждого целого $n \geq 0$, а C - замкнутый контур, включающий все полюса $\zeta = 0, 1, ..., n+3m$ интегрирования.

Предложение 1. *Функция $\Phi_{n,m}(\zeta)$, определенная формулами (2) и (3), представляется в следующем виде:*

$$\Phi_{n,m}(\zeta) = \frac{\gamma_{n,m}}{\prod\limits_{j=0}^{n+3m}(\zeta-j)^{d_j+1}}\,, \tag{4}$$

где $\gamma_{n,m} = (n+3m)!(n+m)!(n-m)!(n-3m)!\,,$

$$d_j = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq j < m\ ,\ n+2m < j \leq n+3m; \\ 1, & \text{если } m \leq j < 2m\ ,\ n+m < j \leq n+2m; \\ 2, & \text{если } 2m \leq j < 3m\ ,\ n < j \leq n+m; \\ 3, & \text{если } 3m \leq j \leq n. \end{cases}$$

Доказательство. Имеем $R_n(\zeta) = \dfrac{n!}{\prod\limits_{j=0}^{n}(\zeta-j)}$. Тогда

$$\Phi_{n,m}(\zeta) = \frac{(n+3m)!}{\prod\limits_{j=0}^{n+3m}(\zeta-j)}\cdot\frac{(n+m)!}{\prod\limits_{j=0}^{n+m}(\zeta-m-j)}\cdot\frac{(n-m)!}{\prod\limits_{j=0}^{n-m}(\zeta-2m-j)}\cdot\frac{(n-3m)!}{\prod\limits_{j=0}^{n-3m}(\zeta-3m-j)} =$$

$$= \frac{\gamma_{n,m}}{\prod\limits_{j=0}^{n+3m}(\zeta-j)\prod\limits_{j=m}^{n+2m}(\zeta-j)\prod\limits_{j=2m}^{n+m}(\zeta-j)\prod\limits_{j=3m}^{n}(\zeta-j)}\,.$$

Обозначим:

$$A_1 = \{j:\ 0 \le j < m\ ,\ n+2m < j \le n+3m\},$$
$$A_2 = \{j:\ m \le j < 2m\ ,\ n+m < j \le n+2m\},$$
$$A_3 = \{j:\ 2m \le j < 3m\ ,\ n < j \le n+m\},$$
$$A_4 = \{j:\ 3m \le j \le n\}.$$

Заметим, что $A := A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3 \sqcup A_4 = \{0, 1, ..., n+3m\}$. Тогда получим, что

$$\prod_{j=0}^{n+3m} (\zeta - j) = \prod_{j\in A_1} (\zeta - j) \prod_{j\in A_2} (\zeta - j) \prod_{j\in A_3} (\zeta - j) \prod_{j\in A_4} (\zeta - j)\,,$$
$$\prod_{j=m}^{n+2m} (\zeta - j) = \prod_{j\in A_2} (\zeta - j) \prod_{j\in A_3} (\zeta - j) \prod_{j\in A_4} (\zeta - j)\,,$$
$$\prod_{j=2m}^{n+m} (\zeta - j) = \prod_{j\in A_3} (\zeta - j) \prod_{j\in A_4} (\zeta - j)\,,$$
$$\prod_{j=3m}^{n} (\zeta - j) = \prod_{j\in A_4} (\zeta - j)\,.$$

Перемножая эти равенства, получим:

$$\prod_{j=0}^{n+3m} (\zeta - j) \prod_{j=m}^{n+2m} (\zeta - j) \prod_{j=2m}^{n+m} (\zeta - j) \prod_{j=3m}^{n} (\zeta - j) = \prod_{j\in A_1} (\zeta - j) \prod_{j\in A_2} (\zeta - j)^2 \prod_{j\in A_3} (\zeta - j)^3 \times$$
$$\times \prod_{j\in A_4} (\zeta - j)^4 = \prod_{j\in A_1} (\zeta - j)^{d_j+1} \prod_{j\in A_2} (\zeta - j)^{d_j+1} \prod_{j\in A_3} (\zeta - j)^{d_j+1} \prod_{j\in A_4} (\zeta - j)^{d_j+1} =$$
$$= \prod_{j\in A} (\zeta - j)^{d_j+1} = \prod_{j=0}^{n+3m} (\zeta - j)^{d_j+1}\,.$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\Phi_{n,m}(\zeta) = \frac{\gamma_{n,m}}{\prod\limits_{j=0}^{n+3m} (\zeta - j)^{d_j+1}}\,,$$

где $\gamma_{n,m} = (n+3m)!(n+m)!(n-m)!(n-3m)!\,,\quad d_j = \begin{cases} 0, & \text{если } j \in A_1; \\ 1, & \text{если } j \in A_2; \\ 2, & \text{если } j \in A_3; \\ 3, & \text{если } j \in A_4. \end{cases}$ $\square$

Следствие 1. *Функция $\Phi_{n,m}(\zeta)$ может быть представлена в следующем виде*

$$\Phi_{n,m}(\zeta) = \sum_{k=0}^{3} \sum_{j=km}^{n+(3-k)m} \frac{c_{j,k}}{(\zeta - j)^{k+1}}\,, \tag{5}$$

где $c_{j,k}$ - рациональные числа, $0 \le k \le 3$, $j = 0, ..., n+3m$.

Доказательство. Функция $\Phi_{n,m}(\zeta)$ представляет собой рациональную функцию, в знаменателе которой стоит многочлен, у которого максимальная кратность корней равна 4. Таким образом, по теореме о разложении рациональной функции на сумму простейших дробей, функция $\Phi_{n,m}(\zeta)$ представляется в виде:

$$\Phi_{n,m}(\zeta) = \sum_{k=0}^{3} \sum_{j=0}^{n+3m} \frac{c_{j,k}}{(\zeta - j)^{k+1}} \, ,$$

где $c_{j,k}$ - рациональные числа, $0 \le k \le 3$, $j = 0, ..., n+3m$. Причём, заметим, что если $k > d_j$, то степень простейшей дроби $\dfrac{c_{j,k}}{(\zeta - j)^{k+1}}$ больше d_j+1, что из представления (4) не может быть, если $c_{j,k} \neq 0$. Таким образом, при $k > d_j$ выполняется $c_{j,k} = 0$. Тогда при $0 \le j < km$ и при $n + (3 - k)m < j \le n + 3m$ выполнено $c_{j,k} = 0$. □

Лемма 1. *Пусть даны $q+1$ различных комплексных чисел α_0 , ... , α_q и $q+1$ целых неотрицательных чисел n_0 , ... , n_q . Положим также*

$$N + 1 = \sum_{j=0}^{q}(n_j + 1) \, , \; Q(x) = \prod_{j=0}^{q}(x - \alpha_j)^{n_j+1} \; .$$

Тогда справедливо следующее тождество

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)}{Q(\zeta)}d\zeta = \sum_{j=0}^{q}\sum_{r=0}^{n_j} \frac{f^{(n_j-r)}(\alpha_j)}{(n_j - r)!r!}\Big(\frac{d}{dx}\Big)^r \left(\frac{(x-\alpha_j)^{n_j+1}}{Q(x)}\right)\Big|_{x=\alpha_j} \, , \tag{6}$$

где C есть окружность, содержащая внутри все точки α_0, ... , α_q, а $f(\zeta)$ - функция аналитическая в некоторой области, содержащей окружность C вместе с её внутренностью.

Предложение 2. *Коэффициенты $c_{j,k,n}$, $j = 0, ..., n + 3m$, $0 \le k \le d_j$ из представления (5) функции $\Phi_{n,m}(\zeta)$ могут быть вычислены по формуле:*

$$c_{j,k} = \gamma_{n,m} \sum_{\bar{l}} \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n+3m} \frac{(-1)^{l_i}(d_i + l_i)!}{d_i! l_i!}(j - i)^{-1-d_i-l_i} \, , \tag{7}$$

где суммирование происходит по всем наборам целых неотрицательных чисел $l_0, ..., l_{j-1}, l_{j+1}, ...l_{n+3m}$, сумма которых равна $d_j - k$.

Доказательство. Возьмём $q = n + 3m$, $\alpha_j = j$, $n_j = d_j$, $Q(x) = \prod\limits_{j=0}^{n+3m}(x - j)^{d_j+1}$, $f(\zeta) = \gamma_{n,m}e^{t\zeta}$. Применив тождество Эрмита, получим

$$I_n(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)}{Q(\zeta)}d\zeta = \sum_{j=0}^{n+3m}\sum_{r=0}^{d_j} \frac{f^{(d_j-r)}(\alpha_j)}{(d_j - r)!r!}\Big(\frac{d}{dx}\Big)^r \left(\frac{(x-\alpha_j)^{d_j+1}}{Q(x)}\right)\Big|_{x=\alpha_j} =$$

$$= \gamma_{n,m} \sum_{j=0}^{n+3m}\sum_{r=0}^{d_j} \frac{t^{d_j-r}e^{jt}}{(d_j - r)!}\cdot\frac{1}{r!}\Big(\frac{d}{dx}\Big)^r \left(\frac{(x-j)^{d_j+1}}{Q(x)}\right)\Big|_{x=j} = \gamma_{n,m}\sum_{j=0}^{n+3m} P_j(t)e^{jt} \, ,$$

где

$$P_j(t) = \sum_{r=0}^{d_j} a_{jr} \frac{t^{d_j - r}}{(d_j - r)!}$$

и

$$a_{jr} = \frac{1}{r!}\Big(\frac{d}{dx}\Big)^r \left(\frac{(x-j)^{d_j+1}}{Q(x)}\right)\Big|_{x=j} .$$

Вычислим a_{jr} с помощью формулы Лейбница для произведения:

$$a_{jr} = \frac{1}{r!}\Big(\frac{d}{dx}\Big)^r \left(\frac{(x-j)^{d_j+1}}{Q(x)}\right)\Big|_{x=j} = \frac{1}{r!}\Big(\frac{d}{dx}\Big)^r \left(\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n+3m} (x-i)^{-1-d_i}\right)\Big|_{x=j} =$$

$$= \frac{1}{r!}\sum_{\bar{l}} \frac{r!}{l_0! \cdots l_{j-1}! l_{j+1}! \cdots l_{n+3m}!} \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n+3m} \Big(\frac{d}{dx}\Big)^{l_i} (x-i)^{-1-d_i}\Big|_{x=j} =$$

$$= \sum_{\bar{l}} \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n+3m} \frac{1}{l_i!}\Big(\frac{d}{dx}\Big)^{l_i} (x-i)^{-1-d_i}\Big|_{x=j} = \sum_{\bar{l}} \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n+3m} \frac{(-1)^{l_i}(d_i+l_i)!}{d_i! l_i!}(j-i)^{-1-d_i-l_i} .$$

Таким образом, мы имеем:

$$a_{jr} = \sum_{\bar{l}} \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n+3m} \frac{(-1)^{l_i}(d_i+l_i)!}{d_i! l_i!}(j-i)^{-1-d_i-l_i} , \tag{8}$$

где суммирование происходит по всем наборам целых неотрицательных чисел $l_0, ..., l_{j-1}, l_{j+1}, ...l_{n+3m}$, сумма которых равна r. Итак, мы получаем

$$I_n(t) = \gamma_{n,m} \sum_{j=0}^{n+3m} P_j(t) e^{jt} = \sum_{j=0}^{n+3m} e^{jt} \sum_{r=0}^{d_j} \gamma_{n,m} a_{jr} \frac{t^{d_j-r}}{(d_j-r)!} . \tag{9}$$

С другой стороны, мы можем воспользоваться формулой (5). Тогда получим

$$I_n(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \sum_{j=0}^{n+3m}\sum_{k=0}^{3} c_{j,k}\frac{e^{t\zeta}d\zeta}{(\zeta-j)^{k+1}} = \sum_{j=0}^{n+3m}\sum_{k=0}^{3} c_{j,k}\frac{t^k}{k!}e^{jt} = \sum_{j=0}^{n+3m} e^{jt}\sum_{k=0}^{3} c_{j,k}\frac{t^k}{k!} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n+3m} e^{jt}\sum_{k=0}^{d_j} c_{j,k}\frac{t^k}{k!} \qquad \text{(мы использовали } c_{j,k}=0 \text{ при } k > d_j\text{).}$$

Сделаем замену $r = d_j - k$ в формуле (9) и приравняем её к выражению из последнего равенства. Получим

$$I_n(t) = \sum_{j=0}^{n+3m} e^{jt}\sum_{k=0}^{d_j} \gamma_{n,m} a_{j,d_j-k}\frac{t^k}{k!} = \sum_{j=0}^{n+3m} e^{jt}\sum_{k=0}^{d_j} c_{j,k}\frac{t^k}{k!} .$$

Так как функции $t^k e^{jt}$, $0 \le k \le 3$, $j = 0, ..., n+3m$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$, то получаем, что $c_{j,k} \equiv \gamma_{n,m} a_{j,d_j-k}$. Применив формулу (8) для коэффициентов a_{j,d_j-k} , получим требуемую формулу (7) на коэффициенты $c_{j,k}$. □

Замечание 1. Формулу (7) можно записать в следующем виде:

$$c_{j,k} = (-1)^{d_j-k} B_j L_{j,k} \ , \tag{10}$$

$$\text{где} \quad B_j = \gamma_{n,m} \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n+3m} (j-i)^{-1-d_i} \ , \tag{11}$$

$$L_{j,k} = \sum_{\bar{l}} \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n+3m} \nu(d_i, l_i)(j-i)^{-l_i} \ , \tag{12}$$

$\nu(d_i, l_i) = \binom{d_i + l_i}{d_i} \in \mathbb{Z}$, а суммирование в $L_{j,k}$ происходит по всем наборам целых неотрицательных чисел $l_0, ..., l_{j-1}, l_{j+1}, ...l_{n+3m}$, сумма которых равна $d_j - k$.

Доказательство. Действительно, используя формулу (7), мы получим

$$c_{j,k} = \gamma_{n,m} \sum_{\bar{l}} \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n+3m} \frac{(-1)^{l_i}(d_i+l_i)!}{d_i! l_i!} (j-i)^{-1-d_i-l_i} =$$

$$= \gamma_{n,m} \sum_{\bar{l}} \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n+3m} (-1)^{l_i} \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n+3m} \nu(d_i, l_i)(j-i)^{-1-d_i-l_i} =$$

$$= \gamma_{n,m} \sum_{\bar{l}} (-1)^{\sum\limits_i l_i} \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n+3m} \nu(d_i, l_i)(j-i)^{-1-d_i-l_i} =$$

$$= \gamma_{n,m} \sum_{\bar{l}} (-1)^{d_j-k} \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n+3m} \nu(d_i, l_i)(j-i)^{-1-d_i-l_i} =$$

$$= \gamma_{n,m} \sum_{\bar{l}} (-1)^{d_j-k} \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n+3m} (j-i)^{-1-d_i} \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n+3m} \nu(d_i, l_i)(j-i)^{-l_i} =$$

$$= (-1)^{d_j-k} \gamma_{n,m} \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n+3m} (j-i)^{-1-d_i} \sum_{\bar{l}} \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n+3m} \nu(d_i, l_i)(j-i)^{-l_i} = (-1)^{d_j-k} B_j L_{j,k} \ .$$

□

Замечание 2.
Интеграл $I_n(t)$ может быть записан как

$$I_n(t) = \sum_{k=0}^{3} Q_{k,n}(e^t)\frac{t^k}{k!}, \quad Q_{k,n}(w) = \sum_{j=km}^{n+(3-k)m} c_{j,k} w^j \, .$$

Доказательство. Используя формулу (5), запишем

$$I_n(t) = \sum_{k=0}^{3} c_{j,k} \sum_{j=km}^{n+(3-k)m} \frac{t^k}{k!} e^{jt} = \sum_{k=0}^{3} Q_{k,n}(e^t)\frac{t^k}{k!}.$$

□

2.2. Оценка знаменателей.

Введём обозначение T_n для наименьшего общего кратного чисел $1, ..., n$.

Лемма 2. *Пусть* $u, v \in \mathbb{Z}$, $v \geq u+1$, $u \geq 0$. *Тогда*

$$T_v \cdot \frac{u!(v-u-1)!}{v!} \in \mathbb{Z}. \tag{13}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $R_u(z) = \dfrac{u!}{z(z-1)\cdot \ldots \cdot (z-u)}$. Функция $R_u(z)$ представляется в виде суммы простейших дробей с целыми коэффициентами. Действительно, $R(z) = \sum\limits_{i=0}^{u} \dfrac{b_i}{z-i}$, где b_i есть ничто иное как вычет функции $R_u(z)$ в точке $z = i$. Тогда по формуле для вычета находим

$$b_i = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-i|=\epsilon} R_u(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-i|=\epsilon} \frac{u!dz}{z(z-1)\cdot \ldots \cdot (z-u)} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-i|=\epsilon} \frac{u!dz}{(z-i)\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{u}(z-j)} = \frac{u!}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{u}(i-j)} = \frac{u!}{i!\cdot(-1)\cdot \ldots \cdot(-(u-i))} =$$
$$= \frac{u!}{(-1)^{u-i}\cdot i!(u-i)!} = (-1)^{u+i}\binom{u}{i} \in \mathbb{Z} \, .$$

Следовательно, $T_v \cdot R_u(v) = \sum\limits_{i=0}^{u} (-1)^{i+u} \dbinom{u}{i} \cdot \dfrac{T_v}{v-i} \in \mathbb{Z}$ (мы воспользовались свойством НОКа: $\dfrac{T_v}{v-i} \in \mathbb{Z}$). Заметим, что $R_u(v) = \dfrac{u!}{v(v-1)\cdot \ldots \cdot (v-u)} = \dfrac{u!(v-u-1)!}{v!}$.
Таким образом, лемма доказана. □

Предложение 3. *Для каждого* k , $0 \le k \le 3$ *и* $j = 0, ..., n+3m$ *выполнено*

$$T_{n+3m}T_{n+2m}T_{n+m} \cdot c_{j,k} \in \mathbb{Z}\,. \tag{14}$$

Доказательство. Итак, согласно следствию 1 коэффициенты $c_{j,k} = 0$ при $k > d_j$. При $0 \le k \le d_j$ коэффициенты имеют вид: $c_{j,k} = (-1)^{d_j - k} B_j L_{j,k}$. Рассмотрим случаи: 1) $j \in A_1$, 2) $j \in A_2$, 3) $j \in A_3$, 4) $j \in A_4$.

1) $j \in A_1$: согласно этому $d_j = 0 \Rightarrow k = 0$. Таким образом, в формуле (12) суммирование происходит по всем наборам целых неотрицательных чисел l_i , $i \neq j$, $i = 0, ..., n+3m$, сумма которых равна 0. А это значит, что все $l_i = 0 \Rightarrow \nu(d_i, l_i) = 1$. Далее, по формуле (12) находим: $L_{j,k} = 1$. А из формулы (10) следует, что $c_{j,k} = B_j$. Вычислим коэффициент B_j :

$$\begin{aligned}
B_j &= \gamma_{n,m} \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n+3m} (j-i)^{-1-d_i} = \\
&= \gamma_{n,m} \prod_{\substack{i\in A_1\\ i\neq j}} (j-i)^{-1-d_i} \prod_{i\in A_2} (j-i)^{-1-d_i} \prod_{i\in A_3} (j-i)^{-1-d_i} \prod_{i\in A_4} (j-i)^{-1-d_i} = \\
&= \gamma_{n,m} \prod_{\substack{i\in A_1\\ i\neq j}} (j-i)^{-1} \prod_{i\in A_2} (j-i)^{-2} \prod_{i\in A_3} (j-i)^{-3} \prod_{i\in A_4} (j-i)^{-4} = \\
&= \gamma_{n,m} \prod_{\substack{i\in A_1\sqcup A_2\sqcup A_3\sqcup A_4\\ i\neq j}} (j-i)^{-1} \prod_{i\in A_2\sqcup A_3\sqcup A_4} (j-i)^{-1} \prod_{i\in A_3\sqcup A_4} (j-i)^{-1} \prod_{i\in A_4} (j-i)^{-1} = \\
&= \gamma_{n,m} \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n+3m} (j-i)^{-1} \prod_{i=m}^{n+2m} (j-i)^{-1} \prod_{i=2m}^{n+m} (j-i)^{-1} \prod_{i=3m}^{n} (j-i)^{-1}\,.
\end{aligned}$$

Вычислим произведения $\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n+3m} (j-i)$, $\prod\limits_{i=m}^{n+2m} (j-i)$, $\prod\limits_{i=2m}^{n+m} (j-i)$, $\prod\limits_{i=3m}^{n} (j-i)$:

$$\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n+3m} (j-i) = j! \cdot (-1) \cdot ... \cdot \big(-(n+3m-j)\big) = (-1)^{n+3m-j} \cdot j!(n+3m-j)!$$

$$\prod_{i=m}^{n+2m} (j-i) = \big(j-m\big)\big(j-(m+1)\big) \cdot ... \cdot \big(j-(n+2m)\big) =$$

$$= \begin{cases} (-1)^{n+m+1} \dfrac{(n+2m-j)!}{(m-j-1)!} \quad , & \text{если } 0 \le j < m, \\ \dfrac{(j-m)!}{(j-n-2m-1)!} \quad , & \text{если } n+2m < j \le n+3m. \end{cases}$$

Аналогично,

$$\prod_{i=2m}^{n+m}(j-i)=\begin{cases}(-1)^{n-m+1}\dfrac{(n+m-j)!}{(2m-j-1)!} & , \quad \text{если } 0\le j<m,\\ \dfrac{(j-2m)!}{(j-n-m-1)!} & , \quad \text{если } n+2m<j\le n+3m,\end{cases}$$

$$\prod_{i=3m}^{n}(j-i)=\begin{cases}(-1)^{n-3m+1}\dfrac{(n-j)!}{(3m-j-1)!} & , \quad \text{если } 0\le j<m,\\ \dfrac{(j-3m)!}{(j-n-1)!} & , \quad \text{если } n+2m<j\le n+3m.\end{cases}$$

Используя определение $\gamma_{n,m}$, при $0\le j<m$ получим:

$$B_j=(-1)^{j+1}\binom{n+3m}{j}\cdot\frac{(n+m)!(m-j-1)!}{(n+2m-j)!}\cdot\frac{(n-m)!(2m-j-1)!}{(n+m-j)!}\cdot$$
$$\cdot\frac{(n-3m)!(3m-j-1)!}{(n-j)!}\ , \quad \text{при } 0\le j<m.$$

По Лемме 2 имеем
$T_{n+3m}\cdot\dfrac{(n+m)!(m-j-1)!}{(n+2m-j)!}\in\mathbb{Z}\,,\quad T_{n+2m}\cdot\dfrac{(n-m)!(2m-j-1)!}{(n+m-j)!}\in\mathbb{Z}\,,$
$T_{n+m}\cdot\dfrac{(n-3m)!(3m-j-1)!}{(n-j)!}\in\mathbb{Z}\,,\quad \forall j:\,0\le j<m\,.$
Таким образом, $T_{n+3m}T_{n+2m}T_{n+m}\cdot B_j\in\mathbb{Z}\Rightarrow T_{n+3m}T_{n+2m}T_{n+m}\cdot c_{j,k}\in\mathbb{Z}\,,\quad 0\le j<m\,.$

При $n+2m<j\le n+3m$:

$$B_j=(-1)^{n+3m-j}\binom{n+3m}{j}\cdot\frac{(n+m)!(j-n-2m-1)!}{(j-m)!}\cdot\frac{(n-m)!(j-n-m-1)!}{(j-2m)!}\cdot$$
$$\cdot\frac{(n-3m)!(j-n-1)!}{(j-3m)!}\ , \quad \text{при } n+2m<j\le n+3m.$$

Заменим в этой формуле j на $n+3m-j'$. Получим формулу, которая имеет такой же вид, как в случае $0\le j<m$, где вместо j будет стоять j' $(0\le j'<m)$, за исключением знака, который сменится на противоположный. Следовательно,

$$T_{n+3m}T_{n+2m}T_{n+m}\cdot c_{j,k}\in\mathbb{Z},\quad \forall j\in A_1,\,\forall k\,.$$

2) $j\in A_2\Rightarrow d_j=1,\ 0\le k\le 1$. Вычислим для начала B_j. Следуя аналогично предыдущему пункту, получим:

$$B_j=\gamma_{n,m}\prod_{\substack{i=0\\ i\ne j}}^{n+3m}(j-i)^{-1}\prod_{\substack{i=m\\ i\ne j}}^{n+2m}(j-i)^{-1}\prod_{i=2m}^{n+m}(j-i)^{-1}\prod_{i=3m}^{n}(j-i)^{-1}\ .$$

Как и в первом случае

$$\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n+3m}(j-i)=j!\cdot(-1)\cdot\ldots\cdot(-(n+3m-j))=(-1)^{n+3m-j}\cdot j!(n+3m-j)!$$

Также

$$\prod_{\substack{i=m\\ i\neq j}}^{n+2m}(j-i)=(-1)^{n+2m-j}\cdot(j-m)!(n+2m-j)!$$

Соответственно,

$$\prod_{i=2m}^{n+m}(j-i)=\begin{cases}(-1)^{n-m+1}\dfrac{(n+m-j)!}{(2m-j-1)!}\ , & \text{если } m\le j<2m,\\ \dfrac{(j-2m)!}{(j-n-m-1)!}\ , & \text{если } n+m<j\le n+2m,\end{cases}$$

$$\prod_{i=3m}^{n}(j-i)=\begin{cases}(-1)^{n-3m+1}\dfrac{(n-j)!}{(3m-j-1)!}\ , & \text{если } m\le j<2m,\\ \dfrac{(j-3m)!}{(j-n-1)!}\ , & \text{если } n+m<j\le n+2m.\end{cases}$$

Таким образом, при $m\le j<2m$, используя определение $\gamma_{n,m}$, получим

$$B_j=(-1)^m\binom{n+3m}{j}\binom{n+m}{j-m}\cdot\frac{(n-m)!(2m-j-1)!}{(n+m-j)!}\cdot\frac{(n-3m)!(3m-j-1)!}{(n-j)!}\ .$$

По лемме 2:
$T_{n+2m}\cdot\dfrac{(n-m)!(2m-j-1)!}{(n+m-j)!}\in\mathbb{Z}\,,\quad T_{n+m}\cdot\dfrac{(n-3m)!(3m-j-1)!}{(n-j)!}\in\mathbb{Z}\,,$
$\forall j:\ m\le j<2m\,.$
Также очевидно, что $\dbinom{n+3m}{j}\in\mathbb{Z}\,,\ \dbinom{n+m}{j-m}\in\mathbb{Z}\,.$ Следовательно,
$T_{n+2m}T_{n+m}\cdot B_j\in\mathbb{Z}\,,\quad \forall j:\ m\le j<2m\,.$

При $n+m<j\le n+2m$:

$$B_j=(-1)^m\binom{n+3m}{j}\binom{n+m}{j-m}\cdot\frac{(n-m)!(j-n-m-1)!}{(j-2m)!}\cdot\frac{(n-3m)!(j-n-1)!}{(j-3m)!}\ .$$

Аналогично пункту 1), заменим j на $n+3m-j'$ и получим, что $B_j=B_{j'}$, где $m\le j'<2m$. Следовательно, $T_{n+2m}T_{n+m}\cdot B_j\in\mathbb{Z}\,,\quad \forall j\in A_2$.
Теперь рассмотрим $L_{j,k}$: k может принимать два значения: 0 и 1. Суммирование в $L_{j,k}$ происходит по всем неотрицательным целым наборам $\{l_i\}$, для которых выполнено $\sum\limits_i l_i=1-k$. Рассмотрим два варианта: а) $k=0$, б) $k=1$.

а) $k=0$: тогда $\sum\limits_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n+3m} l_i = 1 \Rightarrow \exists\, i_0 \neq j\colon \quad l_{i_0}=1$, а оставшиеся l_i равны нулю $\Rightarrow$ $\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n+3m} \nu(d_i,l_i)(j-i)^{-l_i} = \nu(d_{i_0},1)(j-i_0)^{-1}$. А суммирование в (12) будет идти по всем $i_0 \neq j$, $i_0=0,...,n+3m$. То есть

$$L_{j,k} = \sum_{\bar{l}} \prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n+3m} \nu(d_i,l_i)(j-i)^{-l_i} = \sum_{\substack{i_0=0\\i_0\neq j}}^{n+3m} \frac{\nu(d_{i_0},1)}{j-i_0} = \sum_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n+3m} \frac{\nu(d_i,1)}{j-i} \ .$$

Заметим, что так как $j \in A_2$, то $1 \leq |j-i| \leq n+2m$, $\forall i \neq j$, $i=0,...,n+3m \Rightarrow$

$$T_{n+3m}L_{j,k} = \sum_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n+3m} \nu(d_i,1)\cdot \frac{T_{n+3m}}{j-i} \in \mathbb{Z} \ .$$

Согласно формуле (10) получим

$$T_{n+3m}T_{n+2m}T_{n+m}\cdot c_{j,k} = (-1)\cdot T_{n+2m}T_{n+m}B_j \cdot T_{n+3m}L_{j,k} \in \mathbb{Z}, \quad \forall j \in A_2 \text{ и } k=0.$$

б) $k=1$: тогда $\sum\limits_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n+3m} l_i = 0 \Rightarrow$ все $l_i=0 \Rightarrow$ все $\nu(d_i,l_i)=1$. По формуле (12) находим: $L_{j,k}=1$, $\forall j \in A_2$. Следовательно, по формуле (10) получаем $c_{j,k}=B_j$. А значит $T_{n+3m}T_{n+2m}T_{n+m}\cdot c_{j,k} = T_{n+3m}\cdot T_{n+2m}T_{n+m}B_j \in \mathbb{Z}$, $\forall j \in A_2$ и $k=1$.
Таким образом, мы доказали

$$T_{n+3m}T_{n+2m}T_{n+m}\cdot c_{j,k} \in \mathbb{Z}, \quad \forall j \in A_2,\, \forall k\,.$$

3) $j \in A_3 \Rightarrow d_j = 2$, $0 \leq k \leq 2$. Также как в предыдущих пунктах находим B_j:

$$B_j = \gamma_{n,m} \prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n+3m} (j-i)^{-1} \prod_{\substack{i=m\\i\neq j}}^{n+2m} (j-i)^{-1} \prod_{\substack{i=2m\\i\neq j}}^{n+m} (j-i)^{-1} \prod_{i=3m}^{n} (j-i)^{-1} \ ,$$

$$\prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n+3m} (j-i) = j!\cdot(-1)\cdot ...\cdot\big(-(n+3m-j)\big) = (-1)^{n+3m-j}\cdot j!(n+3m-j)! \ ,$$

$$\prod_{\substack{i=m\\i\neq j}}^{n+2m} (j-i) = (-1)^{n+2m-j}\cdot (j-m)!(n+2m-j)! \ ,$$

$$\prod_{\substack{i=2m\\ i\neq j}}^{n+m}(j-i)=(-1)^{n+m-j}\cdot(j-2m)!(n+m-j)!\ ,$$

$$\prod_{i=3m}^{n}(j-i)=\begin{cases}(-1)^{n-3m+1}\dfrac{(n-j)!}{(3m-j-1)!} & ,\quad \text{если } 2m\le j<3m,\\ \dfrac{(j-3m)!}{(j-n-1)!} & ,\quad \text{если } n<j\le n+m.\end{cases}$$

Отсюда, окончательно находим B_j:
при $2m\le j<3m$:

$$B_j=(-1)^{j+m+1}\binom{n+3m}{j}\binom{n+m}{j-m}\binom{n-m}{j-2m}\cdot\frac{(n-3m)!(3m-j-1)!}{(n-j)!}\ ,$$

при $n<j\le n+m$:

$$B_j=(-1)^{j+n}\binom{n+3m}{j}\binom{n+m}{j-m}\binom{n-m}{j-2m}\cdot\frac{(n-3m)!(j-n-1)!}{(j-3m)!}\ ,$$

Согласно лемме 2 имеем: $\quad T_{n+m}\cdot\dfrac{(n-3m)!(3m-j-1)!}{(n-j)!}\in\mathbb{Z},\quad \forall\, j\,:\,2m\le j<3m.$
Откуда следует, что $\quad T_{n+m}\cdot B_j\in\mathbb{Z},\quad \forall\, j\,:\,2m\le j<3m.$

В случае, когда $n<j\le n+m$, сделаем замену $j=n+3m-j'$.
Тогда $2m\le j'<3m$ и $B_j=-B_{j'}$. Таким образом, мы проверили, что

$$T_{n+m}\cdot B_j\in\mathbb{Z}\,,\quad \forall\, j\in A_3\,.$$

Перейдем к числам $L_{j,k}$. Напомним, что они вычисляются по формуле (12). k может принимать значения 0, 1, 2. Суммирование в $L_{j,k}$ происходит по всем неотрицательным целым наборам $\{l_i\}$, для которых выполнено $\sum\limits_i l_i=2-k$. Рассмотрим варианты: а) $k=0$, б) $k=1$, в) $k=2$.

а) $k=0$: тогда $\sum\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n+3m}l_i=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\exists i_1,\,i_2:\quad l_{i_1}=l_{i_2}=1,\quad \text{остальные } l_i \text{ равны } 0,\\ \exists i_3:\quad l_{i_3}=2,\quad \text{остальные } l_i \text{ равны } 0.\end{array}\right.$
По формуле (12) находим

$$L_{j,k}=\sum_{\bar l}\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n+3m}\nu(d_i,l_i)(j-i)^{-l_i}=\sum_{i_1,i_2}\nu(d_{i_1},1)(j-i_1)^{-1}\cdot\nu(d_{i_2},1)(j-i_2)^{-1}+$$
$$+\sum_{\substack{i_3=0\\ i_3\neq j}}^{n+3m}\nu(d_{i_3},2)(j-i_3)^{-2}=\sum_{i_1,i_2}\frac{\lambda^*_{i_1}\lambda^*_{i_2}}{(j-i_1)(j-i_2)}+\sum_{\substack{i_3=0\\ i_3\neq j}}^{n+3m}\frac{\lambda^*_{i_3}}{(j-i_3)^2}\ ,$$

где $\lambda^*_{i_1} = \nu(d_{i_1},1)$, $\lambda^*_{i_2} = \nu(d_{i_2},1)$, $\lambda^*_{i_3} = \nu(d_{i_3},2) \in \mathbb{Z}$; суммирование в первой сумме происходит по всем парам (i_1,i_2) : $i_1 \neq i_2$, $i_1 \neq j$, $i_2 \neq j$, $i_1 = \overline{0,n+3m}$, $i_2 = \overline{0,n+3m}$.
Так как $j \in A_3$, то $1 < |j-i| \le n+m \ \forall i \neq j$, $i = 0,...,n+3m$, то верно следующее:
$T_{n+3m}T_{n+2m} \cdot \sum\limits_{i_1,i_2} \dfrac{\lambda^*_{i_1}\lambda^*_{i_2}}{(j-i_1)(j-i_2)} \in \mathbb{Z}, \quad T_{n+3m}T_{n+2m} \cdot \sum\limits_{\substack{i_3=0\\ i_3\neq j}}^{n+3m} \dfrac{\lambda^*_{i_3}}{(j-i_3)^2} \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow T_{n+3m}T_{n+2m} \cdot L_{j,k} \in \mathbb{Z}$.

б) $k=1$: тогда $\sum\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n+3m} l_i = 1 \Rightarrow \exists\, i_0 \neq j\colon \quad l_{i_0} = 1$, а оставшиеся l_i равны нулю $\Rightarrow$

$$L_{j,k} = \sum_{\bar{l}} \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n+3m} \nu(d_i,l_i)(j-i)^{-l_i} = \sum_{\substack{i_0=0\\ i_0\neq j}}^{n+3m} \frac{\nu(d_{i_0},1)}{j-i_0} = \sum_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n+3m} \frac{\nu(d_i,1)}{j-i} \ .$$

$\Rightarrow T_{n+2m} \cdot L_{j,k} \in \mathbb{Z}$. А тогда тем более выполнено $\quad T_{n+3m}T_{n+2m} \cdot L_{j,k} \in \mathbb{Z}$.

в) $k=2$: тогда $\sum\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n+3m} l_i = 0 \Rightarrow$ все $l_i = 0 \Rightarrow$ все $\nu(d_i,l_i) = 1$. По формуле (12) находим: $L_{j,k} = 1$, $\forall j \in A_3$. Тогда очевидно, что $\quad T_{n+3m}T_{n+2m} \cdot L_{j,k} \in \mathbb{Z}$.

А значит мы проверили, что $T_{n+3m}T_{n+2m} \cdot L_{j,k,} \in \mathbb{Z}$, $\forall j \in A_3$, $k = 0,1,2$. Следовательно, согласно (10) мы получаем

$$T_{n+3m}T_{n+2m}T_{n+m} \cdot c_{j,k} \in \mathbb{Z}, \quad \forall j \in A_3\,, \quad \forall k\,.$$

4) $j \in A_4 \Rightarrow d_j = 3$, $0 \le k \le 3$. Так же как и в предыдущих пунктах, найдём коэффициенты B_j :

$$B_j = \gamma_{n,m} \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n+3m} (j-i)^{-1} \prod_{\substack{i=m\\ i\neq j}}^{n+2m} (j-i)^{-1} \prod_{\substack{i=2m\\ i\neq j}}^{n+m} (j-i)^{-1} \prod_{\substack{i=3m\\ i\neq j}}^{n} (j-i)^{-1} \ ,$$

$$\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n+3m} (j-i) = j! \cdot (-1) \cdot \ldots \cdot \big(-(n+3m-j)\big) = (-1)^{n+3m-j} \cdot j!(n+3m-j)! \ ,$$

$$\prod_{\substack{i=m\\ i\neq j}}^{n+2m} (j-i) = (-1)^{n+2m-j} \cdot (j-m)!(n+2m-j)! \ ,$$

$$\prod_{\substack{i=2m\\ i\neq j}}^{n+m}(j-i)=(-1)^{n+m-j}\cdot(j-2m)!(n+m-j)!\ ,$$

$$\prod_{\substack{i=3m\\ i\neq j}}^{n}(j-i)=(-1)^{n-j}\cdot(j-3m)!(n-j)!\ .$$

Окончательно находим B_j:

$$B_j=\binom{n+3m}{j}\cdot\binom{n+m}{j-m}\cdot\binom{n-m}{j-2m}\cdot\binom{n-3m}{j-3m}\ .$$

Из последнего соотношения видно, что $B_j\in\mathbb{Z},\quad\forall j\in A_4$.
Рассмотрим коэффициенты $L_{j,k}$. k может принимать значения 0, 1, 2, 3. Суммирование в $L_{j,k}$ происходит по всем неотрицательным целым наборам $\{l_i\}$, для которых выполнено $\sum\limits_i l_i=3-k$. Рассмотрим варианты: а) $k=0$, б) $k=1$, в) $k=2$, г) $k=3$.

а) $k=0$: тогда $\sum\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n+3m}l_i=3\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\exists i_1,\,i_2,\,i_3:\quad l_{i_1}=l_{i_2}=l_{i_3}=1,\quad \text{остальные } l_i \text{ равны } 0;\\ \exists i_4,\,i_5:\quad l_{i_4}=2,\,l_{i_5}=1,\quad \text{остальные } l_i \text{ равны } 0;\\ \exists i_6:\quad l_{i_6}=3,\quad \text{остальные } l_i \text{ равны } 0.\end{array}\right.$

По формуле (12) находим

$$\begin{aligned}L_{j,k}&=\sum_{\bar{l}}\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n+3m}\nu(d_i,l_i)(j-i)^{-l_i}=\\ &=\sum_{i_1,i_2,i_3}\nu(d_{i_1},1)(j-i_1)^{-1}\cdot\nu(d_{i_2},1)(j-i_2)^{-1}\cdot\nu(d_{i_3},1)(j-i_3)^{-1}+\\ &+\sum_{i_4,i_5}\nu(d_{i_4},2)(j-i_4)^{-2}\cdot\nu(d_{i_5},1)(j-i_5)^{-1}+\sum_{\substack{i_6=0\\ i_6\neq j}}^{n+3m}\nu(d_{i_6},3)(j-i)^{-3}=\\ &=\sum_{i_1,i_2,i_3}\frac{\nu(d_{i_1},1)\nu(d_{i_2},1)\nu(d_{i_3},1)}{(j-i_1)(j-i_2)(j-i_3)}+\sum_{i_4,i_5}\frac{\nu(d_{i_4},2)\nu(d_{i_5},1)}{(j-i_4)^2(j-i_5)}+\sum_{\substack{i_6=0\\ i_6\neq j}}^{n+3m}\frac{\nu(d_{i_6},3)}{(j-i_6)^3}\ ,\end{aligned}$$

где все i_1, i_2, i_3 меняются от 0 до $n+3m$, не равны друг другу и не равны j;
$i_4\neq i_5$ меняются от 0 до $n+3m$ и не равны j.
Так как $j\in A_4$, то $1<|j-i|\leq n\quad\forall i\neq j,\ i=0,...,n+3m$, то получим
$T_{n+3m}T_{n+2m}T_{n+m}\cdot\sum\limits_{i_1,i_2,i_3}\dfrac{\nu(d_{i_1},1)\nu(d_{i_2},1)\nu(d_{i_3},1)}{(j-i_1)(j-i_2)(j-i_3)}\in\mathbb{Z}\,,$
$T_{n+3m}T_{n+2m}T_{n+m}\cdot\sum\limits_{i_4,i_5}\dfrac{\nu(d_{i_4},2)\nu(d_{i_5},1)}{(j-i_4)^2(j-i_5)}\in\mathbb{Z}\,,\quad T_{n+3m}T_{n+2m}T_{n+m}\cdot\sum\limits_{\substack{i_6=0\\ i_6\neq j}}^{n+3m}\dfrac{\nu(d_{i_6},3)}{(j-i_6)^3}\in\mathbb{Z}$
$\Rightarrow T_{n+3m}T_{n+2m}T_{n+m}\cdot L_{j,k}\in\mathbb{Z}\,.$

б) $k=1$: тогда $\sum\limits_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n+3m} l_i = 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \exists i_1,\, i_2: \quad l_{i_1}=l_{i_2}=1, \quad \text{остальные } l_i \text{ равны } 0,\\ \exists i_3: \quad l_{i_3}=2, \quad \text{остальные } l_i \text{ равны } 0. \end{array}\right.$

По формуле (12) находим

$$L_{j,k} = \sum_{\bar{l}} \prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n+3m} \nu(d_i,l_i)(j-i)^{-l_i} = \sum_{i_1,i_2} \frac{\nu(d_{i_1},1)\nu(d_{i_2},1)}{(j-i_1)(j-i_2)} + \sum_{\substack{i_3=0\\i_3\neq j}}^{n+3m} \frac{\nu(d_{i_3},2)}{(j-i_3)^2}\ ,$$

где суммирования происходят аналогично предыдущим пунктам. Таким образом получим: $T_{n+3m}T_{n+2m}T_{n+m}\cdot L_{j,k}\in\mathbb{Z}$.

в) $k=2$: тогда $\sum\limits_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n+3m} l_i = 1 \Rightarrow \exists\, i_0 \neq j\colon \quad l_{i_0}=1$, а оставшиеся l_i равны нулю $\Rightarrow$

$$L_{j,k} = \sum_{\bar{l}} \prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n+3m} \nu(d_i,l_i)(j-i)^{-l_i} = \sum_{\substack{i_0=0\\i_0\neq j}}^{n+3m} \frac{\nu(d_{i_0},1)}{j-i_0}\ .$$

В этом случае, тем более выполнено: $T_{n+3m}T_{n+2m}T_{n+m}\cdot L_{j,k}\in\mathbb{Z}$.

г) $k=3$: тогда $\sum\limits_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n+3m} l_i = 0 \Rightarrow$ все $l_i=0 \Rightarrow$ все $\nu(d_i,l_i)=1$. По формуле (12) находим: $L_{j,k}=1,\ \forall j\in A_4$. Также очевидно, что $T_{n+3m}T_{n+2m}T_{n+m}\cdot L_{j,k}\in\mathbb{Z}$.

А значит мы проверили, что $T_{n+3m}T_{n+2m}T_{n+m}\cdot L_{j,k}\in\mathbb{Z}$, $\forall j\in A_4$, $\forall\, k$. Учитывая (10) и то, что $B_j\in\mathbb{Z}$, $\forall j\in A_4$, мы имеем

$$T_{n+3m}T_{n+2m}T_{n+m}\cdot c_{j,k}\in\mathbb{Z}\,, \quad \forall j\in A_4\,, \quad \forall k\,.$$

Итак, мы доказали, что во всех случаях для коэффициентов $c_{j,k}$ выполняется (14). Следовательно, наше предложение доказано. □

Введем обозначения:

$$\overline{\mathrm{B}}_j = \begin{cases} T_{n+3m}T_{n+2m}T_{n+m}\cdot B_j, \text{ если } j\in A_1,\\ T_{n+2m}T_{n+m}\cdot B_j, \text{ если } j\in A_2,\\ T_{n+m}\cdot B_j, \text{ если } j\in A_3,\\ B_j, \text{ если } j\in A_4; \end{cases}$$

$$\overline{\mathrm{L}}_{j,k} = \begin{cases} L_{j,k} & \text{, если } j\in A_1,\\ T_{n+m}\cdot L_{j,k} & \text{, если } j\in A_2,\\ T_{n+2m}T_{n+m}\cdot L_{j,k} & \text{, если } j\in A_3,\\ T_{n+3m}T_{n+2m}T_{n+m}\cdot L_{j,k} & \text{, если } j\in A_4. \end{cases}$$

Предложение 4. *Для любого $j = 0, ..., n+3m$ и для любого простого p, $\sqrt{n+3m} < p \le n+m$ выполнено*

$$\nu_p(\overline{B}_j) = \mu(x,y,s)\,, \tag{15}$$

где $y = \dfrac{n}{p}$, $x = \dfrac{m}{p}$, $s = \dfrac{j}{p}$, $\mu(x,y,s) = [y+3x] - [s] - [y+3x-s] + [y+x] - [s-x] -$
$- [y+2x-s] + [y-x] - [s-2x] - [y+x-s] + [y-3x] - [s-3x] - [y-s]\,.$

Доказательство. Пусть p – простое с условием $\sqrt{n+3m} < p \le n+m$. Пусть $y = \dfrac{n}{p}$, $x = \dfrac{m}{p}$, $s = \dfrac{j}{p}$, $r = \dfrac{j+1}{p}$. Рассмотрим четыре случая: 1) $j \in A_1$, 2) $j \in A_2$, 3) $j \in A_3$, 4) $j \in A_4$.

1) Итак, в первом случае $j \in A_1$. Согласно доказательству предложения 3, мы можем воспользоваться формулой для коэффициента B_j и рассматривать только $0 \le j < m$, так как случай $n+2m < j \le n+3m$ сводится к случаю $0 \le j < m$ простой заменой. В случае $0 \le j < m$ формула для B_j имеет вид:

$$B_j = (-1)^{j+1}\binom{n+3m}{j} \cdot \frac{(n+m)!(m-j-1)!}{(n+2m-j)!} \cdot \frac{(n-m)!(2m-j-1)!}{(n+m-j)!} \cdot$$
$$\cdot \frac{(n-3m)!(3m-j-1)!}{(n-j)!}\,.$$

По условию $p > \sqrt{n+3m}$ и $p \le n+m$. Следовательно, $\nu_p(\overline{\mathrm{B}}_j) = \nu_p(T_{n+3m}) + {}$ $+\nu_p(T_{n+2m}) + \nu_p(T_{n+m}) + \nu_p(B_j) = 3 + \nu_p(B_j)$. Теперь, заметим, что для любого натурального M, $M \le n+3m$, выполнено $\nu_p(M!) = \sum\limits_k \left[\frac{M}{p^k}\right]$. Но так как $p^2 > n+3m$, то $\nu_p(M!) = \left[\dfrac{M}{p}\right]$. Тогда $\nu_p(B_j) = [y+3x] - [s] - [y+3x-s] + [y+x] + [x-r] -$ $- [y+2x-s] + [y-x] + [2x-r] - [y+x-s] + [y-3x] + [3x-r] - [y-s] =: \tilde{\mu}(x,y,s,r)$. Для любого целого числа u, как легко проверить, выполняется равенство $\left[\dfrac{u}{p}\right] =$ $= -1 - \left[-\dfrac{u+1}{p}\right]$. Применяя его к числам u, равным $j-m$, $j-2m$, $j-3m$, мы получим равенство $\tilde{\mu}(x,y,s,r) = \mu(x,y,s) - 3$. Таким образом, $\nu_p(\overline{\mathrm{B}}_j) = 3 + \nu_p(B_j) =$ $= 3 + \tilde{\mu}(x,y,s,r) = \mu(x,y,s)$.

2) Аналогично первому случаю, мы можем рассматривать $m \le j < 2m$. В этом случае формула B_j имеет вид:

$$B_j = (-1)^m \binom{n+3m}{j}\binom{n+m}{j-m} \cdot \frac{(n-m)!(2m-j-1)!}{(n+m-j)!} \cdot \frac{(n-3m)!(3m-j-1)!}{(n-j)!}\,.$$

Тогда $\nu_p(\overline{\mathrm{B}}_j) = \nu_p(T_{n+2m}) + \nu_p(T_{n+m}) + \nu_p(B_j) = 2 + \nu_p(B_j)$.
$\nu_p(B_j) = [y+3x] - [s] - [y+3x-s] + [y+x] - [s-x] - [y+2x-s] + [y-x] + [2x-r] - [y+x-s] + [y-3x] + [3x-r] - [y-s] =: \hat{\mu}(x,y,s,r)$. Снова применяя равенство

$\left[\dfrac{u}{p}\right] = -1 - \left[-\dfrac{u+1}{p}\right]$ к числам u, равным $j-2m$, $j-3m$, мы получим равенство $\hat{\mu}(x,y,s,r) = \mu(x,y,s) - 2$. Таким образом, $\nu_p(\overline{\mathrm{B}}_j) = 2 + \nu_p(B_j) = 2 + \hat{\mu}(x,y,s,r) = \mu(x,y,s)$.

3) В этом случае достаточно рассмотреть $2m \le j < 3m$. Соответствующая формула для B_j выглядит так:

$$B_j = (-1)^{j+m+1}\binom{n+3m}{j}\binom{n+m}{j-m}\binom{n-m}{j-2m} \cdot \frac{(n-3m)!(3m-j-1)!}{(n-j)!}\ .$$

$\overline{\mathrm{B}}_j = T_{n+m} \cdot B_j$. Следовательно, $\nu_p(\overline{\mathrm{B}}_j) = 1 + \nu_p(B_j)$.
$\nu_p(B_j) = [y+3x] - [s] - [y+3x-s] + [y+x] - [s-x] - [y+2x-s] + [y-x] - [s-2x] - - [y+x-s] + [y-3x] + [3x-r] - [y-s] =: \mu^*(x,y,s,r)$. Как нетрудно заметить, $\mu^*(x,y,s,r) = \mu(x,y,s) - 1$. Таким образом, и в этом случае $\nu_p(\overline{\mathrm{B}}_j) = \mu(x,y,s)$.

4) $3m \le j \le n$. В этом случае формула B_j такова:

$$B_j = \binom{n+3m}{j} \cdot \binom{n+m}{j-m} \cdot \binom{n-m}{j-2m} \cdot \binom{n-3m}{j-3m}\ .$$

$\overline{\mathrm{B}}_j = B_j$. Тогда очевидно, что $\nu_p(\overline{\mathrm{B}}_j) = \mu(x,y,s) = [y+3x] - [s] - [y+3x-s] + + [y+x] - [s-x] - [y+2x-s] + [y-x] - [s-2x] - [y+x-s] + [y-3x] - [s-3x] - [y-s]$.

Итак, мы проверили, что во всех случаях выполнено $\nu_p(\overline{\mathrm{B}}_j) = \mu(x,y,s)$. $\square$

Теперь положим $\lambda = \dfrac{31}{3}$, где λ - параметр, связывающий переменные n и m: $m = \left[\dfrac{n}{\lambda}\right]$. Мы можем взять подпоследовательность $n = 31d$, $d \in \mathbb{N}$ и рассматривать соотношения $n = 31d$, $m = 3d$.

Лемма 3. *Множество Ω чисел w, $0 \le w < 1$ с условием, что для каждого s выполняется неравенство $\mu(3w, 31w, s) \ge 1$ имеет вид*

$$\Omega = \left[\frac{1}{40}, \frac{1}{25}\right) \cup \left[\frac{1}{20}, \frac{5}{37}\right) \cup \left[\frac{3}{22}, \frac{6}{37}\right) \cup \left[\frac{7}{40}, \frac{10}{37}\right) \cup \left[\frac{3}{11}, \frac{11}{37}\right) \cup \left[\frac{7}{22}, \frac{12}{37}\right) \cup \left[\frac{7}{20}, \frac{9}{25}\right) \cup$$
$$\cup \left[\frac{3}{8}, \frac{18}{37}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{13}{25}\right) \cup \left[\frac{21}{40}, \frac{23}{37}\right) \cup \left[\frac{7}{11}, \frac{24}{37}\right) \cup \left[\frac{27}{40}, \frac{17}{25}\right) \cup \left[\frac{7}{10}, \frac{18}{25}\right) \cup \left[\frac{29}{40}, \frac{30}{37}\right) \cup$$
$$\cup \left[\frac{9}{11}, \frac{21}{25}\right) \cup \left[\frac{17}{20}, \frac{35}{37}\right) \cup \left[\frac{21}{22}, \frac{36}{37}\right)\ .$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\mu(x,y,s)$. Из справедливого при всех действительных α , β неравенства $[\alpha+\beta] \ge [\alpha] + [\beta]$ следует $\mu(x,y,s) \ge 0$ при всех действительных x , y , s . Поэтому равенство $\mu(x,y,s) = 0$ равносильно системе равенств

$$
\begin{aligned}
[y+3x]-[s]-[y+3x-s]&=0,\\
[y+x]-[s-x]-[y+2x-s]&=0,\\
[y-x]-[s-2x]-[y+x-s]&=0,\\
[y-3x]-[s-3x]-[y-s]&=0,
\end{aligned} \tag{16}
$$

а дополнение $\overline{\Omega}$ к множеству Ω в множестве $[0,1)$ будет состоят из всех чисел w, $0 \le w < 1$, для которых система (16) разрешима относительно переменной s при условии, что $y = 31w$, $x = 3w$. Более того, поскольку левые части уравнений системы имеют период 1 по переменным x, y, s, можно дополнительно предполагать, что s должно удовлетворять условию $0 \le s < 1$, а также, так как $31w = [31w] + \{31w\}$, $3w = [3w] + \{3w\}$, то вместо замены $y = 31w$, $x = 3w$ можно производить замену $y = \{31w\}$, $x = \{3w\}$, что само собой будет вести к выполнению условий $0 \le y < 1$, $0 \le x < 1$ ($\{\cdot\}$ обозначает дробную часть действительного числа). Систему уравнений (16) можно заменить несколькими системами линейных неравенств. А именно,

$$
\begin{aligned}
&t_1 \le y+3x-s < t_1+1, \quad t_1 \le s < t_2+1, \quad t_1+t_2 \le y+3x < t_1+t_2+1,\\
&t_3 \le y+2x-s < t_3+1, \quad t_4 \le s-x < t_4+1, \quad t_3+t_4 \le y+x < t_3+t_4+1,\\
&t_5 \le y+x-s < t_5+1, \quad t_6 \le s-2x < t_6+1, \quad t_5+t_6 \le y-x < t_5+t_6+1,\\
&t_7 \le y-s < t_7+1, \quad t_8 \le s-3x < t_8+1, \quad t_7+t_8 \le y-3x < t_7+t_8+1,
\end{aligned} \tag{17}
$$

где t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8 пробегают все целые числа, а x, y и w связаны соотношением $y = \{31w\}$, $x = \{3w\}$. Ограничения на x, y, s, показывают, что система (16) равносильна конечной совокупности систем неравенств (17). Заменив систему (16) конечным набором систем линейных неравенств, и решая эти неравенства, можно найти, что множество $\overline{\Omega}$ состоит из промежутков

$$
\left[0,\frac{1}{40}\right), \left[\frac{1}{25},\frac{1}{20}\right), \left[\frac{5}{37},\frac{3}{22}\right), \left[\frac{6}{37},\frac{7}{40}\right), \left[\frac{10}{37},\frac{3}{11}\right), \left[\frac{11}{37},\frac{7}{22}\right), \left[\frac{12}{37},\frac{7}{20}\right),
$$
$$
\left[\frac{9}{25},\frac{3}{8}\right), \left[\frac{18}{37},\frac{1}{2}\right), \left[\frac{13}{25},\frac{21}{40}\right), \left[\frac{23}{37},\frac{7}{11}\right), \left[\frac{24}{37},\frac{27}{40}\right), \left[\frac{17}{25},\frac{7}{10}\right), \left[\frac{18}{25},\frac{29}{40}\right),
$$
$$
\left[\frac{30}{37},\frac{9}{11}\right), \left[\frac{21}{25},\frac{17}{20}\right), \left[\frac{35}{37},\frac{21}{22}\right), \left[\frac{36}{37},1\right),
$$

откуда и следует утверждение леммы. Естественно, все вычисления выполнялись при помощи вычислительной техники. $\square$

Лемма 4. *Множество Ω' чисел w, $0 \le w < 1$ с условием, что для каждого s*

выполняется неравенство $\mu(3w, 31w, s) \geq 2$ *имеет вид*

$$\Omega' = \left[\frac{1}{34}, \frac{1}{31}\right) \cup \left[\frac{1}{17}, \frac{2}{31}\right) \cup \left[\frac{3}{40}, \frac{2}{25}\right) \cup \left[\frac{1}{11}, \frac{3}{31}\right) \cup \left[\frac{3}{28}, \frac{4}{37}\right) \cup \left[\frac{1}{8}, \frac{4}{31}\right) \cup \left[\frac{3}{20}, \frac{5}{31}\right) \cup$$
$$\cup \left[\frac{2}{11}, \frac{6}{31}\right) \cup \left[\frac{9}{40}, \frac{7}{31}\right) \cup \left[\frac{4}{17}, \frac{6}{25}\right) \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{8}{31}\right) \cup \left[\frac{2}{7}, \frac{9}{31}\right) \cup \left[\frac{9}{28}, \frac{10}{31}\right) \cup \left[\frac{6}{17}, \frac{11}{31}\right) \cup$$
$$\cup \left[\frac{13}{34}, \frac{12}{31}\right) \cup \left[\frac{7}{17}, \frac{13}{31}\right) \cup \left[\frac{3}{7}, \frac{16}{31}\right) \cup \left[\frac{9}{20}, \frac{14}{31}\right) \cup \left[\frac{19}{40}, \frac{15}{31}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{16}{31}\right) \cup \left[\frac{6}{11}, \frac{17}{31}\right) \cup$$
$$\cup \left[\frac{19}{34}, \frac{14}{25}\right) \cup \left[\frac{23}{40}, \frac{18}{31}\right) \cup \left[\frac{13}{22}, \frac{22}{37}\right) \cup \left[\frac{17}{28}, \frac{19}{31}\right) \cup \left[\frac{9}{14}, \frac{20}{31}\right) \cup \left[\frac{23}{34}, \frac{21}{31}\right) \cup \left[\frac{12}{17}, \frac{22}{31}\right) \cup$$
$$\cup \left[\frac{25}{34}, \frac{23}{31}\right) \cup \left[\frac{3}{4}, \frac{28}{37}\right) \cup \left[\frac{17}{22}, \frac{24}{31}\right) \cup \left[\frac{4}{5}, \frac{25}{31}\right) \cup \left[\frac{33}{40}, \frac{26}{31}\right) \cup \left[\frac{19}{22}, \frac{27}{31}\right) \cup \left[\frac{9}{10}, \frac{28}{31}\right) \cup$$
$$\cup \left[\frac{31}{34}, \frac{34}{37}\right) \cup \left[\frac{13}{14}, \frac{29}{31}\right) \cup \left[\frac{27}{28}, \frac{30}{31}\right).$$

Доказательство. Положим для начала $\mu_1(x,y,s) = [y+3x] - [s] - [y+3x-s]$, $\mu_2(x,y,s) = [y+x] - [s-x] - [y+2x-s]$, $\mu_3(x,y,s) = [y-x] - [s-2x] - [y+x-s]$, $\mu_4(x,y,s) = [y-3x] - [s-3x] - [y-s]$. Заметим, что $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$. Из справедливого при всех действительных α, β равенства

$$[\alpha] + [\beta] \leq [\alpha + \beta] \leq [\alpha] + [\beta] + 1$$

следует $0 \leq \mu_1 \leq 1$, $0 \leq \mu_2 \leq 1$, $0 \leq \mu_3 \leq 1$, $0 \leq \mu_4 \leq 1$ и $\mu(x,y,s) \geq 0$. Аналогично доказательству Леммы 4, можно дополнительно предполагать, что s должно удовлетворять условию $0 \leq s < 1$, а также вместо замены $y = 31w$, $x = 3w$ можно производить замену $y = \{31w\}$, $x = \{3w\}$, что само собой будет вести к выполнению условий $0 \leq y < 1$, $0 \leq x < 1$. Функцию $\mu(\{3w\}, \{31w\}, s)$ будем для краткости обозначать $\mu(w,s)$ или просто μ. Аналогично для μ_1, μ_2, μ_3, μ_4.
Итак, нам нужно найти множество $\Omega' = \{w \in [0,1) : \forall s \in [0,1) \quad \mu(w,s) \geq 2\}$. Рассмотрим дополнение $\overline{\Omega}'$ к множеству Ω' в множестве $[0,1)$. $\overline{\Omega}' = \{w \in [0,1) : \exists s \in [0,1) \quad 0 \leq \mu \leq 1\} = \{w \in [0,1) : \exists s \quad \mu = 0\} \cup \{w \in [0,1) : \exists s \quad \mu = 1\}$. Положим $\Omega_1 = \{w \in [0,1) : \exists s \quad \mu = 1\}$. А множество $\{w \in [0,1) : \exists s \quad \mu = 0\}$ есть не что иное, как множество $\overline{\Omega}$ из доказательства Леммы 4. Таким образом, $\overline{\Omega}' = \overline{\Omega} \cup \Omega_1$. Чтобы найти $\overline{\Omega}'$, достаточно найти Ω_1. Будем искать Ω_1.
Итак, мы хотим найти такие числа w, $0 \leq w < 1$, для которых существует $s \in [0,1)$, что $\mu(x,y,s) = 1$ при условии $y = \{31w\}$, $x = \{3w\}$. Так как $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$, а μ_i, $i = 1,2,3,4$ могут принимать значения либо 0, либо 1, то условие $\mu(x,y,s) = 1$ равносильно выполнению какого-нибудь одного из следующих 4-х условий:

$$\text{I)} \begin{cases} \mu_1 = 1, \\ \mu_2 = 0, \\ \mu_3 = 0, \\ \mu_4 = 0, \end{cases} \quad \text{II)} \begin{cases} \mu_1 = 0, \\ \mu_2 = 1, \\ \mu_3 = 0, \\ \mu_4 = 0, \end{cases} \quad \text{III)} \begin{cases} \mu_1 = 0, \\ \mu_2 = 0, \\ \mu_3 = 1, \\ \mu_4 = 0, \end{cases} \quad \text{IV)} \begin{cases} \mu_1 = 0, \\ \mu_2 = 0, \\ \mu_3 = 0, \\ \mu_4 = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим первое условие:

$$\begin{aligned}
&[y+3x]-[s]-[y+3x-s]=1,\\
&[y+x]-[s-x]-[y+2x-s]=0,\\
&[y-x]-[s-2x]-[y+x-s]=0,\\
&[y-3x]-[s-3x]-[y-s]=0.
\end{aligned} \tag{18}$$

Найдём такие числа w, $0 \le w < 1$ при которых система (18) с заменой $y = \{31w\}$, $x = \{3w\}$ разрешима относительно переменной s . Эту систему уравнений можно заменить несколькими системами линейных неравенств. А именно,

$$\begin{aligned}
&t_1 \le y+3x-s < t_1+1, \quad t_1 \le s < t_2+1, \quad t_1+t_2+1 \le y+3x < t_1+t_2+2,\\
&t_3 \le y+2x-s < t_3+1, \quad t_4 \le s-x < t_4+1, \quad t_3+t_4 \le y+x < t_3+t_4+1,\\
&t_5 \le y+x-s < t_5+1, \quad t_6 \le s-2x < t_6+1, \quad t_5+t_6 \le y-x < t_5+t_6+1,\\
&t_7 \le y-s < t_7+1, \quad t_8 \le s-3x < t_8+1, \quad t_7+t_8 \le y-3x < t_7+t_8+1,
\end{aligned} \tag{19}$$

где t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8 пробегают все целые числа, а x, y и w связаны соотношением $y = \{31w\}$, $x = \{3w\}$. Ограничения на x, y, s, показывают, что система (18) равносильна конечной совокупности систем неравенств (19). Решив эти неравенства, мы найдем такие w, при которых условие I) для функции $\mu(w,s)$ разрешимо относительно переменной s.

Проведя аналогичные вычисления для случаев II), III), IV) и объединив все полученные результаты в один, мы найдем множество Ω_1 . Используя равенство $\overline{\Omega}' = \overline{\Omega} \cup \Omega_1$ можно найти, что множество $\overline{\Omega}'$ состоит из промежутков

$$\begin{gathered}
\left[0,\frac{1}{34}\right),\ \left[\frac{1}{31},\frac{1}{17}\right),\ \left[\frac{2}{31},\frac{3}{40}\right),\ \left[\frac{2}{25},\frac{1}{11}\right),\ \left[\frac{3}{31},\frac{3}{28}\right),\ \left[\frac{4}{37},\frac{1}{8}\right),\ \left[\frac{4}{31},\frac{3}{20}\right),\\
\left[\frac{5}{31},\frac{2}{11}\right),\ \left[\frac{6}{31},\frac{9}{40}\right),\ \left[\frac{7}{31},\frac{4}{17}\right),\ \left[\frac{6}{25},\frac{1}{4}\right),\ \left[\frac{8}{31},\frac{2}{7}\right),\ \left[\frac{9}{31},\frac{9}{28}\right),\ \left[\frac{10}{31},\frac{6}{17}\right),\\
\left[\frac{11}{31},\frac{13}{34}\right),\ \left[\frac{12}{31},\frac{7}{17}\right),\ \left[\frac{13}{31},\frac{3}{7}\right),\ \left[\frac{16}{37},\frac{9}{20}\right),\ \left[\frac{14}{31},\frac{19}{40}\right),\ \left[\frac{15}{31},\frac{1}{2}\right),\ \left[\frac{16}{31},\frac{6}{11}\right),\\
\left[\frac{17}{31},\frac{19}{34}\right),\ \left[\frac{14}{25},\frac{23}{40}\right),\ \left[\frac{18}{31},\frac{13}{22}\right),\ \left[\frac{22}{37},\frac{17}{28}\right),\ \left[\frac{19}{31},\frac{9}{14}\right),\ \left[\frac{20}{31},\frac{23}{34}\right),\ \left[\frac{21}{31},\frac{12}{17}\right),\\
\left[\frac{22}{31},\frac{25}{34}\right),\ \left[\frac{23}{31},\frac{3}{4}\right),\ \left[\frac{28}{37},\frac{17}{22}\right),\ \left[\frac{24}{31},\frac{4}{5}\right),\ \left[\frac{25}{31},\frac{33}{40}\right),\ \left[\frac{26}{31},\frac{19}{22}\right),\ \left[\frac{27}{31},\frac{9}{10}\right),\\
\left[\frac{28}{31},\frac{31}{34}\right),\ \left[\frac{34}{37},\frac{13}{14}\right),\ \left[\frac{29}{31},\frac{27}{28}\right),\ \left[\frac{30}{31},1\right),
\end{gathered}$$

откуда и следует утверждение леммы. Все вычисления выполнялись при помощи вычислительной техники. $\square$

Пусть H_0 обозначает множество простых чисел p, $\sqrt{n+3m} < p \le n+3m$, удовлетворяющих условию $\left\{\frac{n}{31p}\right\} \in \Omega$, H_1 – множество простых чисел p, $\sqrt{n+3m} < p \le n+3m$, удовлетворяющих условию $\left\{\frac{n}{31p}\right\} \in \Omega'$.

Следствие 2. *Пусть* $\Delta = \prod_{p\in H_0} p \prod_{p\in H_1} p$, *тогда для каждого* j *и* k *выполнено*

$$c_{j,k} \in \frac{\Delta_n}{T_{n+3m}T_{n+2m}T_{n+m}}\,\mathbb{Z}\,. \tag{20}$$

Доказательство. Обозначим $T_{n+3m}T_{n+2m}T_{n+m}\cdot c_{j,k} = \overline{\mathrm{c}}_{j,k}$. Согласно (14), число $\overline{\mathrm{c}}_{j,k}\in\mathbb{Z}$. А также, согласно (10) и определениям $\overline{\mathrm{B}}_j$ и $\overline{\mathrm{L}}_{j,k}$, имеем $\overline{\mathrm{c}}_{j,k} = (-1)^{d_j-k}\overline{\mathrm{B}}_j\cdot\overline{\mathrm{L}}_{j,k}$. Итак, нам надо доказать, что $\Delta_n \mid \overline{\mathrm{c}}_{j,k}$. Из доказательства предложения 3 следует, что и $\overline{\mathrm{B}}_j,\ \overline{\mathrm{L}}_{j,k}\in\mathbb{Z}$. Поэтому достаточно доказать, что $\Delta_n \mid \overline{\mathrm{B}}_j$. Учитывая определение Δ_n и то, что $H_1\subset H_0$, достаточно проверить, что $\forall\, p\in H_0$ выполнено $p\mid\overline{\mathrm{B}}_j$ и что $\forall\, p\in H_1$ выполнено $p^2\mid\overline{\mathrm{B}}_j$.

Рассмотрим для начала простые числа $p\in H_0$, $p\le n+m$. Обозначим

$$y=\frac{n}{p}\,,\quad x=\frac{m}{p}\,,\quad s=\frac{j}{p}\,.$$

Напомним, что n и m связаны соотношениями $n=31d$, $m=3d$, $d\in\mathbb{N}$. Обозначим также $w=\left\{\frac{d}{p}\right\}=\left\{\frac{n}{31p}\right\}$. Так как $\sqrt{n+3m}<p\le n+m$, то из предложения 4 следует, что

$$\nu_p(\overline{\mathrm{B}}_j)=\mu(x,y,s)\,.$$

А так как функция $\mu(x,y,s)$ имеет период 1 по переменным x и y, то $\nu_p(\overline{\mathrm{B}}_j) = \mu(x,y,s) = \mu(3w,31w,s)$. Поскольку $p\in H_0$, то $\left\{\frac{n}{31p}\right\}\in\Omega$, то есть $w\in\Omega$. Следовательно, согласно лемме 4 можно утверждать, что $\mu(3w,31w,s)\ge 1$ и, следовательно, $p\mid\overline{\mathrm{B}}_j$.

Пусть теперь p - простое число из H_0 и $p>n+m$. В этом случае, согласно определению коэффициентов $\overline{\mathrm{B}}_j$, их кратность равна

$$\nu_p(\overline{\mathrm{B}}_j)=\begin{cases}\nu_p(T_{n+3m})+\nu_p(T_{n+2m})+\nu_p(T_{n+m})+\nu_p(B_j)\,, & j\in A_1\,,\\ \nu_p(T_{n+2m})+\nu_p(T_{n+m})+\nu_p(B_j)\,, & j\in A_2\,,\\ \nu_p(T_{n+m})+\nu_p(B_j)\,, & j\in A_3\,,\\ \nu_p(B_j)\,, & j\in A_3\,.\end{cases}$$

Итак, p находится в интервале $n+m<p\le n+3m$. Разобьем этот интервал на два: $n+m<p\le n+2m$, $n+2m<p\le n+3m$.

Пусть $n+m<p\le n+2m$. Тогда $\nu_p(T_{n+3m})=\nu_p(T_{n+2m})=1$, $\nu_p(T_{n+m})=0$ и

$$\nu_p(\overline{\mathrm{B}}_j)=\begin{cases}2+\nu_p(B_j)\,, & j\in A_1\,,\\ 1+\nu_p(B_j)\,, & j\in A_2\,,\\ \nu_p(B_j)\,, & j\in A_3\,,\\ \nu_p(B_j)\,, & j\in A_4\,.\end{cases}$$

Вместо случаев, когда $j \in A_1$, $j \in A_2$, $j \in A_3$, достаточно рассматривать случаи, когда $0 \le j < m$, $m \le j < 2m$, $2m \le j < 3m$ соответственно.
1) Рассмотрим случай $0 \le j < m$. Тогда согласно формуле B_j из доказательства предложения 4 и тому, что $p > n + m$ имеем

$$\nu_p(B_j) = \left[\frac{n+3m}{p}\right] - \left[\frac{n+3m-j}{p}\right] - \left[\frac{n+2m-j}{p}\right] .$$

Из-за ограничений на p и j следует $\left[\frac{n+3m}{p}\right] = 1$, $\left[\frac{n+3m-j}{p}\right] = 1$, а $\left[\frac{n+2m-j}{p}\right]$ равно 0 или 1 в зависимости от p и j . Таким образом,

$$\nu_p(\overline{\mathrm{B}}_j) = 2 + \nu_p(B_j) \ge 2 + 1 - 1 - 1 = 1 ,$$

а следовательно, $p \mid \overline{\mathrm{B}}_j$.
2) Пусть $m \le j < 2m$. Тогда согласно формуле B_j из доказательства предложения 4 и тому, что $p > n + m$, а $j \ge m$ имеем

$$\nu_p(B_j) = \left[\frac{n+3m}{p}\right] - \left[\frac{n+3m-j}{p}\right] \ge 0 .$$

Следовательно, $\nu_p(\overline{\mathrm{B}}_j) = 1 + \nu_p(B_j) \ge 1$ и $p \mid \overline{\mathrm{B}}_j$.
3) Пусть $2m \le j < 3m$. Тогда согласно формуле B_j из доказательства предложения 4 и тому, что $p > n + m$, а $j \ge 2m$ имеем

$$\nu_p(B_j) = \left[\frac{n+3m}{p}\right] = 1 .$$

Тогда $\nu_p(\overline{\mathrm{B}}_j) = \nu_p(B_j) = 1$ и $p \mid \overline{\mathrm{B}}_j$.
4) Пусть $3m \le j \le n$. В этом случае из формулы для B_j следует, что

$$\nu_p(B_j) = \mu(x, y, s) = \mu(3w, 31w, s) ,$$

где $y = \frac{n}{p}$, $x = \frac{m}{p}$, $s = \frac{j}{p}$ и $w = \left\{\frac{n}{31p}\right\}$. Поскольку $p \in H_0$, то по лемме 3

$$\nu_p(\overline{\mathrm{B}}_j) = \nu_p(B_j) = \mu(3w, 31w, s) \ge 1 ,$$

а тогда $p \mid \overline{\mathrm{B}}_j$.
Таким образом, при всех j выполнено $p \mid \overline{\mathrm{B}}_j$ для $p \in H_0$ из интервала $n + m < p \le$ $\le n + 2m$.
Теперь пусть $p \in H_0$, $n + 2m < p \le n + 3m$. Тогда $\nu_p(T_{n+3m}) = 1$, $\nu_p(T_{n+2m}) =$ $= \nu_p(T_{n+m}) = 0$ и

$$\nu_p(\overline{\mathrm{B}}_j) = \begin{cases} 1 + \nu_p(B_j) , & j \in A_1 , \\ \nu_p(B_j) , & j \in A_2 , \\ \nu_p(B_j) , & j \in A_3 , \\ \nu_p(B_j) , & j \in A_4 . \end{cases}$$

Аналогично, рассматриваем случаи.
1) Пусть $0 \le j < m$. Тогда согласно формуле B_j и тому, что $p > n + 2m$ имеем

$$\nu_p(B_j) = \left[\frac{n+3m}{p}\right] - \left[\frac{n+3m-j}{p}\right] \ge 0\,.$$

Следовательно, $\nu_p(\overline{\mathrm{B}}_j) = 1 + \nu_p(B_j) \ge 1$ и $p \mid \overline{\mathrm{B}}_j$.
2),3) Пусть $m \le j < 3m$. В этом случае

$$\nu_p(B_j) = \left[\frac{n+3m}{p}\right] = 1\,.$$

Тогда $\nu_p(\overline{\mathrm{B}}_j) = \nu_p(B_j) = 1$ и $p \mid \overline{\mathrm{B}}_j$.
4) Пусть $3m \le j \le n$. В этом случае из формулы для B_j следует, что

$$\nu_p(B_j) = \mu(x, y, s) = \mu(3w, 31w, s)\,,$$

где $y = \dfrac{n}{p}$, $x = \dfrac{m}{p}$, $s = \dfrac{j}{p}$ и $w = \left\{\dfrac{n}{31p}\right\}$. Поскольку $p \in H_0$, то по лемме 3

$$\nu_p(\overline{\mathrm{B}}_j) = \nu_p(B_j) = \mu(3w, 31w, s) \ge 1\,,$$

а тогда $p \mid \overline{\mathrm{B}}_j$.

Таким образом, мы проверили, что при всех j для любого $p \in H_0$ выполнено $p \mid \overline{\mathrm{B}}_j$.

Пусть p – простое число из H_1. Покажем, что тогда $p \le n+m$. От противного, предположим, что какое-то $p \in H_1$ больше $n + m$. Поскольку, $n = 31d$, $m = 3d$, $d \in \mathbb{N}$, то

$$n + m = 34d < p \text{ или } \frac{d}{p} < \frac{1}{34}\,.$$

Так как $p \in H_1$, то $w = \left\{\dfrac{n}{31p}\right\} = \left\{\dfrac{d}{p}\right\} = \dfrac{d}{p} \in \Omega'$. Но согласно лемме 4, если $\dfrac{d}{p} \in \Omega'$, то

$$\frac{d}{p} \ge \frac{1}{34}\,.$$

Таким образом, мы получили противоречие. Откуда следует, что если $p \in H_1$, то $p \le n + m$. Тогда, согласно предложению 4, мы имеем

$$\nu_p(\overline{\mathrm{B}}_j) = \mu(x, y, s) = \mu(3w, 31w, s)\,.$$

Поскольку $p \in H_1$, то $\left\{\dfrac{n}{31p}\right\} \in \Omega'$, то есть $w \in \Omega'$, и согласно лемме 4

$$\mu(3w, 31w, s) \ge 2$$

и, следовательно, $p^2 \mid \overline{\mathrm{B}}_j$. $\square$

2.3. Асимптотика.

Итак, согласно первому пункту у нас есть интеграл $I_n(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_C \Phi_{n,m}(\zeta)e^{t\zeta}d\zeta$, функция $\Phi_{n,m}(\zeta) = \dfrac{\gamma_{n,m}}{\prod\limits_{j=0}^{n+3m}(\zeta-j)^{d_j+1}}$, где $\gamma_{n,m} = (n+3m)!(n+m)!(n-m)!(n-3m)!$. Нас интересует асимптотическое поведение этого интеграла при $t = \dfrac{\pi i}{2}$ и при растущих значениях параметра n. Мы как и ранее, считаем, что параметры n и m связаны друг с другом параметром λ: $m = [\lambda n]$, $\lambda \in \left(0\,,\dfrac{1}{3}\right)$. Для простоты мы будем брать только рациональные значения $\lambda = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$, а n и m будем рассматривать такие, что $n = bd$, $m = ad$, $d \in \mathbb{N}$. Тогда можем просто считать, что $m = \lambda n$.

Поскольку, $d_j = d_{n+3m-j}$, $\quad j = 0, ..., n + 3m$, то согласно формуле (4) имеем

$$\Phi_{n,m}(n+3m-\zeta) = \frac{\gamma_{n,m}}{\prod\limits_{j=0}^{n+3m}(-\zeta+n+3m-j)^{d_j+1}} = \frac{\gamma_{n,m}}{(-1)^{4n+4}\prod\limits_{j=0}^{n+3m}(\zeta-(n+3m-j))^{d_{n+3m-j}+1}} = \Phi_{n,m}(\zeta)\,.$$

Сделав замену $z = \zeta - \dfrac{n+3m}{2}$, запишем интеграл $I_n(t)$ в виде

$$I_n(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_z} F_{n,m}(z)e^{t(z+\frac{n+3m}{2})}dz = \frac{e^{t\frac{n+3m}{2}}}{2\pi i}\int\limits_{C_z} F_{n,m}(z)e^{tz}dz\,,$$

где $F_{n,m}(z) = \Phi_{n,m}\left(z+\dfrac{n+3m}{2}\right)$, а C_z – контур содержащий все полюса $j-\dfrac{n+3m}{2}$, $j = 0, ..., n+3m$. Заметим, что функция $F_{n,m}(z) = F_{n,m}(-z)$ при всех допустимых z. Прежде чем приступить к формулировки основного результата, докажем следующее предложение

Предложение 5. *Для интеграла $I_n(t)$ справедливо представление*

$$e^{-t\frac{n+3m}{2}}I_n(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L F_{n,m}(z)e^{tz}dz\,,$$

где $t = \dfrac{\pi i}{2}$, L – горизонтальная прямая $Im\,z = -R$, $R > 0$, которая проходится слева на право.

Доказательство. Выберем в качестве контура интегрирования прямоугольник $\Pi_{R,T} = \{z : \operatorname{Im} z = -R,\ |\operatorname{Re} z| \le T\} \cup \{z : \operatorname{Im} z = T,\ |\operatorname{Re} z| \le T\} \cup \{z : -R \le \operatorname{Im} z \le$

$\leq T$, $|\operatorname{Re} z| = T\}$. Параметр T выберем так, что все полюса функции $F_{n,m}(z)$ лежали внутри прямоугольника, а R будет фиксировано. Тогда наш интеграл можно записать в виде суммы интегралов по отрезкам:

$$e^{-t\frac{n+3m}{2}} I_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-T-iR}^{T-iR} F_{n,m}(z) e^{tz} dz + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{T-iR}^{T+iT} F_{n,m}(z) e^{tz} dz +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{T+iT}^{-T+iT} F_{n,m}(z) e^{tz} dz + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-T+iT}^{-T-iR} F_{n,m}(z) e^{tz} dz\,.$$

Согласно (4), функция $|F_{n,m}(z)| = O(|z|^{-4n-4})$ при $|z| \to \infty$. Следовательно, на отрезке $\operatorname{Re} z = T$, $-R \leq \operatorname{Im} z \leq T$ имеем

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{T-iR}^{T+iT} F_{n,m}(z) e^{tz} dz \right| \leq C_1 \frac{e^{\frac{\pi R}{2}}}{T^{4n+3}} \to 0\,, \quad T \to +\infty.$$

Аналогично,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-T+iT}^{-T-iR} F_{n,m}(z) e^{tz} dz \right| \leq C_1 \frac{e^{\frac{\pi R}{2}}}{T^{4n+3}} \to 0\,, \quad T \to +\infty.$$

На отрезке $\operatorname{Im} z = -R$, $|\operatorname{Re} z| \leq T$ функция $|F_{n,m}(z)| \leq \dfrac{C_1}{|z|^{4n+4}}$, а $|e^{tz}| = e^{\frac{\pi R}{2}}$.
Поэтому интеграл $\dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{-T-iR}^{T-iR} F_{n,m}(z) e^{tz} dz$ сходится при $T \to +\infty$.
А на отрезке $\operatorname{Im} z = T$, $|\operatorname{Re} z| \leq T$: $|e^{tz}| = e^{\frac{-\pi T}{2}}$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{T+iT}^{-T+iT} F_{n,m}(z) e^{tz} dz \right| \leq C_1 \frac{e^{\frac{-\pi T}{2}}}{T^{4n+3}} \to 0\,, \quad T \to +\infty.$$

Таким образом, перейдя к пределу при $T \to +\infty$, получим

$$e^{-t\frac{n+3m}{2}} I_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty-iR}^{+\infty-iR} F_{n,m}(z) e^{tz} dz\,.$$

Меняя в последнем интеграле пределы интегрирования местами, получаем требуемое. □

Предложение 6. *Справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \left| I_n\left(\frac{\pi i}{2}\right) \right| = Re\, f(\xi_0)\,, \tag{21}$$

где $f(\xi)=\kappa+\xi\dfrac{\pi i}{2}+\sum\limits_{k=0}^{3}\big((\xi-\alpha_k)\ln(\xi-\alpha_k)-(\xi+\alpha_k)\ln(\xi+\alpha_k)\big)$, $\ln\xi=\ln|\xi|+i\arg\xi$, $-\pi<\arg\xi\le\pi$, $\kappa=\ln(\beta_0^{\beta_0}\beta_1^{\beta_1}\beta_2^{\beta_2}\beta_3^{\beta_3})$, $\beta_k=1+(3-2k)\lambda$, $\alpha_k=\frac{\beta_k}{2}$, $k=0,1,2,3$, *а* ξ_0 *– корень уравнения* $\dfrac{i(\xi-\alpha_0)(\xi-\alpha_1)(\xi-\alpha_2)(\xi-\alpha_3)}{(\xi+\alpha_0)(\xi+\alpha_1)(\xi+\alpha_2)(\xi+\alpha_3)}=1$ *с условием* $Im\,\xi_0<-\alpha_0$.

Доказательство. Положим $R=\eta_0 n$, где $\eta_0=-\operatorname{Im}\xi_0$. Так как $\operatorname{Im}\xi_0<-\alpha_0<0$, то $R>0$, и согласно предложению 5

$$e^{-t\frac{n+3m}{2}}I_n(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty-iR}^{+\infty-iR}F_{n,m}(z)e^{tz}dz,$$

где $t=\dfrac{\pi i}{2}$.
Обозначим

$$J_n(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-iR}^{+\infty-iR}F_{n,m}(z)e^{tz}dz, \tag{22}$$

$$J_n^*(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty-iR}^{-iR}F_{n,m}(z)e^{tz}dz, \tag{23}$$

Будем рассматривать интеграл $J_n(t)$. Тогда z будет меняться в пределах:
$0\le\operatorname{Re}z<+\infty,\quad \operatorname{Im}z=-R$. Функция

$$F_{n,m}(z)=\Phi_{n,m}\left(z+\frac{n+3m}{2}\right)=R_{n+3m}\left(z+\frac{n+3m}{2}\right)R_{n+m}\left(z+\frac{n+m}{2}\right)\cdot$$
$$\cdot R_{n-m}\left(z+\frac{n-m}{2}\right)R_{n-3m}\left(z+\frac{n-3m}{2}\right).$$

По формуле (3) $R_n(z)=\dfrac{n!}{z(z-1)\cdots(z-n)}=\dfrac{n!\Gamma(z-n)}{\Gamma(z+1)}$. Тогда для функции $F_{n,m}(z)$ справедливо такое представление

$$F_{n,m}(z)=\frac{(n+3m)!\Gamma\left(z-\frac{n+3m}{2}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{n+3m}{2}+1\right)}\cdot\frac{(n+m)!\Gamma\left(z-\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{n+m}{2}+1\right)}\cdot\frac{(n-m)!\Gamma\left(z-\frac{n-m}{2}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{n-m}{2}+1\right)}\cdot$$
$$\cdot\frac{(n-3m)!\Gamma\left(z-\frac{n-3m}{2}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{n-3m}{2}+1\right)}$$

Имеет место формула Стирлинга [7]:

$$\ln\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln 2\pi-\int\limits_0^{+\infty}\frac{\theta(w)dw}{(z+w)^2}+2\pi iM(z),\ |z|\to\infty\,,|\arg z|<\pi-\varepsilon,$$

где $\theta(w) = \dfrac{\{w\}(\{w\}-1)}{2}$, $-\dfrac{1}{8} \le \theta(w) \le 0$, $M(z) \in \mathbb{Z}$, ε – положительное число, меньшее чем π.
Итак, по условию $\alpha_0 = \frac{1+3\lambda}{2}$, $\alpha_1 = \frac{1+\lambda}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1-\lambda}{2}$, $\alpha_3 = \frac{1-3\lambda}{2}$. Так как $\lambda \in \left(0\,, \dfrac{1}{3}\right)$, то $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > 0$.
Введем новую переменную ξ : $z = \xi n$, $\operatorname{Im}\xi = -\eta_0$, $0 \le \operatorname{Re}\xi < +\infty$. Поскольку $m = \lambda n$, то для $z - \frac{n+3m}{2}$ имеем

$$\left|z - \frac{n+3m}{2}\right| = n|\xi - \alpha_0| \to \infty\,,\ n \to \infty\,,$$

а также так как $\eta_0 = -\operatorname{Im}\xi_0 > \alpha_0$, то

$$\left|\arg\left(z - \frac{n+3m}{2}\right)\right| \le \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{R}{\frac{n+3m}{2}}\right) = \pi - \operatorname{arctg}\frac{\eta_0}{\alpha_0} < \pi - \frac{\pi}{4}\,.$$

Тогда мы можем записать формулу Стирлинга для $\Gamma(z - \frac{n+3m}{2}) = \Gamma(z - \alpha_0 n)$:

$$\ln\Gamma(z-\alpha_0 n) = \left(z - \alpha_0 n - \frac{1}{2}\right)\ln(z-\alpha_0 n) - (z-\alpha_0 n) + \frac{1}{2}\ln 2\pi -$$
$$- \int\limits_0^{+\infty} \frac{\theta(w)dw}{(z-\alpha_0 n + w)^2} + 2\pi i M(z - \alpha_0 n)\,.$$

Пусть $\delta > \dfrac{3}{2}\alpha_0$ – фиксированная константа. Обозначим $u = \operatorname{Re}\xi$. Тогда $\xi = u - i\eta_0$, $z = (u - i\eta_0)n$. Рассмотрим случаи: 1) $0 \le u < \delta$ и 2) $u \ge \delta$.
1) $0 \le u < \delta$:

$$\left|\int\limits_0^{+\infty} \frac{\theta(w)dw}{(z-\alpha_0 n + w)^2}\right| \le \frac{1}{8}\int\limits_0^{+\infty} \frac{dw}{|z-\alpha_0 n + w|^2} = \frac{1}{8}\int\limits_0^{+\infty} \frac{dw}{((u-\alpha_0)n + w)^2 + \eta_0^2 n^2} =$$
$$= \frac{1}{8\eta_0 n}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{u-\alpha_0}{\eta_0}\right) < \frac{\pi}{8\eta_0 n}\,.$$

2) $u \ge \delta$:

$$\left|\int\limits_0^{+\infty} \frac{\theta(w)dw}{(z-\alpha_0 n + w)^2}\right| \le \frac{1}{8}\int\limits_0^{+\infty} \frac{dw}{((u-\alpha_0)n + w)^2} = \frac{1}{8(u-\alpha_0)n} < \frac{1}{8(\delta-\alpha_0)n} < \frac{1}{4\alpha_0 n}\,.$$

Таким образом, для $z = \xi n$, $\operatorname{Im}\xi = -\eta_0$, $\operatorname{Re}\xi \ge 0$ выполняется

$$\ln\Gamma(z-\alpha_0 n) = \left(z - \alpha_0 n - \frac{1}{2}\right)\ln(z-\alpha_0 n) - (z-\alpha_0 n) + \frac{1}{2}\ln 2\pi +$$
$$+ 2\pi i M(z - \alpha_0 n) + O\left(\frac{1}{n}\right)\,, \quad n \to \infty\,,$$

где константа в $O(n^{-1})$ не зависит от z.
Аналогичный результат можно получить и для $\ln\Gamma\left(z-\dfrac{n+m}{2}\right)$, $\ln\Gamma\left(z-\dfrac{n-m}{2}\right)$, $\ln\Gamma\left(z-\dfrac{n-3m}{2}\right)$, ... , $\ln\Gamma\left(z+\dfrac{n-3m}{2}+1\right)$. Заменив в этих формулах z на ξn, m на λn, а также применив формулу Стирлинга к числам $\ln(n+3m)!$, $\ln(n+m)!$, $\ln(n-m)!$, $\ln(n-3m)!$, можем представить подынтегральную функцию в следующем виде

$$\ln(F_{n,m}(z)e^{tz}) = \ln\frac{(2\pi)^2\beta}{n^2} + \ln h(\xi) + f(\xi)n + 2\pi i M_n(\xi) + O(n^{-1}), \quad n\to\infty,$$

где $f(\xi) = \kappa + t\xi + \sum\limits_{k=0}^{3}\big((\xi-\alpha_k)\ln(\xi-\alpha_k) - (\xi+\alpha_k)\ln(\xi+\alpha_k)\big)$, $h(\xi) = \left(\prod\limits_{k=0}^{3}\dfrac{1}{\xi^2-\alpha_k^2}\right)^{\frac{1}{2}}$,
$\ln\xi = \ln|\xi| + i\arg\xi$, $\xi^{\frac{1}{2}} = |\xi|^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{1}{2}\arg\xi}$, $-\pi < \arg\xi \le \pi$, $M_n(\xi)\in\mathbb{Z}$, $\beta = (\beta_0\beta_1\beta_2\beta_3)^{\frac{1}{2}}$, а α_k, β_k и κ уже были определены в условии.
Поскольку $M_n(\xi)\in\mathbb{Z}$, то можем записать так

$$F_{n,m}(z)e^{tz} = \frac{(2\pi)^2\beta}{n^2}h(\xi)e^{f(\xi)n}\big(1+O(n^{-1})\big), \quad n\to\infty, \tag{24}$$

где $z=\xi n$. Используя это представление и полагая $\xi = u - i\eta_0$, перепишем интеграл $J_n(t)$ в виде

$$J_n(t) = \frac{2\pi\beta}{ni}\int\limits_0^{+\infty} h(u-i\eta_0)e^{f(u-i\eta_0)n}\big(1+O(n^{-1})\big)du, \quad n\to\infty. \tag{25}$$

Теперь покажем, что ξ_0 из условия есть корень $f'(\xi)$. Имеем,

$$f'(\xi) = t + \sum_{k=0}^{3}\big(\ln(\xi-\alpha_k) - \ln(\xi+\alpha_k)\big).$$

Поскольку $t = \dfrac{\pi i}{2}$, то

$$e^{f'(\xi)} = \frac{i(\xi-\alpha_0)(\xi-\alpha_1)(\xi-\alpha_2)(\xi-\alpha_3)}{(\xi+\alpha_0)(\xi+\alpha_1)(\xi+\alpha_2)(\xi+\alpha_3)}$$

Так как α_k действительные положительные, то уравнение

$$\frac{i(\xi-\alpha_0)(\xi-\alpha_1)(\xi-\alpha_2)(\xi-\alpha_3)}{(\xi+\alpha_0)(\xi+\alpha_1)(\xi+\alpha_2)(\xi+\alpha_3)} = 1 \tag{26}$$

имеет только чисто мнимые корни. По условию ξ_0 корень уравнения (26) и, следовательно, $\xi_0 = -i\eta_0$ и $e^{f'(\xi_0)} = 1$. Откуда, $f'(\xi_0) = 2\pi l i$, $l\in\mathbb{Z}$.

Имеем, $\operatorname{Im} f'(\xi_0) = \frac{\pi}{2} + \sum\limits_{k=0}^{3}\big(\arg(\xi_0-\alpha_k) - \arg(\xi_0+\alpha_k)\big) = \frac{\pi}{2} + \sum\limits_{k=0}^{3}\big(\arg(-\alpha_k - i\eta_0) -$ $- \arg(\alpha_k - i\eta_0)\big)$.
$\arg(-\alpha_k - i\eta_0) = -\pi + \operatorname{arctg}\frac{\eta_0}{\alpha_k}$, $\arg(\alpha_k - i\eta_0) = -\operatorname{arctg}\frac{\eta_0}{\alpha_k}$.
Поскольку $\eta_0 > \alpha_0$ и $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > 0$, то

$$\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg}\frac{\eta_0}{\alpha_0} < \operatorname{arctg}\frac{\eta_0}{\alpha_k} < \frac{\pi}{2}\,, \quad k = 0,1,2,3.$$

Получаем,

$$-\frac{3\pi}{4} < \arg(-\alpha_k - i\eta_0) < -\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg(\alpha_k - i\eta_0) < -\frac{\pi}{4}\,, \quad k = 0,1,2,3.$$

Тогда $-2\pi + \frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} f'(\xi_0) < \frac{\pi}{2}$, то есть $-2\pi + \frac{\pi}{2} < 2\pi l < \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; l = 0$. Отсюда получаем, что $f'(\xi_0) = 0$.
Поскольку
$f''(\xi_0) = \sum\limits_{k=0}^{3}\left(\frac{1}{\xi_0 - \alpha_k} - \frac{1}{\xi_0+\alpha_k}\right) = \sum\limits_{k=0}^{3}\frac{2\alpha_k}{\xi_0^2 - \alpha_k^2} = -\sum\limits_{k=0}^{3}\frac{2\alpha_k}{\eta_0^2+\alpha_k^2} =: -\omega^2 < 0$, то точка ξ_0 является точкой максимума функции $\operatorname{Re} f(\xi)$ на множестве $\operatorname{Im}\xi = -\eta_0$, $\operatorname{Re}\xi \geq 0$.
Положим $g(u) = \operatorname{Re} f(u - i\eta_0)$, $u \geq 0$. Также пусть $\delta_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$. Рассмотрим случаи: а) $u \geq \delta_n$, б) $0 \leq u < \delta_n$.
а) $u \geq \delta_n$:

$$g'(u) = \operatorname{Re} f'(u - i\eta_0) = \operatorname{Re}\Big(t + \sum_{k=0}^{3}\big(\ln(u - i\eta_0 - \alpha_k) - \ln(u - i\eta_0 + \alpha_k)\big)\Big) =$$
$$= \sum_{k=0}^{3}\ln\left|\frac{u - \alpha_k - i\eta_0}{u+\alpha_k - i\eta_0}\right| = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{3}\ln\frac{(u-\alpha_k)^2+\eta_0^2}{(u+\alpha_k)^2+\eta_0^2} < 0\,, \quad \forall u > 0.$$

Следовательно, $g(u) - g(\delta_n) = g'(u_0)(u - \delta_n) \leq 0$, $u_0 \in (\delta_n, u)$. То есть при любом $u \geq \delta_n$ выполнено $g(u) \leq g(\delta_n)$.
Согласно формуле Тейлора

$$g(\delta_n) = g(0) + \frac{g''(0)}{2}\delta_n^2 + O(\delta_n^3) = g(0) - \frac{\omega^2}{2}\frac{\ln^2 n}{n} + O\left(\frac{\ln^3 n}{n^{3/2}}\right)\,, \quad n \to \infty\,,$$

где $g(0) = \operatorname{Re} f(-i\eta_0) = \operatorname{Re} f(\xi_0)$, $\omega^2 = -f''(\xi_0) = -g''(0)$.
Поскольку функция $h(\xi)$ ограничена на прямой $\operatorname{Im}\xi = -\eta_0$, то

$$\left|\frac{2\pi\beta}{ni}\int\limits_{\delta_n}^{+\infty} h(u - i\eta_0)e^{f(u-i\eta_0)n}\big(1 + O(n^{-1})\big)du\right| \leq \frac{C_2 e^{g(\delta_n)n}}{n} = \frac{C_3 e^{g(0)n}e^{-\frac{\omega^2}{2}\ln^2 n}}{n} \qquad (27)$$

б) $0 \le u < \delta_n$: Обозначим $G_n(t) = \dfrac{2\pi\beta}{ni}\int\limits_0^{\delta_n} h(u - i\eta_0)e^{f(u-i\eta_0)n}\big(1 + O(n^{-1})\big)du$. Поскольку u мало, то

$$h(u - i\eta_0) = h(-i\eta_0)(1 + o(1)) = \omega_1(1 + o(1))\,,\ \text{где}\ \omega_1 = h(-i\eta_0) = \left(\prod_{k=0}^{3}\frac{1}{\eta_0^2 + \alpha_k^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$f(u - i\eta_0) = f(-i\eta_0) + \frac{f''(-i\eta_0)}{2}u^2 + O(u^3) = f(\xi_0) - \frac{\omega^2}{2}u^2 + O\left(\frac{\ln^3 n}{n^{3/2}}\right), \quad n \to \infty\,.$$

Тогда

$$G_n(t) = \frac{2\pi\beta}{ni}\int\limits_0^{\delta_n}\omega_1 e^{f(\xi_0)n}e^{-\frac{\omega^2}{2}u^2 n + O\left(\frac{\ln^3 n}{\sqrt{n}}\right)}(1 + o(1))du =$$

$$= \frac{2\pi\beta\omega_1}{ni}e^{f(\xi_0)n}\int\limits_0^{\delta_n}e^{-\frac{\omega^2}{2}u^2 n}(1 + o(1))du = \frac{2\pi\beta\omega_1}{ni}e^{f(\xi_0)n}\int\limits_0^{\omega\sqrt{n}}\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\omega\sqrt{n}}dy\cdot(1 + o(1)) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\pi^{3/2}\beta\omega_1}{\omega n^{3/2}i}e^{f(\xi_0)n}(1 + o(1))\,, \quad n \to \infty\,.$$

Таким образом, учитывая (27), мы получаем

$$J_n(t) = G_n(t) + e^{\operatorname{Re} f(\xi_0)n}O\left(\frac{e^{-\frac{\omega^2}{2}\ln^2 n}}{n}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi^{3/2}\beta\omega_1}{\omega n^{3/2}i}e^{f(\xi_0)n}\left(1 + o(1)\right)\,, \quad n \to \infty\,, \tag{28}$$

где $t = \dfrac{\pi i}{2}$.
Рассмотрим теперь интеграл $J_n^*(t)$. Здесь z меняется в пределах: $-\infty < \operatorname{Re} z \le 0$, $\operatorname{Im} z = -R = -\eta_0 n$.
Введем переменную $w = -\bar{z}$. Тогда для w справедливо $0 \le \operatorname{Re} w < +\infty$, $\operatorname{Im} w = -R$. Поскольку функция $F_{n,m}(z)$ удовлетворяет свойствам $F_{n,m}(-z) = F_{n,m}(z)$ и $F_{n,m}(\bar{z}) = \overline{F_{n,m}(z)}$, то $F_{n,m}(z) = F_{n,m}(-\bar{w}) = \overline{F_{n,m}(w)}$. Заметим, что так как $t = \dfrac{\pi i}{2}$, то $e^{tz} = e^{-t\bar{w}} = e^{\overline{tw}} = \overline{e^{tw}}$. Таким образом, производя замену $z = -\bar{w}$ в формуле (23), получим

$$J_n^*(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty-iR}^{-iR}F_{n,m}(z)e^{tz}dz = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{+\infty-iR}^{-iR}\overline{F_{n,m}(w)e^{tw}dw} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-iR}^{+\infty-iR}\overline{F_{n,m}(w)e^{tw}dw} =$$

$$= \overline{-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-iR}^{+\infty-iR}F_{n,m}(w)e^{tw}dw} = -\overline{J_n(t)}\,.$$

Согласно (28), получаем

$$J_n^*(t) = -\overline{\left(\frac{\sqrt{2}\pi^{3/2}\beta\omega_1}{\omega n^{3/2}i}\right)} e^{\overline{f(\xi_0)}n}\left(1+o(1)\right) = \frac{\sqrt{2}\pi^{3/2}\beta\omega_1}{\omega n^{3/2}i} e^{\overline{f(\xi_0)}n}\left(1+o(1)\right), \quad n\to\infty. \tag{29}$$

Как нетрудно убедиться, $\arg(-\xi_0+\alpha_k) = \pi + \arg(\xi_0-\alpha_k)$, $-\pi < \arg(-\xi_0+\alpha_k) < \pi$, $-\pi < \arg(\xi_0-\alpha_k) < \pi$, $k = 0,1,2,3$.
Тогда $\ln(-\xi_0+\alpha_k) = \ln(\xi_0-\alpha_k) + \pi i$, $k = 0,1,2,3$.
Аналогично, $\ln(-\xi_0-\alpha_k) = \ln(\xi_0+\alpha_k) + \pi i$, $k = 0,1,2,3$. Так как t и ξ_0 чисто мнимые, то

$$\begin{aligned}\overline{f(\xi_0)} &= \kappa + t\xi_0 + \sum_{k=0}^{3}\big((-\xi_0-\alpha_k)\ln(-\xi_0-\alpha_k) - (-\xi_0+\alpha_k)\ln(-\xi_0+\alpha_k)\big) = \\ &= \kappa + t\xi_0 + \sum_{k=0}^{3}\big(-(\xi_0+\alpha_k)(\ln(\xi_0+\alpha_k)+\pi i) + (\xi_0-\alpha_k)(\ln(\xi_0-\alpha_k)+\pi i)\big) = \\ &= \kappa + t\xi_0 + \sum_{k=0}^{3}\big((\xi_0-\alpha_k)\ln(\xi_0-\alpha_k) - (\xi_0+\alpha_k)\ln(\xi_0+\alpha_k)\big) - \pi i\sum_{k=0}^{3}2\alpha_k = \\ &= f(\xi_0) - 4\pi i = f(\xi_0) - 4\pi i.\end{aligned}$$

Поскольку

$$e^{-t\frac{n+3m}{2}} I_n(t) = J_n(t) + J_n^*(t),$$

то из формул (28), (29) получаем

$$e^{-t\frac{n+3m}{2}} I_n(t) = \frac{(2\pi)^{3/2}\beta\omega_1}{\omega n^{3/2}i} e^{f(\xi_0)n}\left(1+o(1)\right), \quad n\to\infty.$$

Так как $t = \dfrac{\pi i}{2}$, то $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left|I_n\left(\frac{\pi i}{2}\right)\right| = \operatorname{Re} f(\xi_0)$. □

Замечание.
Пусть $\xi_0 = -i\eta_0$ - корень уравнения (26) и $\eta_0 > \alpha_0$. Тогда

$$\operatorname{Re} f(\xi_0) = \kappa - \sum_{k=0}^{3}\alpha_k\ln(\eta_0^2+\alpha_k^2). \tag{30}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}f(\xi_0) = \kappa + \xi_0 f'(\xi_0) - \sum_{k=0}^{3}\alpha_k(\ln(\xi_0-\alpha_k)+\ln(\xi_0+\alpha_k)) = \\ = \kappa - \sum_{k=0}^{3}\alpha_k(\ln(\xi_0-\alpha_k)+\ln(\xi_0+\alpha_k))\end{aligned}$$

$\operatorname{Re} f(\xi_0) = \kappa - \sum\limits_{k=0}^{3} \alpha_k \ln|\xi_0^2 - \alpha_k^2| = \kappa - \sum\limits_{k=0}^{3} \alpha_k \ln(\eta_0^2 + \alpha_k^2).$ $\square$

Предложение 7. *При* $1 \le k \le 3$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln|Q_{k,n}(i)| \le \kappa - \sum_{k=0}^{3} \alpha_k \ln(\eta_1^2 + \alpha_k^2)\,, \tag{31}$$

где $\eta_1 = Im\xi_1$, ξ_1 *- корень уравнения* (26) *с условием* $-\alpha_3 < Im\xi_1 < 0$.

Доказательство. $1) k = 3$. $Q_{3,n}(w) = \sum\limits_{j=3m}^{n} c_{j,3} w^j = \sum\limits_{j=3m}^{n} B_j w^j$, где

$$B_j = \binom{n+3m}{j}\binom{n+m}{j-m}\binom{n-m}{j-2m}\binom{n-3m}{j-3m}.$$

Рассмотрим следующую функцию

$$B_{n,m}(\zeta) = \frac{(n+3m)!(n+m)!(n-m)!}{\prod\limits_{k=0}^{2}\Gamma(\zeta - km + 1)\Gamma(n+3m-\zeta+1)}.$$

Эта функция является аналитической во всей комплексной плоскости.
При $3m \le j \ge n$ имеем

$$B_{n,m}(j) = \binom{n+3m}{j}\binom{n+m}{j-m}\binom{n-m}{j-2m}.$$

Тогда мы можем вычислить следующий интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C B_{n,m}(\zeta)R_{n-3m}(\zeta-3m)e^{t\zeta+\pi i(n-\zeta)}d\zeta = \sum_{j=3m}^{n} \operatorname*{Res}_{\zeta=j}\big(B_{n,m}(\zeta)R_{n-3m}(\zeta-3m)e^{t\zeta+\pi i(n-\zeta)}\big) =$$
$$= \sum_{j=3m}^{n} B_{n,m}(j)(-1)^{n-j}\binom{n-3m}{j-3m}e^{tj+\pi i(n-j)} =$$
$$= \sum_{j=3m}^{n} \binom{n+3m}{j}\binom{n+m}{j-m}\binom{n-m}{j-2m}\binom{n-3m}{j-3m}e^{tj} = Q_{3,n}(e^t)\,,$$

где C - замкнутый контур, содержащий все полюса $j = 3m, ..., n$ подынтегральной функции.
Таким образом при $t = \dfrac{\pi i}{2}$:

$$Q_{3,n}(i) = Q_{3,n}(e^{\frac{\pi i}{2}}) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C B_{n,m}(\zeta)R_{n-3m}(\zeta-3m)e^{-\frac{\pi i}{2}\zeta+\pi i n}d\zeta$$

Сделаем замену $z = \zeta - \dfrac{n+3m}{2}$ и обозначим

$$G_{n,m}(z) = B_{n,m}\left(z + \frac{n+3m}{2}\right) R_{n-3m}\left(z + \frac{n+3m}{2} - 3m\right).$$

Полюсами этой функции будут точки $\zeta = j - \dfrac{n+3m}{2}$, $j = 3m, \dots, n$. В качестве контура можем выбрать прямоугольник:
$\Pi_{R_1,R_2,T} = \{z:\, -T \le \operatorname{Re} z \le T,\, \operatorname{Im} z = R_1\} \cup \{z:\, -R_2 \le \operatorname{Im} z \le R_1,\, \operatorname{Re} z = T\} \cup \{z:\, -T \le \operatorname{Re} z \le T,\, \operatorname{Im} z = -R_2\} \cup \{z:\, -R_2 \le \operatorname{Im} z \le R_1,\, \operatorname{Re} z = -T\}$, где $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, $T > \dfrac{n-3m}{2}$ фиксированы (будут выбраны позже).

$$Q_{3,n}(i) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Pi_{R_1,R_2,T}} G_{n,m}(z) e^{-\frac{\pi i}{2} z + 3\pi i \frac{n-m}{4}} dz.$$

Рассмотрим правую и левую половины контура $\Pi_{R_1,R_2,T}$. Обозначим их Π_z^r и Π_z^l. Положим

$$Q_{3,n}^r = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Pi_z^r} G_{n,m}(z) e^{-\frac{\pi i}{2} z} dz,$$
$$Q_{3,n}^l = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Pi_z^l} G_{n,m}(z) e^{-\frac{\pi i}{2} z} dz.$$

Пусть $z \in \Pi_z^r$. Тогда $|\arg z| < \pi - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < \pi$. Тогда используя формулу Стирлинга для гамма функции в этой области (проводя аналогичные рассуждения, что были в предложении 6), можем представить подынтегральную функцию в следующем виде

$$G_{n,m}(z) e^{-\frac{\pi i}{2} z} = \frac{(2\pi)^2 \beta}{n^2} h(\xi) e^{f_1(\xi) n} \left(1 + O(n^{-1})\right),$$

где $z = \xi n$, $f_1(\xi) = \kappa - \dfrac{\pi i}{2}\xi - \sum\limits_{k=0}^{2} \left((\alpha_k - \xi)\ln(\alpha_k - \xi) + (\alpha_k + \xi)\ln(\alpha_k + \xi)\right) +$
$+ (\xi - \alpha_3)\ln(\xi - \alpha_3) - (\xi + \alpha_3)\ln(\xi + \alpha_3)$; α_k, β, $h(\xi)$ были определены ранее, $\ln \xi =$
$= \ln|\xi| + i \arg \xi$, $-\pi < \arg \xi \le \pi$.

$$f_1'(\xi) = -\frac{\pi i}{2} + \sum_{k=0}^{2} \left(\ln(\alpha_k - \xi) - \ln(\alpha_k + \xi)\right) + \ln(\xi - \alpha_3) - \ln(\xi + \alpha_3)$$

$$e^{f_1'(\xi)} = \frac{-i(\alpha_0 - \xi)(\alpha_1 - \xi)(\alpha_2 - \xi)(\xi - \alpha_3)}{(\alpha_0 + \xi)(\alpha_1 + \xi)(\alpha_2 + \xi)(\xi + \alpha_3)} = \frac{i(\xi - \alpha_0)(\xi - \alpha_1)(\xi - \alpha_2)(\xi - \alpha_3)}{(\xi + \alpha_0)(\xi + \alpha_1)(\xi + \alpha_2)(\xi + \alpha_3)}.$$

Таким образом корни уравнения $e^{f_1'(\xi)} = 1$ являются корнями уравнения (26). Численно можно проверить, что для всех $\lambda \in \left(0\,, \dfrac{1}{3}\right)$ корни ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 уравнения (26) находятся в таких пределах

$$\operatorname{Im}\xi_0 < -\alpha_0, \quad 0 < \operatorname{Im}\xi_1 < \alpha_3, \quad -\alpha_0 < \operatorname{Im}\xi_2 < -\operatorname{Im}\xi_1, \quad \operatorname{Im}\xi_3 > \alpha_3\,.$$

Как мы знаем все корни уравнения (26) являются чисто мнимыми. Пусть $\xi_0 = -i\eta_0$, $\xi_1 = i\eta_1$, $\xi_2 = -i\eta_2$, $\xi_3 = i\eta_3$, тогда $0 < \eta_1 < \alpha_3$, $0 < \eta_1 < \eta_2 < \alpha_0$, $\eta_3 > \alpha_3$, $\eta_0 > \alpha_0$. Докажем, что ξ_1 и ξ_2 являются корнями уравнения $f_1'(\xi) = 0$. Имеем,

$$\operatorname{Im} f_1'(\xi_1) = -\frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{2} \left(\arg(\alpha_k - i\eta_1) - \arg(\alpha_k + i\eta_1)\right) + \arg(i\eta_1 - \alpha_3) - \arg(i\eta_1 + \alpha_3).$$

Поскольку $0 < \eta_1 < \alpha_3$, то

$$-\frac{\pi}{4} < \arg(\alpha_k - i\eta_1) < 0, \quad 0 < \arg(\alpha_k + i\eta_1) < \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4} < \arg(i\eta_1 - \alpha_k) < \pi\,, k = 0, 1, 2, 3$$

Откуда следует ,что $-\dfrac{3\pi}{2} < \operatorname{Im} f_1'(\xi_1) < \dfrac{\pi}{2}$. Но $\operatorname{Im} f_1'(\xi_1) = 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z} \Rightarrow f_1'(\xi_1) = 0$.

$$\operatorname{Im} f_1'(\xi_2) = -\frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{2} \left(\arg(\alpha_k + i\eta_2) - \arg(\alpha_k - i\eta_2)\right) + \arg(-i\eta_2 - \alpha_3) - \arg(-i\eta_2 + \alpha_3).$$

Поскольку $0 < \eta_2 < \alpha_0$, то

$$-\frac{\pi}{4} < \arg(\alpha_0 - i\eta_2) < 0, \quad 0 < \arg(\alpha_0 + i\eta_2) < \frac{\pi}{4},$$

при $k = 1, 2$:

$$-\frac{\pi}{2} < \arg(\alpha_k - i\eta_2) < 0, \quad 0 < \arg(\alpha_k + i\eta_2) < \frac{\pi}{2},$$

и $-\pi < \arg(-i\eta_2 - \alpha_3) < -\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2} < \arg(-i\eta_2 + \alpha_3) < 0$.
Откуда получаем, $-\dfrac{3\pi}{2} < \operatorname{Im} f_1'(\xi_2) < 2\pi$. Поскольку неравенства строгие, $f_1'(\xi_2) =$ $= 0$. Также можем проверить, что остальные корни уравнения (26) не обнуляют производную.
Возьмем $R_1 = \eta_1 n$, $R_2 = -\eta_2 n$, $T = cn$, где $c = \alpha_3 + \delta$, $0 < \delta < \dfrac{\lambda}{2}$.

$$Q^r_{3,n} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Pi^r_z} G_{n,m}(z) e^{-\frac{\pi i}{2} z} dz = \frac{2\pi\beta}{ni} \int\limits_{\Pi^r_\xi} h(\xi) e^{f_1(\xi) n} \left(1 + O(n^{-1})\right) d\xi\,,$$

где $\Pi_\xi^r = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, $S_1 = \{\xi :\ 0 \le \operatorname{Re}\xi \le c,\ \operatorname{Im}\xi = \eta_1\}$,
$S_2 = \{\xi :\ -\eta_2 \le \operatorname{Im}\xi \le \eta_1,\ \operatorname{Re} z = c\}$, $S_3 = \{\xi :\ 0 \le \operatorname{Re}\xi \le c,\ \operatorname{Im}\xi = -\eta_2\}$.
Поскольку $h(\xi)$ ограничена по модулю

$$|Q_{3,n}^r| \le \frac{4\pi\beta}{n} C_4 \max_{\xi\in\Pi_\xi^r} \left|e^{f_1(\xi)n}\right| (2c+\eta_1+\eta_2) < \frac{C_5}{n} \max_{\xi\in\Pi_\xi^r} \left|e^{f_1(\xi)n}\right|$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln|Q_{3,n}^r| \le \max_{\xi\in\Pi_\xi^r} \operatorname{Re} f_1(\xi)\,.$$

Пусть $\xi \in S_1$, $\xi = u + i\eta_1$, $0 \le u \le c$. Положим $g_1(u) = \operatorname{Re} f_1(u+i\eta_1)$. При $u > 0$

$$g_1'(u) = \operatorname{Re} f_1'(u+i\eta_1) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{3} \ln\frac{(u-\alpha_k)^2+\eta_1^2}{(u+\alpha_k)^2+\eta_1^2} < 0\,,$$

а $g_1'(0) = 0 \ \Rightarrow \max\limits_{\xi\in S_1} \operatorname{Re} f_1(\xi) = \operatorname{Re} f_1(\xi_1) = \kappa - \sum\limits_{k=0}^{3} \alpha_k \ln(\eta_1^2+\alpha_k^2)$.
Пусть $\xi \in S_3$, $\xi = u - i\eta_2$, $0 \le u \le c$. Положим $g_1(u) = \operatorname{Re} f_1(u-i\eta_2)$. При $u > 0$

$$g_2'(u) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{3} \ln\frac{(u-\alpha_k)^2+\eta_2^2}{(u+\alpha_k)^2+\eta_2^2} < 0\,,$$

$g_2'(0) = 0 \ \Rightarrow \max\limits_{\xi\in S_3} \operatorname{Re} f_1(\xi) = \operatorname{Re} f_1(\xi_2) = \kappa - \sum\limits_{k=0}^{3} \alpha_k \ln(\eta_2^2+\alpha_k^2) < \kappa - \sum\limits_{k=0}^{3} \alpha_k \ln(\eta_1^2+\alpha_k^2)$,
так как $\eta_1 < \eta_2$.
Пусть $\xi \in S_2$, $\xi = c + iv$, $-\eta_2 \le v \le \eta_1$. Положим $g_3(v) = \operatorname{Re} f_1(c+iv)$. Производная этой функции не обращается в ноль на отрезке $-\eta_2 \le v \le \eta_1$, так как $c \ne 0$, следовательно она достигает максимума на одном из концах. Тогда $\max\limits_{\xi\in S_2} \operatorname{Re} f_1(\xi) =$

$= \max\{\operatorname{Re} f_1(c+i\eta_1), \operatorname{Re} f_1(c-i\eta_2)\} < \operatorname{Re} f_1(\xi_1) = \kappa - \sum\limits_{k=0}^{3} \alpha_k \ln(\eta_1^2+\alpha_k^2)$.

Таким образом, $\max\limits_{\xi\in\Pi_\xi^r} \operatorname{Re} f_1(\xi) = \operatorname{Re} f_1(\xi_1) = \kappa - \sum\limits_{k=0}^{3} \alpha_k \ln(\eta_1^2+\alpha_k^2)$.

Пусть $z \in \Pi_z^l$. Нетрудно убедится, что функция $B_{n,m}(\zeta)$ удовлетворяет равенству $B_{n,m}(\zeta) = B_{n,m}(n+3m-\zeta)$. А функция $R_{n-3m}(\zeta-3m) = (-1)^{n-3m+1} R_{n-3m}(n-\zeta)$. А следовательно, функция $G_{n,m}(z) = (-1)^{n-3m+1} G_{n,m}(-z)$. Производя замену $z = -\bar{w}$ в интеграле $Q_{3,n}^l$ можно получить такое равенство

$$Q_{3,n}^l = (-1)^{n-3m} \overline{Q_{3,n}^r}\,.$$

Откуда следует $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \ln|Q_{3,n}^r| \le \max\limits_{\xi\in\Pi_\xi^r} \operatorname{Re} f_1(\xi) = \operatorname{Re} f_1(\xi_1)$.

Поскольку $Q_{3,n}(i) = e^{\frac{3(n-m)\pi i}{4}} (Q_{3,n}^r + Q_{3,n}^l)$, то

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln|Q_{3,n}(i)| \le \operatorname{Re} f_1(\xi_1) = \kappa - \sum_{k=0}^{3} \alpha_k \ln(\eta_1^2+\alpha_k^2)\,. \tag{32}$$

2) $k = 2$. Рассмотрим следующую функцию

$$W_{n,m}(\zeta) = \frac{(n+3m)!(n+m)!}{\prod\limits_{k=0}^{1}\Gamma(\zeta - km + 1)\Gamma(n + (3-k)m - \zeta + 1)} R_{n-m}(\zeta - 2m) R_{n-3m}(\zeta - 3m) \,,$$

где $R_{n-m}(\zeta - 2m) = \dfrac{(n-m)!\Gamma(\zeta - n - m)}{\Gamma(\zeta - 2m + 1)}$, $R_{n-3m}(\zeta - 3m) = \dfrac{(n-3m)!\Gamma(\zeta - n)}{\Gamma(\zeta - 3m + 1)}$.
Эту функцию можно записать так

$$W_{n,m}(\zeta) = \left(\frac{\sin \pi(n + 3m - \zeta)}{\pi}\right)\left(\frac{\sin \pi(n + 2m - \zeta)}{\pi}\right)\Phi_{n,m}(\zeta) \,.$$

Мы знаем, что $\Phi_{n,m}(\zeta) = \sum\limits_{k=0}^{3}\sum\limits_{j=km}^{n+(3-k)m}\dfrac{c_{j,k}}{(\zeta - j)^{k+1}}$. Также для любого целого j имеем

$$\sin \pi(n + 3m - \zeta) = (-1)^{n+3m+1-j}\sin \pi(\zeta - j) \,,$$
$$\sin \pi(n + 2m - \zeta) = (-1)^{n+2m+1-j}\sin \pi(\zeta - j) \,.$$

Тогда

$$W_{n,m}(\zeta) = (-1)^m \sum_{k=2}^{3}\sum_{j=km}^{n+(3-k)m}\frac{c_{j,k}}{(\zeta - j)^{k-1}} + \varphi(\zeta) \,,$$

где $\varphi(\zeta)$ аналитическая во всей комплексной плоскости функция.
Положим

$$E_n(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C W_{n,m}(\zeta)e^{t\zeta}d\zeta \,,$$

где C - замкнутый контур, содержащий все полюса $j = 2m, \ldots, n+m$ подынтегральной функции. Тогда

$$(-1)^m E_n(t) = tQ_{3,n}(e^t) + Q_{2,n}(e^t) \,.$$

Как и в первом случае сделаем замену $z = \zeta - \dfrac{n+3m}{2}$, положим

$$V_{n,m}(z) = W_{n,m}\left(z + \frac{n+3m}{2}\right) \,.$$

Выберем в качестве контура прямоугольник $\Pi_{R_1,R_2,T}$ с $R_1 = \eta_3 n$, $R_2 = \eta_2 n$ и $T = cn$, где $c = \alpha_2 + \delta$, $0 < \delta < \lambda/2$. Тогда этот контур содержит все полюса $j - \dfrac{n+3m}{2}$, $j = 2m, \ldots, n+m$ функции $V_{n,m}(z)$. Тогда

$$e^{-\pi i \frac{n+3m}{4}} E_n\left(\frac{\pi i}{2}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Pi_{R_1,R_2,T}} V_{n,m}(z)e^{\frac{\pi i}{2}z}dz \,.$$

Положим

$$E_n^r = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Pi_z^r} V_{n,m}(z) e^{\frac{\pi i}{2} z} dz \,,$$

$$E_n^l = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Pi_z^l} V_{n,m}(z) e^{\frac{\pi i}{2} z} dz \,,$$

где Π_z^r и Π_z^l соответственно правая и левая половины контура $\Pi_{R_1,R_2,T}$.
Тогда $\forall z \in \Pi_z^r$ при помощи формулы Стирлинга можем представить подынтегральную функцию в таком виде

$$V_{n,m}(z) e^{\frac{\pi i}{2} z} = \frac{(2\pi)^2 \beta}{n^2} h(\xi) e^{f_2(\xi) n} (1 + O(n^{-1})) \,,$$

где $z = \xi n$, $f_2(\xi) = \kappa + \frac{\pi i}{2}\xi - \sum\limits_{k=0}^{1} ((\alpha_k - \xi)\ln(\alpha_k - \xi) + (\alpha_k + \xi)\ln(\alpha_k + \xi)) +$
$+ \sum\limits_{k=2}^{3} ((\xi - \alpha_k)\ln(\xi - \alpha_k) - (\alpha_k + \xi)\ln(\alpha_k + \xi))$.
Поскольку

$$f_2'(\xi) = \frac{\pi i}{2} + \sum_{k=0}^{1} (\ln(\alpha_k - \xi) - \ln(\alpha_k + \xi)) + \sum_{k=2}^{3} (\ln(\xi - \alpha_k) - \ln(\alpha_k + \xi)) \,,$$

то корни уравнения $e^{f_2'(\xi)} = 1$ являются корнями уравнения (26). Докажем, что $\xi_2 = -i\eta_2$ и $\xi_3 = i\eta_3$, $\eta_1 < \eta_2 < \alpha_0$, $\eta_3 > \alpha_3$. Имеем, $0 < \eta_2 < \alpha_0$

$$-\frac{\pi}{4} < \arg(\alpha_0 - i\eta_2) < 0, \quad 0 < \arg(\alpha_0 + i\eta_2) < \frac{\pi}{4},$$
$$-\frac{\pi}{2} < \arg(\alpha_1 - i\eta_2) < 0, \quad 0 < \arg(\alpha_1 + i\eta_2) < \frac{\pi}{2},$$

при $k = 2, 3$

$$-\pi < \arg(-i\eta_2 - \alpha_k) < -\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg(-i\eta_2 + \alpha_k) < 0.$$

Откуда получаем, $-\frac{3\pi}{2} < \operatorname{Im} f_2'(\xi_2) < 2\pi \Rightarrow f_2'(\xi_2) = 0$.
Для $\xi_3 = i\eta_3$, $\eta_3 > \alpha_3$ также выполнено $-\frac{3\pi}{2} < \operatorname{Im} f_2'(\xi_3) < 2\pi \Rightarrow f_2'(\xi_3) = 0$.
Аналогично предыдущему пункту, получаем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln |E_n^r| \le \max\{\operatorname{Re} f_2(-i\eta_2), \operatorname{Re} f_2(i\eta_3)\} \,.$$

Также при помощи замены $z = -\bar{w}$ и формуле $V_{n,m}(z) = V_{n,m}(-z)$ можно получить, что $E_n^l = -\overline{E_n^r}$. Откуда следует, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \left| E_n\left(\frac{\pi i}{2}\right) \right| \le \max\{\operatorname{Re} f_2(-i\eta_2), \operatorname{Re} f_2(i\eta_3)\} \,.$$

Поскольку $f_2'(\xi_2) = 0$ и $f_2'(\xi_3) = 0$, то $\operatorname{Re} f_2(-i\eta_2) = \kappa - \sum\limits_{k=0}^{3} \alpha_k \ln(\eta_2^2 + \alpha_k^2)$, а $\operatorname{Re} f_2(i\eta_3) = \kappa - \sum\limits_{k=0}^{3} \alpha_k \ln(\eta_3^2 + \alpha_k^2)$. Но поскольку $\eta_2 > \eta_1$, а $\eta_3 > \alpha_3 > \eta_1$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \ln \left| E_n\left(\frac{\pi i}{2}\right)\right| < \kappa - \sum_{k=0}^{3} \alpha_k \ln(\eta_1^2 + \alpha_k^2).$$

Но $Q_{2,n}(i) = (-1)^m E_n(\frac{\pi i}{2}) - \frac{\pi i}{2} Q_{3,n}(i)$, а следовательно, учитывая (32), получим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \ln |Q_{2,n}(i)| \leq \kappa - \sum_{k=0}^{3} \alpha_k \ln(\eta_1^2 + \alpha_k^2). \tag{33}$$

3)$k = 1$. Рассмотрим функцию

$$\Psi_{n,m}(\zeta) = \frac{\sin \pi(n + 3m - \zeta)}{\pi} \Phi_{n,m}(\zeta).$$

С помощь равенства $\sin \pi(n+3m-\zeta) = (-1)^{n+3m+1-j} \sin \pi(\zeta - j)$ её можно записать в таком виде

$$\Psi_{n,m}(\zeta) = \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=km}^{n+(3-k)m} \frac{c_{j,k}(-1)^{n+3m+1-j}}{(\zeta - j)^k} + \psi(\zeta),$$

где $\psi(\zeta)$ некая аналитическая во всей комплексной плоскости функция.
Положим

$$U_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \Psi_{n,m}(\zeta) e^{t\zeta + \pi i(n+3m+1-\zeta)} d\zeta,$$

где C контур содержащий все полюса $j = m, \dots, n+2m$ подынтегральной функции.
Тогда

$$U_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=km}^{n+(3-k)m} \frac{c_{j,k}(-1)^{n+3m+1-j}}{(\zeta - j)^k} e^{t\zeta + \pi i(n+3m+1-\zeta)} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=km}^{n+(3-k)m} \frac{c_{j,k}(-1)^{n+3m+1-j}}{(\zeta - j)^k} e^{tj + \pi i(n+3m+1-j)} e^{(t-\pi i)(\zeta - j)} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=km}^{n+(3-k)m} \frac{c_{j,k} e^{tj} e^{(t-\pi i)(\zeta - j)}}{(\zeta - j)^k} d\zeta = \frac{(t-\pi i)^2}{2} Q_{3,n}(e^t) + (t - \pi i) Q_2(e^t) + Q_{1,n}(e^t).$$

Подставив $t = \dfrac{\pi i}{2}$, получим

$$U_n\left(\frac{\pi i}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{8} Q_{3,n}(i) - \frac{\pi i}{2} Q_{2,n}(i) + Q_{1,n}(i).$$

Сделав замену $z = \zeta - \dfrac{n+3m}{2}$ и выбрав в качестве контура интегрирования прямоугольник $\Pi_{R_1,R_2,T}$ с $R_1 = \eta_3 n$, $R_2 = \eta_0 n$, $T = cn$, $c = \alpha_1 + \delta$, $0 < \delta < \lambda/2$, можно аналогично предыдущим пунктам получить соответствующее представление подынтегральной функции, в котором вместо $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ будет стоят $f_3(\xi) = = \kappa - \frac{\pi i}{2}\xi - (\alpha_0 - \xi)\ln(\alpha_0 - \xi) - (\alpha_0 + \xi)\ln(\alpha_0 + \xi) + \sum\limits_{k=1}^{3}(\ln(\xi - \alpha_k) - \ln(\alpha_k + \xi))$.
Также можно показать, что $-\dfrac{3\pi}{2} < \operatorname{Im} f_3'(\xi_3) < 2\pi$ и $-\dfrac{3\pi}{2} < \operatorname{Im} f_3'(\xi_0) < \dfrac{\pi}{2}$, откуда будет следовать, что ξ_0 и ξ_3 корни производной функции $f_3(\xi)$. Далее, аналогично рассуждениям предыдущих пунктов, можно получить, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \ln \left| U_n\left(\frac{\pi i}{2}\right)\right| \le \max\{\operatorname{Re} f_3(-i\eta_0), \operatorname{Re} f_3(i\eta_3)\}.$$

Поскольку $\eta_0 > \alpha_0 > \eta_1$ и $\eta_3 > \eta_1$ получаем, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \ln \left| U_n\left(\frac{\pi i}{2}\right)\right| < \kappa - \sum_{k=0}^{3} \alpha_k \ln(\eta_1^2 + \alpha_k^2).$$

Но так как $Q_{1,n}(i) = U_n\left(\frac{\pi i}{2}\right) + \dfrac{\pi^2}{8} Q_{3,n}(i) + \dfrac{\pi i}{2} Q_{2,n}(i)$, то учитывая (32) и (33), получим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \ln |Q_{1,n}(i)| \le \kappa - \sum_{k=0}^{3} \alpha_k \ln(\eta_1^2 + \alpha_k^2).$$

Таким образом предложение доказано. □

2.4. Доказательство теоремы.

Теорема 1.

$$\mu(\pi) < 13,398.$$

Лемма 5. *Пусть $K \ge 1$ положительное целое и γ действительное число. Положим*

$$\sum_{k=0}^{K} p_{k,n}\gamma^k = \varepsilon_n$$

для всех $n \ge 1$, где каждое $p_{k,n} \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$. Предположим, что

$$\overline{\lim} \frac{1}{n} \ln |p_{k,n}| \le \sigma \quad (1 \le k \le K), \quad \lim \frac{1}{n} \ln |\varepsilon_n| = -\tau$$

с положительными σ и τ. Тогда $\mu(\gamma) < K(1 + \sigma/\tau)$.

Лемма 6. *Пусть u, v - действительные числа, удовлетворяющие неравенствам $0 < u < v < 1$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{u \le \{n/p\} < v} \ln p = \psi(v) - \psi(u),$$

где $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ - логарифмическая производная гамма-функции.

Итак, положим $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \Delta_n$. Выберем $\lambda = \frac{3}{31}$. Тогда по лемме 6 находим

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\{n/31p\} \in \Omega} \ln p + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\{n/31p\} \in \Omega'} \ln p = \frac{1}{31} \left(\int\limits_{\Omega} \psi'(x) dx + \int\limits_{\Omega'} \psi'(x) dx \right) = \\ = 1,33418...$$

Положим $M_{n,m} = 48 T_{n+3m} T_{n+2m} T_{n+m} / \Delta_n$. Тогда

$$p_{k,n} = \frac{M_{n,m}}{k!} \left(\frac{i}{2} \right)^k Q_{k,n}(i) \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$$

и для $\varepsilon_n = M_{n,m} I_n \left(\frac{\pi i}{2} \right)$ выполнено

$$\sum_{k=0}^{3} p_{k,n} \pi^k = \varepsilon_n \, .$$

Теперь находим

$$\overline{\lim} \frac{1}{n} \ln |p_{k,n}| \le \sigma = 3 + \frac{18}{31} - \rho + 2,69866... = 4,94511...$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln |\varepsilon_n| = -\tau = 3 + \frac{18}{31} - \rho - 3,67325... = -1,42679...$$

По лемме 5 получаем

$$\mu(\pi) < 3 \left(1 + \sigma/\tau\right) = 13,39767659... < 13,398.$$

3. Выводы и заключение

Таким образом, мы вывели оценку Хаты на меру иррациональности π. Заметим, что мы выбрали тоже значение параметра λ, что и у Хаты. При этом, согласно предложениям 6 и 7, мы знаем, как зависят асимптотические оценки для интеграла и коэффициентов от параметра λ. Однако, мы еще должны учесть вклад простых чисел для знаменателя коэффициентов $c_{j,k}$. Поэтому приходится рассматривать только рациональные значения параметра $\lambda = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$, $(a,b) = 1$. В таком случае, мы можем для произвольных a и b с условием $\frac{a}{b} = \lambda \in \left(0\,, \frac{1}{3}\right)$, $(a,b) = 1$ проделать аналогичные рассуждения, что проделаны в пункте 2.2 для $a = 3$, $b = 31$, и установить, что выполняется следующее

$$c_{j,k} \in \frac{\Delta_n(a,b)}{T_{n+3m}T_{n+2m}T_{n+m}}\mathbb{Z}\,,$$

где $\Delta_n(a,b) = \prod_{\{n/bp\}\in\Omega} p \prod_{\{n/bp\}\in\Omega'} p\,, \quad \Omega = \Omega(a,b) = \{0 \le w < 1 : \mu(aw,bw,s) \ge 1 \ \ \forall s\}\,,$ $\Omega' = \Omega'(a,b) = \{0 \le w < 1 : \mu(aw,bw,s) \ge 2 \ \ \forall s\}$, все p меньше $n + 3m$ и больше $\sqrt{n+3m}$. Но чтобы посчитать предел $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \Delta_n(a,b)$, мы должны конкретные промежутки, которых находится $\left\{\frac{n}{bp}\right\}$. В общем случае, для произвольных a и b, это сделать не представляется возможным, поскольку количество этих промежутков также зависит от a и b. Однако, при конкретных рациональных значениях λ, мы можем найти эти промежутки при помощи вычислительной техники, как мы искали их в лемме 3 и 4 пункта 2.2. Тогда мы можем говорить о некой оптимизации оценки на меру π по рациональному параметру $\lambda \in \left(0\,, \frac{1}{3}\right)$. Как показывают вычисления, значение $\lambda = \frac{3}{31}$ дает действительно хорошую оценку на меру π. На данный момент проверено, что вблизи $\frac{3}{31}$ оценка принимает оптимальные значения, причем среди значений с $b < 100$ нет лучших, чем при $b = 31$ и $a = 3$. При $b \ge 100$ улучшения пока не найдены.

Список литературы

[1] K. Mahler, On the approximation of π , Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 56 (1953), 30–42.

[2] M. Mignotte, Approximations rationnelles de π et quelques autres nombres , Bull. Soc. Math. France Mém. 37 (1974), 121–132.

[3] G. V. Chudnovsky, Hermite–Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π, in: Lecture Notes in Math. 925, Springer, Berlin 1982, 299–322.

[4] D. V. Chudnovsky and G. V. Chudnovsky, Recurrences, Padé approximations and their applications, in: Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 92, Dekker, New York 1984, 215–238.

[5] M. Hata, A lower bound for rational approximations to π, J. Number Theory, to appear.

[6] M. Hata, Rational approximations to π and some other numbers, Acta Arith., 63:4 (1993), 335–349.

[7] А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций (2-е изд.), том 2, сс. 303—324. Наука, Москва, 1968.

[8] Ю. В. Нестеренко, “Некоторые замечания о $\zeta(3)$”, Матем. заметки, 59:6 (1996), 865–880.

[9] Ю. В. Нестеренко, “О показателе рациональности числа $\ln 2$”, Матем. заметки, 88:4 (2010), 549–564.

[10] В. Х. Салихов, "О мере иррациональности числа π" , УМН, 63:3 (2008), 163–164.