ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА»

Механико-математический факультет
Кафедра теории чисел

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА
специалиста

Теорема Ратнер и её приложения в теории чисел

Ratner's Theorem and its Applications in Number Theory

Выполнила студентка группы №605
Максимова Дарья Константиновна

(подпись студента)

Научный руководитель:
профессор Мощевитин Николай Германович

(подпись научного руководителя)

Москва, 2019 г.

Содержание

1 Введение

В данной работе будут затронуты две темы:
A) Гипотеза Оппенгейма о значениях вещественной квадратичной формы, не являющейся знакоопределенной.
B) Поведение унипотентных орбит точек в пространстве

$$SL_2(\mathbb{Z})\backslash SL_2(\mathbb{R})$$

На первый взгляд, вопрос A) относится к аналитической теории чисел в то время как вопрос B) относится к эргодической теории а также теории групп Ли. Однако между ними имеется глубокая связь, и одной из целей работы является рассмотрение некоторых вопросов, касающихся применения топологической теоремы Ратнер к доказательству гипотезы Оппенгейма. Существует довольно много литературы, где этот вопрос затрагивается: например, в книге [3], однако многие шаги доказательства в данной книге сформулированы в виде упражнений. В литературе же чаще всего обсуждается доказательство гипотезы Оппенгейма, близкое к оригинальному доказательству Маргулиса, который решил эту проблему в 1987 году, т.е. до появления теорем Ратнер.
В работе приведено подробное доказательство теоремы Ратнер о классификации мер в случае $G = SL_2(\mathbb{R})$, частично иллюстрирующее идеи из оригинального доказательства самой Ратнер. Само доказательство является очень техническим, и потому оно снабжено некоторыми комментариями и пояснениями. Также более подробно будут рассмотрены вопросы применения теоремы Ратнер для доказательства гипотезы Оппенгейма.

2 Сведения из эргодической теории

В данном разделе мы введем основные определения, а также сформулируем некоторые теоремы из эргодической теории. Большая часть приведенного материала понадобится нам для доказательства теоремы Ратнер о классификации мер в случае $SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})$.

2.1 Основные понятия

Определение 2.1 *Динамической системой с дискретным временем называют множество X вместе с его преобразованием $T : X \to X$. Динамической системой с непрерывным временем называют множество X вместе с однопараметрическим семейством отображений $T_t : X \to X$, $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, которые образуют полугруппу, т.е. обладают следующими свойствами: $T_s \circ T_t = T_{s+t}$; T_0 - тождественное отображение. Если T пробегает $\mathbb{R}$, то данное семейство называется потоком, а T_t обратимо ($T_{-t} = T_t^{-1}$).*

Определение 2.2 *Непустое семейство $\mathcal{F}$ подмножеств множества X называется σ-алгеброй, если оно содержит в себе пустое множество, а также замкнуто относительно операций счётного объединения, счётного пересечения и дополнения. Мерой на $\mathcal{F}$ называется неотрицательная функция $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \bigcup \{\infty\}$, также являющаяся σ-аддитивной, то есть для любого счётного набора дизъюнктивных множеств $A_i \in \mathcal{F}$ верно $\mu(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i)$.*

В случае, когда $\mu(X) = 1$, будем называть меру μ *вероятностной* мерой, а тройку $(X, \mathcal{F}, \mu)$ будем называть *вероятностным пространством.*

Определение 2.3 *Преобразование $T : (X, \mathcal{F}, \mu) \to (Y, \mathcal{G}, \nu)$ называется измеримым, если для каждого измеримого множества $U \subset Y$ его прообраз $T^{-1}(U)$ тоже является измеримым множеством.*

Определение 2.4 *Измеримое преобразование $T : X \to Y$ сохраняет меру, если $\mu(T^{-1}(U) = \mu(U)$ для любого измеримого $U \subset Y$.*

Определение 2.5 *Если T сохраняет меру μ, то μ называется T-инвариантной мерой.*

Традиционно будем писать *для почти всех x* или *почти всюду (п.в.)* для обозначения "для всех элементов множества X, за исключением элементов некоторого множества меры нуль". Далее мы будем иметь дело с преобразованиями $T : X \to X$, с вероятностной мерой μ на X. Охарактеризуем T-инвариантные вероятностные меры.

Лемма 2.1 *Вероятностная мера μ на X является T-инвариантной тогда и только тогда, когда для любого $f \in L^1$ выполнено:*

$$\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X f \circ T d\mu \tag{1}$$

Доказательство. 1) Пусть (1) верно для всех $f \in L^1$, тогда для любого измеримого A имеем

$$\mu(A) = \int\limits_X \chi_A d\mu = \int\limits_X \chi_{T^{-1}A} d\mu = \int\limits_X \chi_A \circ T d\mu = \mu(T^{-1}A).$$

2) Так как $f = f^+ - f^-$, то без ограничения общности будем считать, что f положительна. Обратно имеем

$$\int\limits_X \chi_A d\mu = \mu(A) = \mu(T^{-1}A) = \int\limits_X \chi_{T^{-1}A} d\mu = \int\limits_X \chi_A \circ T d\mu.$$

Итак, (1) верно для всех простых функций. Для $f \in L^1$ по определению интеграла Лебега существует последовательность простых функций $\{f_n\}$, таких что они п.в. сходятся к f, $\int |f_n - f_m| d\mu \to 0$ при $n \to \infty, m \to \infty$, $\int\limits_X f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu$. Так как функция f положительна, то последовательность простых $\{f_n\}$ можно выбрать монотонно возрастающей [10, стр.202], откуда $\{f_n \circ T\}$ монотонно возрастает и п.в. сходится к $f \circ T$, и по теореме Лебега о монотонной сходимости

$$\int\limits_X f \circ T d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \circ T d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu.$$

∎

Определение 2.6 *Множество A называется T-инвариантным, если оно измеримо и $T^{-1}(A) = A$.*

Определение 2.7 *T является эргодическим преобразованием на вероятностном пространстве (X, μ), если оно сохраняет меру, а любое T-инвариантное подмножество A имеет либо меру $\mu(A) = 1$, либо меру $\mu(A) = 0$.*

Определение 2.8 *Сохраняющее меру преобразование T обладает свойством перемешивания на вероятностном (X, μ), если для любых измеримых A, B выполнено*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Замечание. Альтернативное определение: для любых $f, g \in L^2(X, \mu)$ выполнено

$$\lim_{n\to\infty} g(f \circ T^n)d\mu = \int\limits_X gd\mu \int\limits_X fd\mu.$$

Также ясно, что из свойства перемешивания следует эргодичность (для произвольного T-инвариантного A имеем $\mu(A \cap B) = \lim\limits_{n\to\infty}(T^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B)$, и если B=A, то $\mu(A) = \mu^2(A)$).

2.2 Теорема Бирхгофа-Хинчина

Теорема 2.1 ***(Теорема Бирхгофа-Хинчина)***
1) Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ - динамическая система, сохраняющая меру. Тогда для любого $f \in L_1(\mu)$ почти всюду существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x) + f(T(x)) + \cdots + f(T^{n-1}(x))}{n} = f^*(x)$$

причем

$$\int\limits_X f^*(x)dx = \int\limits_X f(x)dx$$

2) Если T эргодическое, то для почти всех точек $x \in X$ верно

$$f^*(x) = \int\limits_X f(x)dx$$

или, иначе говоря

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x) + f(T(x)) + \cdots + f(T^{n-1}(x))}{n} = \int\limits_X f(x)dx$$

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма.
Лемма. Пусть фиксировано некоторое $M > 0$, и даны две последовательности неотрицательных действительных чисел $\{a_n\}_{n\geq 0}$ и $\{b_n\}_{n\geq 0}$, причем для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ существует $m : 1 \leq m \leq M$, такое что

$$a_n + \cdots + a_{n+m-1} \geq b_n + \cdots + b_{n+m-1}$$

Тогда для любого $N > M$

$$a_0 + \cdots + a_{N-1} \geq b_0 + \cdots + b_{N-M+1}$$

Доказательство. Из условия следует, что можем найти числа $m_0 < m_1 < \cdots < m_k < N$, такие что $m_0 \leq M$, $m_{i+1} - m_i \leq M$ для всех $i = \overline{0, k-1}$, и $N - m_k \leq M$, причем

$$a_0 + \cdots + a_{m_0-1} \geq b_0 + \cdots + b_{m_0-1}$$

$$a_{m_0} + \cdots + a_{m_1-1} \geq b_{m_0} + \cdots + b_{m_1-1}$$

$$\cdots$$

$$a_{m_{k-1}} + \cdots + a_{m_k-1} \geq b_{m_{k-1}} + \cdots + b_{m_k-1}$$

Сложим

$$a_0+\cdots+a_{N-1} \geq a_0+\cdots+a_{m_k-1} \geq b_0+\cdots+b_{m_k-1} \geq b_0+\cdots+b_{N-M+1}$$

■

Доказательство теоремы. 1) Будем считать, что $f \geq 0$ (иначе $f = f^+ - f^-$). Введем обозначения

$$f_n(x) = f(x) + \cdots + f(T^{n-1}x)$$

$$\overline{f}(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{n} \quad \underline{f}(x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{n}$$

Заметим, что $\underline{f}$ и $\overline{f}$ инвариантны относительно T. Это следует из того, что

$$\overline{f}(Tx) = \limsup_{n\to\infty} \frac{f_n(Tx)}{n} = \limsup_{n\to\infty} \left[\frac{f_{n+1}(x)}{n+1}\frac{n+1}{n} - \frac{f_n(x)}{n}\right]$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{n+1} = \overline{f}(x)$$

Аналогично для $\underline{f}$. Для доказательства первой части теоремы достаточно доказать, что

$$\int\limits_X \overline{f}(x)d\mu \leq \int\limits_X f(x)d\mu \leq \int\limits_X \underline{f}(x)d\mu$$

а) Докажем, что $\int\limits_X \overline{f}(x)d\mu \leq \int\limits_X f(x)d\mu$. Для этого выберем и зафиксируем $0 < \epsilon < 1$ и произвольное действительное число $L > 0$. По определению $\overline{f}$ для любого $x \in X$ существует натуральное m, такое что

$$\frac{f_m(x)}{m} \geq \min(\overline{f}(x), L)(1-\epsilon)$$

Также верно, что для любого $\delta > 0$ существует некоторое $M > 0$, такое что множество

$$X_0 = \{x \in X : \exists 1 \leq m \leq M, \text{ причем } f_m(x) \geq m \min(\overline{f}(x), L)(1-\epsilon)\}$$

имеет меру $\mu X_0 \geq 1 - \delta$. Определим на X функцию F следующим образом

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X_0 \\ L, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что $f \leq F$ (для точек вне X_0 достаточно взять $m = 1$). Теперь воспользуемся леммой. Для каждого $x \in X$ положим $a_n = a_n(x) = F(T^n x)$, а $b_n = b_n(x) = min(\overline{f}, L)(1-\epsilon)$. Покажем, что последовательности удовлетворяют условиям леммы с $M > 0$, определенным выше. Действительно, если $T^n x \in X_0$, то для некоторого $1 \leq m \leq M$

$$f_m(T^n x) \geq m \min(\overline{f}(T^n x), L)(1-\epsilon) =$$

$$= m \min(\overline{f}(x), L)(1-\epsilon) = b_n + \cdots + b_{n+m-1}$$

И потому

$$a_n + \cdots + a_{n+m-1} = F(T^n x) + \cdots + F(T^{n+m-1}x) \geq f(T^n x) + \cdots + f(T^{n+m-1}x) =$$

$$f_m(T^n x) \geq b_n + \cdots + b_{n+m-1}$$

В случае, когда $T^n x$ лежит в дополнении к X_0 все совсем просто. Возьмем $m = 1$, и тогда

$$a_n = F(T^n x) = L \geq \min(\overline{f}(T^n x), L)(1-\epsilon) = b_n$$

Теперь можем воспользоваться леммой. Итак, по лемме для всех $N > M$ верно

$$F(x) + \cdots + F(T^{N-1}x) \geq (N-M)\min(\overline{f}(x), L)(1-\epsilon)$$

Проинтегрируем обе части, пользуясь тем фактом, что T сохраняет меру

$$N\int\limits_X F(x)d\mu \geq (N-M)\int\limits_X \min(\overline{f}(x), L)(1-\epsilon)d\mu$$

Так как

$$\int\limits_X F(x)d\mu = \int\limits_{X_0} f(x)d\mu + L\mu(X \setminus X_0)$$

то

$$\int\limits_X f(x)d\mu \geq \int\limits_{X_0} f(x)d\mu \geq \frac{N-M}{N}\int\limits_X \min(\overline{f}(x), L)(1-\epsilon)d\mu - L\delta$$

Если мы последовательно перейдем к пределам $N \to \infty$, $\delta \to 0$ и $\epsilon \to 0$, то

$$\int\limits_X f(x)d\mu \geq \int\limits_X \min(\overline{f}(x), L)d\mu$$

Теперь, воспользовавщись теоремой Леви о монотонной сходимости, передем к пределу $L \to \infty$, и получим интегрируемость $\overline{f}$ и нужное нам соотношение

$$\int\limits_X \overline{f}(x)d\mu \leq \int\limits_X f(x)d\mu$$

б) Докажем, что $\int\limits_X f(x)d\mu \leq \int\limits_X \underline{f}(x)d\mu$. Зафиксируем $\epsilon > 0$ и $\delta_0 > 0$. Так как $f \geq 0$, то $\exists \delta > 0 : \forall A \in \mathcal{G}$ с $\mu A < \delta$ выполняется $\int\limits_A f d\mu < \delta_0$. Также по определению $\underline{f}$ для любого $x \in Y$ существует m, такое что $\frac{f_m(x)}{m} \leq \underline{f}(x) + \epsilon$. А значит, можем выбрать такое $M > 0$, что множество

$$Y_0 = \{x \in X : \exists 1 \leq m \leq M, \text{ причем } f_m(x) \leq m(\underline{f}(x) + \epsilon)\}$$

имеет меру $\mu Y_0 \geq 1 - \delta$. Определим на X функцию G следующим образом

$$G(x) = \begin{cases} f(x), & x \in Y_0 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Легко видеть, что $G \leq f$. Положим $a_n = \underline{f}(x) + \epsilon$, а $b_n = G(T^n x)$. Эти последовательности удовлетворяют условиям леммы, отсюда для любого $N > M$ верно

$$G(x) + \cdots + G(T^{N-M+1}x) \leq N(\underline{f}(x) + \epsilon)$$

Интегрируем

$$(N - M) \int\limits_X G(x) d\mu \geq N(\int\limits_X \underline{f}(x) d\mu + \epsilon)$$

Так как $\mu(X \setminus Y_0) < \delta$, то $\int\limits_{X \setminus Y_0} f(x) d\mu < \delta_0$, откуда

$$\int\limits_X f(x) d\mu = \int\limits_X G(x) d\mu + \int\limits_{X \setminus Y_0} f(x) d\mu \leq \frac{N}{N - M} \int\limits_X (\underline{f}(x) + \epsilon) d\mu + \delta_0$$

Если мы последовательно перейдем к пределам $N \to \infty$, $\delta \to 0$ (и, следовательно, $\delta_0 \to 0$) и $\epsilon \to 0$, то получим нужный нам результат. Итак, первая часть теоремы доказана.

2) Докажем, что $f^*(x) = c$ почти всюду. Введем обозначение $E_\alpha = \{x \in Y : f^*(x) > \alpha\}$. Пусть M есть верхняя грань $f^*(x)$ с точностью до множества меры нуль, т.е. $\mu(E_M) = 0$, при этом для любого $\epsilon > 0$ $\mu E_{M-\epsilon} > 0$. Обозначим за m нижнюю грань. Хотим доказать, что $M = m$. Будем доказывать от противного.

Пусть $M \neq m$, то есть существует некоторое α, такое что $m < \alpha < M$, тогда по определению M и по определению m

$$\mu(E_\alpha) > 0 \quad \mu(Y \setminus E_\alpha) > 0$$

Но эти множества инвариантны. Противоречие. ■

3 Теоремы Ратнер

3.1 Некоторые определения

Определение 3.1 *Группа Ли G есть гладкое многообразие, снабженное групповой структурой таким образом, что групповые операции $x, y \to xy$ и $x \to x^{-1}$ суть гладкие отображения.*

Определение 3.2 *Подгруппой Ли в группе Ли называется замкнутое гладкое подмногообразие, замкнутое относительно операции умножения.*

Определение 3.3 *Правой мерой Хаара ν в G называется определенная на борелевской σ-алгебре группы G мера ν, обладающая следующими свойствами:*

- $\nu(Eg) = \nu(E)$ *для любых* $g \in G$ *и борелевского* E,
- $\nu(K) < \infty$ *для любого компактного* K,
- $\nu(E) = \inf\{\nu(U) : E \subseteq U, U \text{ открытое}\}$,
- $\nu(E) = \sup\{\nu(K) : K \subseteq E, K \text{ компакт}\}$.

Известно, что мера Хаара существует и единственна с точностью до множителя.

Определение 3.4 *Решеткой Γ в G называется дискретная подгруппа G, факторпространство по которой имеет конечный объём в смысле меры Хаара.*

Определение 3.5 *Алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ называется векторное пространство над полем k, $char(k) = 0$, такое что задано*

- $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *билинейное отображение* $X, Y \to [X, Y]$
- $[X, Y] = -[Y, X]$
- *выполнено тождество Якоби* $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$

На касательном пространстве T_eG группы Ли G в единице имеется естественная структура алгебры Ли, это пространство обозначают $\mathfrak{g}$ и называют алгеброй Ли группы G.

3.2 Формулировки основных теорем

Пусть G есть группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, а Γ – дискретная подгруппа G, $\pi : G \to \Gamma\backslash G$ есть проекция $\pi(g) = \Gamma g, g \in G$. Группа G действует на $\Gamma\backslash G$ правыми сдвигами $x \to xg$, $x \in \Gamma\backslash G, g \in G$.

Определение 3.6 *Подмножество $A \subset \Gamma\backslash G$ называется однородным, если существует $x \in G$ и замкнутая подгруппа $H \subset G$ такая, что $xHx^{-1} \cap \Gamma$ это решетка в xHx^{-1} и $A = \pi(x)H$*

Определение 3.7 *Борелевская вероятностная мера μ на $G\backslash\Gamma$ называется алгебраической, если существует $x \in \Gamma\backslash G$ и замкнутая подгруппа $H \subset G$ такая, что xH однородна и μ есть H-инвариантная борелевская мера с носителем на xH.*

Нас интересует в первую очередь группа $G = SL_n(\mathbb{R})$. Приведем для этой группы определение унипотентного элемента.

Определение 3.8 *Элемент u группы $G = SL_n(\mathbb{R})$ называется унипотентным, если существует некоторое $n \in \mathbb{N}$
такое, что $(u - I)^n = 0$.*

Более общее определение может быть найдено, например, в [1].

Определение 3.9 *Подгруппа $U \subset G$ называется унипотентной, если она состоит из унипотентов.*

В контексте гипотезы Оппенгейма, которую мы рассмотрим позже, наибольший интерес для нас представляет следующая теорема:

Теорема 3.1 ***(О замыкании орбит)*** *Пусть $X = \Gamma\backslash G$ есть однородное пространство с конечным объемом, где G есть связная группа Ли, Γ есть решетка в G, а U – связная подгруппа G, порождённая унипотентными однопараметрическими подгруппами. Тогда для любого $x \in \Gamma\backslash G$ существует замкнутая связная подгруппа $S \subset G$, содержащая в себе U, такая что $\overline{xU} = xS$, причем замкнутая орбита xS имеет конечную S-инвариантную меру.*

Данная теорема была получена в [7] из более сильного результата

Теорема 3.2 ***(О равномерной распределенности)*** *Пусть $X = \Gamma\backslash G$ есть однородное пространство с конечным объемом, где G есть связная группа Ли, Γ есть решетка в G, а U – связная подгруппа G, порождённая унипотентными однопараметрическими подгруппами. Тогда для любого $x \in \Gamma\backslash G$ существует замкнутая связная подгруппа $S \subset G$, содержащая в себе U, такая что орбита xS замкнута и траектория xU равномерно распределена относительно некоторой S-инвариантной вероятностной меры μ с носителем на xS. Другими словами, для любой непрерывной ограниченной функции f на $X = \Gamma\backslash G$*

$$\lim_{T\to\infty} = \int_0^T f(u_t x)dt = \int_{xS} f d\mu.$$

Приведенная выше теорема использует теорему Ратнер о классификации инвариантных эргодических мер.

Теорема 3.3 ***(О классификации мер)*** *Пусть G есть связная группа Ли, Γ есть дискретная подгруппа в G, а U – связная подгруппа G, порождённая унипотентными однопараметрическими подгруппами. Тогда для любой дискретной подгруппы Γ группы G любая вероятностная борелевская мера на $\Gamma\backslash G$, являющаяся эргодической U-инвариантной мерой, будет алгебраической.*

В статье Ратнер [1] приведено несколько доказательств для сформулированных выше теорем в случае группы $G = SL_2(\mathbb{R})$. В данном разделе мы сконцентрируемся на доказательстве следующей теоремы:

Теорема 3.4 *Пусть Γ есть дискретная подгруппа $G = SL_2(\mathbb{R})$, а μ есть вероятностная борелевская мера на $\Gamma\backslash G$, являющаяся также эргодической U-инвариантной мерой. Тогда либо Γ это решетка и μ G-инвариантная мера, либо μ это мера на периодической орбите U.*

Будет рассмотрено доказательство, которое более всего иллюстрирует идеи из доказательства общей теоремы. Так как доказательство, приведенное в статье, является очень техническим, будут также даны некоторые комментарии относительно идей доказательства.

3.3 Доказательство теоремы о классификации для $G = SL_2(\mathbb{R})$

Рассмотрим следующие однопараметрические подгруппы группы G:

$$U = \{u_t := \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\}$$

$$A = \{a_t := \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\}$$

$$H = \{h_t := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\}$$

Непосредственно перемножив матрицы между собой, можно увидеть, что подгруппы удовлетворяют следующим коммутативным соотношениям для всех действительных s и t:

$$u_s a_\tau = a_\tau u_{se^{-2t}}$$

$$h_s a_\tau = a_\tau u_{se^{2t}}.$$

Также мы рассмотрим подгруппу W, порождённую A и H, и группу B, порождённую A и U. Введём следующие обозначения:

$$W(\delta) := \{a_\tau h_b : |\tau| \leq \delta,\ |b| \leq \delta\}$$

$$B(\delta) := \{a_\tau u_s : |\tau| \leq \delta,\ |s| \leq \delta\}.$$

Тогда окрестность $x \in G$ в подгруппе W можно обозначать как $xW(\delta)$ и аналогично окрестность в B как $xB(\delta)$.
Пусть элемент $y \in xW(\delta)$ таков, что $y = xa_\tau h_b$ для некоторых $|\tau| \leq \delta$, $|b| \leq \delta$. Если $\delta > 0$ достаточно мало, то известно, что для любого $y = xa_\tau h_b \in xW(\delta)$ и для любого $s \in [0, 1]$ существует единственная функция $\alpha(y, s) > 0$, $\alpha(y, 0) = 0$, которая строго возрастает как функция от s, непрерывна как функция от (y, s), а также удовлетворяет условию

$$yu_{\alpha(y,s)} \in xu_s W(10\delta) \tag{2}$$

Отображение $\psi_s(y) = yu(\alpha(y, s))$ есть гомоморфизм, который точки из $xW(\delta)$ переводит в окрестность точки xu_s в W, а именно в $xu_s W(10\delta)$. Можем определить

$$V(x; \delta, 1) = \cup\{\psi_s(W(x, \delta)) : 0 \leq s \leq 1\}.$$

Тогда

$$V(x;\delta,1) = \cup\{\sigma_y(1) : y \in W(x,\delta)\}$$

где

$$\sigma_y(1) = \{yu_s : 0 \leq s \leq \alpha(y,1)\} \subset yU$$

Для $y, z \in xW(\delta)$

$$\phi_{y,z}(\psi_s(y)) = \psi_s(z) \in \psi_s(W(x;\delta)).$$

Приведенное выше отображение есть диффеоморфизм из $\sigma_y(1)$ в $\sigma_z(1)$. В частности, $\phi_{y,z}(p)$ есть C^∞ относительно (y,z,p), где $y, z \in W(x;\delta)$ и $p \in \sigma_y(1)$, откуда мы получаем такое утверждение:

Лемма 3.1 *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$, такая что если $0 < \delta < \delta_0$, то для любого $y, z \in xW(\delta)$ и для любого борелевского множества $C \subset \sigma_y(1)$.*

$$\left|\frac{\lambda(C)}{\lambda(\alpha(y,C))} - 1\right| < \varepsilon$$

Здесь $\lambda\{yu_s : 0 \leq s \leq t\} = t$ для всех $t \geq 0$.

По сути эта лемма говорит нам о том, что s и $\alpha(y,s)$ достаточно близки друг к другу.

Решая [1, стр.11] полученную систему линейных уравнений (2), мы получим следующие соотношения:

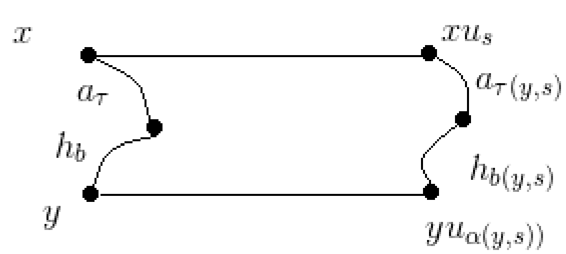
$$yu_{\alpha(y,s)} = xu_s a_{\tau(y,s)} h_{b(y,s)}, \tag{3}$$

$$\alpha(y,s) = \frac{s}{e^{2\tau} - sb}, \tag{4}$$

$$\tau(y,s) = \ln(e^{\tau} - sbe^{-tau}), \tag{5}$$

$$b(y,s) = b(1 - bse^{-2\tau}). \tag{6}$$

Это можно проиллюстрировать следующим образом:



Заметим, что функции (4)-(6) определены только для $sb < e^{2\tau}$. Данное свойство, в частности, говорит нам о том, что разница между близкими друг к другу точками в некоторой окрестности будет очень мала в направлении группы W, но пропорционально времени по направлению U. Например, если мы рассмотрим $b = 0$, то две орбиты будут расходиться друг от друга исключительно в направлении U. В обратном же случае будет существовать некоторое значение $s > 0$, такое что существует $y \in xW(\delta)$, где $yu_{\mathbb{R}}$ не пересекает $xu_{\mathbb{R}}W$. Важно отметить, что приведенное выше рассуждение можно провести для любого достаточно малого $\delta > 0$. Приведенные выше соотношения дают нам важное свойство орициклов, играющее ключевое роль в доказательстве теоремы.

Лемма 3.2 *(R-свойство для орициклов)*
Существуют такие $\eta \in (0,1)$ и $C > 1$, что если

$$\max\{|\tau(y,s)|,\, 0 \le s \le t\} = |\tau(y,t)| = \theta$$

для некоторого $t > 1$, где $y \in xW(\delta)$, $10\delta < \theta$, то для всех $s \in [(1-\eta)t, t]$ выполнено

$$\frac{\theta}{2} \le |\theta(y,s)| \le \theta,\ |b(y,s)| \le \frac{C\theta}{s}$$

Обобщенная версия данного свойства для простых связных унипотентных групп Ли может быть найдена в [5].

Теперь пусть μ это произвольная эргодическая U-инвариантная вероятностная мера на нашем однородном $X = \Gamma \backslash G$ и пусть $\Lambda = \Lambda(\mu) = \{g \in G :$ действие g на X сохраняет $\mu\}$. Тогда из определений следует, что $U \subseteq \Lambda(\mu)$.

Лемма 3.3 *Множество $\Lambda = \Lambda(\mu)$ есть замкнутая подгруппа G.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную сходящуюся к g последовательность $\{g_n\} \subseteq \Lambda$. Пространство непрерывных функций с компактным носителем плотно в L^p, поэтому достаточно доказать, что для всех непрерывных функций f с компактным носителем

$$\int f(gx)d\mu = \int f(x)d\mu.$$

Данный факт следует из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости и того, что $f(g_n x) \to f(x)$ для почти всех x:

$$\int f(x)d\mu = \lim_{n\to\inf} \int f(g_n x)d\mu = \int f(gx)d\mu.$$

■

Теперь мы наконец можем перейти к доказательству самой теоремы. Будем разбирать два случая: $A \not\subset \Lambda$ и $A \subset \Lambda$. Для начала рассмотрим случай, когда μ не является A-инвариантной мерой. Сделаем это в два шага.

Лемма 3.4 *Если $A \not\subset \Lambda$, то существует множество $Y \subset X$, такое что $\mu(Y) = 1$ и $Y \cap Yq = \emptyset$ для всех $q \in B\backslash\Lambda$.*

Доказательство. 1) Для доказательства этого утверждения достаточно доказать более сильное свойство, а именно: для любого $q \in B - \Lambda$ существует множество $X_q \subseteq X$, $\mu(X_q) = 1$ и положительное $\varepsilon(q) > 0$, такие что

$$X_q \cap X_q g = \emptyset$$

для всех $g \in qB_{\varepsilon(q)} = B_{\varepsilon(q)}(e)$, то есть $B_\varepsilon(x)$ есть ε-шар в B вокруг точки x, то есть множество всех точек вида xB, находящихся от x на расстоянии, которое меньше ε. Действительно, если это так, то мы можем покрыть множество $B\backslash\Lambda \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{\varepsilon(q_i)}(q_i)$ счетным числом окрестностей точек q_i, $i \in \mathbb{N}$. Далее положим $Y = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_{q_i}$. Легко видеть, что $\mu(Y) = 1$ и $Y \cap Yq = \emptyset$ для всех $q \in B - \Lambda$.
2) Докажем сформулированное в первом пункте утверждение. Зафиксируем некоторое $q \in B\backslash\Lambda$. Заметим, что мера

$$\mu_q(E) = \mu(Eq) \text{ для кажлого борелевского множества } E$$

отличается от μ, поскольку по предположению q не сохраняет μ, однако подгруппа U по-прежнему действует эргодично на пространство (X, μ_q), т.к. B нормализует U. То есть у нас две эргодичные меры μ и μ_q, а значит, они сингулярны, т.е. существует множество E_q с $\mu(E_q) = 1$ и $\mu(E_q q) = \mu_q(E_q) = 0$. Рассмотрим $E'_q = E_q - E_q q$. Как видно, $\mu(E'_q) = 1$ и $E'_q \cap E'_q q = \emptyset$.

Теперь выберем компакт $K \subseteq E'_q$ почти полной меры, например, возьмем $\mu(K) > 0.99$. Так как $E'_q \cap E'_q q = \emptyset$, а K содержит все предельные точки, то существует $\varepsilon(q) > 0$, такое что

$$d_X(K, K_q) \geq \varepsilon(q).$$

Это означает, что под действием q все точки множества K уходят на какое-то ненулевое расстояние от множества K.
U эргодично действует на (X, μ), и по теореме Бирхгофа-Хинчина существует множество $X_q \subseteq X$, $\mu(X_q) = 1$, такое что любая точка X_q большую часть времени проводит внутри K. Действительно, для всех $x \in X_q$.

$$S_{\chi_K}(x, t) = \frac{1}{t} \int\limits_0^t \chi_K(xu_s) ds \to \mu(K),\, t \to \infty.$$

Теперь докажем, что $X_q \cap X_q g = \emptyset$ для любого $g \in B_{\varepsilon(q)}(q)$. Это можно доказать от противного: пусть $x = yg$ для некоторых $x, y \in X_q$. По определению $g = a(\tau)u(r)$ для некоторых τ, r. Заметим, что $yu_s g = yu_s a_\tau u_r = ya_\tau u_r u_{se^{-2\tau}} = xu_{se^{-2\tau}}$ для всех действительных s. Для достаточно больших $t > 1$ орбиты точек x и y почти всё свое время проводят в K, т.е.

$$S_{\xi_K}(y, t) \geq 0.9,$$

$$S_{\xi_K}(x, e^{-2tr} t) \geq 0.9,$$

а значит существует $s \in [0, t]$, такое что $yu_s = z \in K$ и $zg \in K$, но $zg = zqp$ по определению g, где $p \in B_{\varepsilon(q)}(e)$. В итоге приходим к противоречию

$$d_X(K, Kq) \leq d_X(zg, zq) < \varepsilon(q).$$

$\blacksquare$

Теорема 3.5 *Если $A \not\subset \Lambda$, то существует элемент $x \in X$, такой что μ есть мера на замкнутой орбите xU.*

Доказательство. Так как Λ является закрытой подгруппой, то существует $0 < \theta < 0.1$, такое что $a_\tau \notin \Lambda$ для всех τ, таких что $0 < |\tau| \leq \theta$. Будем также считать, что $\theta < \delta_0(0.1)$ из леммы 3.1.

Из той же леммы возьмем $\eta \in (0,1)$ и $C > 1$
Пусть $Y \subset X$ - множество из предыдущей леммы. Рассмотрим компакт K почти полной меры ($\mu(K) > 1 - 10^{-3}\eta$) и $\delta = \delta(K) > 0$, такие что

$$d_X(K, Ka_\tau) \geq \delta \tag{7}$$

для всех достаточно больших $|\tau|$, а именно для $\theta/2 \leq |\tau| \leq \theta$.

Так как U действует эргодично, то существует множество $F \subseteq X$ положительной меры, такое что

$$S_{\xi_K}(x,t) \geq 1 - 10^{-2}\eta,$$

для всех $x \in F, t \geq t_0$, т.е. после достаточно большого количества времени U-орбита каждого $x \in F$ проведет почти всё время в K. Мы хотим показать, что существует некоторая точка x в F с окрестностью ненулевой меры $\mu(O_\epsilon) \cap F$, которая выглядит как часть орбиты xU, например, $xU(\epsilon)$. Тогда после мы сможем "двигать"эту окрестность под действием U, пока не получим множество полной меры. Как мы докажем, что существует такая окрестность?

Пусть $0 < \xi < 0.01\theta$ настолько мало, что если $\max\{|\tau(y,s)|, 0 \leq s \leq t\} = |\tau(y,t)| = \theta$ для некоторых $y \in W(x;\xi)$, $x \in G$ и $t \geq 1$, тогда

$$t \geq 10t_0 \text{ и } C\theta/t \leq 0.01\delta.$$

Хотим доказать, что если $x, y \in F$ и $d_X(x,y) < \xi$, то

$$y \in B(x;\xi) = \{xa_r u_s : |r|, |s| < \xi\}.$$

Заметим, что в данном случае $B(x;\xi)$ - окрестность точки $x \in X$ в пространстве X (в отличие от $B_\xi(x)$ из предыдущей леммы, где мы рассматривали окрестность точки $q \in G$ Будем делать это от противного. Пусть это не так. Без ограничения общности можем считать, что $y = xa_\tau h_b \in xW(\xi)$. Тогда $b \neq 0$, а значит, как следует из (5), существует $t = t(y) > 0$, такое что $\max\{|\tau(y,s)|, 0 \leq s \leq t\} = |\tau(y,t)| = \theta$. Тогда из выбора ξ и θ видим, что $t \geq t_0$ и $\alpha(y,t) \geq t_0$. Из выбора компакта (7)

$$S_{\xi_K}(x,t) \geq 1 - 10^{-2}\eta,$$

$$S_{\xi_K}(y,\alpha(y,t)) \geq 1-10^{-2}\eta.$$

Из выбора θ получаем, что существует $s \in [(1-\eta)t,t]$, такое что

$$xu_s \in K$$

и

$$xu_s a_{\tau(y,s)} h_{b(y,s)} \in K.$$

Тогда из R-свойства следует, что

$$\frac{\theta}{2} \leq |\theta(y,s)| \leq \theta,\ |b(y,s) \leq \frac{C\theta}{s} \leq 0.1\delta,$$

что означает

$$d_X(K, Ka_{\tau(y,s)} \leq 0.01\delta.$$

В итоге получаем противоречие с (7).

Так как G можно покрыть счетным числом окрестностей $O_\varepsilon(x)$, где $O_\varepsilon(x)$ есть шар с центром $x \in X$, то можно найти $x \in F \cap Y\mathrm{m}$ что $\mu(F \cap O_\varepsilon(x)) > 0$ для всех $\varepsilon > 0$. Для достаточно малого ε имеем $F \cap O_\varepsilon(x) = F \cap xB(\varepsilon)$, где $\mu(B(x;\varepsilon)) > 0$, а значит

$$\mu(B(x;\xi) \cap Y) > 0.$$

Также имеем

$$B(x;\xi) \cap Y \subset xU(\xi)$$

вследствие того, что для малого $|\tau| \leq \xi$ Y и Ya_τ не пересекаются. Так как U действует на (X,μ) эргодично, то $\mu(xU) = 1$. ■

Теперь перейдем к случаю $A \subset \Lambda(\mu)$, т.е. μ есть $A-$инвариантная мера. Начнем со следующей леммы.

Лемма 3.5 *Если $A \subset \Lambda$, то A есть перемешивание.*

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$\int\limits_X \varphi(x) f(xa_{-\tau}) d\mu \to 0 \text{ при } \tau \to \infty$$

для любых двух ограниченных равномерно непрерывных функций φ и f на X таких, что $f_\mu = \int\limits_X f d\mu = 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. Выберем $0 < \delta < 1$ такое, что $|\varphi(x) - \varphi(z)| < \varepsilon$ для любых $x, z \in X$ с $d(x, z) < \delta$.

Ввиду эргодичности действия U на (X, μ) найдутся $t_0 > 1$ и $Y \subset X$ такие, что $\mu(Y) > 1 - \varepsilon$ и $S_f(y, t) < \varepsilon$ для всех $y \in Y, t \geq t_0$ (здесь $S_f(y, t)$ это, как всегда, временное среднее из теоремы Бирхгофа-Хинчина для u_t).

Возьмем настолько большое $\tau_0 > 0$, что $e^{-2\tau_0} t_0 = \delta$ и пусть $\tau \geq \tau_0$. Тогда для $Y_\tau = Y a_\tau$ получим $\mu(Y_\tau) = \mu(Y) > 1 - \varepsilon$. В итоге имеем следующую цепочку равенств:

$$I(\tau) = \int\limits_X \varphi(x) f(xa_{-\tau}) d\mu$$

$$= \frac{1}{\delta} \int\limits_0^\delta \left(\int\limits_X \varphi(x\mathbf{u}_s) f(xu_s a_{-\tau}) d\mu \right) ds$$

$$= \int\limits_X \left(\frac{1}{\delta} \int\limits_0^\delta \varphi(xu_s) f(xu_s a_{-\tau}) ds \right) d\mu$$

$$= \int\limits_X \frac{\varphi(x)}{\delta} \left(\int\limits_0^\delta f(xa_{-\tau} u_{se^{2\tau}}) ds \right) d\mu + \varepsilon_1$$

$$= \int\limits_X \frac{\varphi(x)}{s_\tau} \left(\int\limits_0^{s_\tau} f(xa_{-\tau} u_s) ds \right) d\mu + \varepsilon_1$$

$$= \int\limits_X \varphi(x) S_f(xa_{-\tau}, s_\tau) d\mu + \varepsilon_1$$

$$= \int\limits_{Y_\tau} \varphi(y) S_f(ya_{-\tau}, s_\tau) d\mu + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \to 0,$$

где $s_\tau = \delta e^{2\tau} \geq t_0$. Здесь оценка на ε_1 вытекает из равномерной непрерывности φ, оценка на ε_2 вытекает из ограниченности f и φ, а на ε_3 – из выбора множества Y. ■

Теперь пусть $x \in X$ и $H(x;\delta) = \{xh_s : |s| \leq \delta\}$. Если $0 < \delta < 0.1$ достаточно мало, то для каждого $y \in B(x;\delta)$ и каждого $z \in H(x;\delta)$ пересечение $H(y;10\delta) \cap B(z;10\delta)$ состоит из ровно одной точки $p = p(y,z)$. Определим

$$H(y) = H(p) = \{p(y,v) : v \in H(x;\delta)\}$$

$$B(z) = B(p) = \{p(w,z) : w \in B(x;\delta)\}$$

$$V_\delta(x) = \bigcup_{y \in B(x;\delta)} H(y).$$

Имеем

$$V_\delta(x) = \bigcup_{q \in H(p)} B(q) = \bigcup_{r \in B(p)} H(r)$$

для всех $p \in V_\delta(x)$. Без ограничения общности можем считать, что $\mu(B_{\frac{\delta}{2}}(x)) > 0$ и π есть однозначное отображение на шар $x^{'}O_{10\delta}$ с центром $x' \in \pi^{-1}\{x\}$ из группы G.

Определим

$$\Omega = \cup\{V_\delta(x)a_k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Тогда $\mu(\Omega) = 1$, так как действие A на (X,μ) эргодично. Также действие A на (Ω,ν) сохраняет меру. Пусть $\overline{\nu}$ есть борелевская мера на X, определенная как $\overline{\nu} = \nu(D \cap \Omega)$ для каждого борелевского $D \subset X$.

Лемма 3.6 *1)* $\nu(\Omega) < \infty$*; 2)* $\mu = \overline{\nu}/\nu(\Omega)$.

Доказательство. Пусть f есть непрерывная функция на X с компактным носителем. Так как действие A на (X,μ) эргодично, то можно найти множество $C_f \subseteq V_\delta(x)$, $\mu(C_f) = \mu(V_\delta(x))$, состоящее из точек $y \in X$, для которых

$$S_{f,n}(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(ya_{-i}) \to f_\mu = \int\limits_X f d\mu, \text{ при } n \to \infty. \tag{8}$$

Пусть $\tilde{C}_f \subset V_\delta(x)$, $\mu(\tilde{C}_f) = \mu(V_\delta(x))$ таково, что

$$\lambda(C_f \cap B(z))/\lambda(B(z)) = 1$$

для всех $z \in \tilde{C}_f$, где λ это B-инвариантная мера на zB (B есть та подгруппа в G, которую мы определяли ранее). Выберем $\tilde{z} \in \tilde{C}_f$ и определим

$$V_f = \cup\{H(y) : y \in C_f \cap B(\tilde{z})\} \subset V_\delta(x),$$

$$\Omega_f = \cup\{V_f a_k : k \in \mathbb{Z}\} \subset \Omega.$$

Имеем $\mu(V_f) = \mu(V_\delta(x))$ и $\mu(\Omega_f) = \mu(\Omega)$. Теперь пусть $z \in V_f$, тогда $z \in H(y)$ для некоторого $y \in C_f$. Имеем

$$d_X(za_{-n}, ya_{-n}) \to 0, n \to \infty.$$

В итоге, с учетом (8) и того, что f равномерно непрерывна, получаем

$$S_{f,n}(z) \to f_\mu, n \to \infty$$

для всех $z \in V_f$. Также для всех $\omega \in \Omega_f$

$$S_{f,n}(\omega) \to f_\mu, n \to \infty. \tag{9}$$

Пусть f есть неотрицательная функция такая, что $f_\mu \neq 0$. Из леммы Фату

$$f_\mu \nu(\Omega) = \int\limits_{\Omega_f} f_\mu d\nu \leq \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_f} S_{f,n} d\nu = \int\limits_{\Omega} f d\nu < \infty.$$

Это доказывает первое утверждение леммы. Используя (9) и теорему Лебега о мажорируемой сходимости, для каждой непрерывной f на X с компактным носителем имеем

$$f_{\overline{\nu}} = \int\limits_{\Omega} f d\nu = \int\limits_{\Omega} S_{f,n} d\nu \to \int\limits_{\Omega} f_\mu d\nu = f_\mu \nu(\Omega)$$

что доказывает пункт 2. ■

Наконец, мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 3.6 *Пусть $A \subset \Lambda(\mu)$, тогда Γ есть решетка и μ есть G-инвариантная мера.*

Доказательство. Осталось доказать, что $\nu = \overline{\nu}$. Для этого достаточно показать, что для любого $p \in X$

$$\mu(O_{0.1\delta}(p) - \Omega) = 0.$$

Рассмотрим

$$\overline{\Omega} = \{\omega \in \Omega : \omega a_{-n} \in V_{\delta/2}(x) \text{ для бесконечного количества } n \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Так как $\mu = \overline{\nu}/\nu(\Omega)$, а A действует эргодично на (Ω, μ), то имеем $\mu(\overline{\Omega}) = 1$ и $\nu(\overline{\Omega}) = \nu(\Omega)$. Если $\omega \in \overline{\Omega}$, то $H(\omega; 10\delta)a_{-n} \subset H(y)$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}^+$ и некоторого $y \in V_\delta(x)$. Это и тот факт, что Ω есть A-инвариантное множество, даёт нам

$$H(\omega, 10\delta) \subset \Omega$$

для всех $\omega \in \overline{\Omega}$. Более того, $\omega H \subset \Omega$ для всех $\omega \in \overline{\Omega}$. Рассмотрим

$$\tilde{\Omega} = \{\omega \in \Omega : \lambda(\overline{\Omega} \cap B(\omega; 10\delta))/\lambda(B(\omega, 10\delta)) = 1\}.$$

Так как $\tilde{\nu} = \overline{\nu}/\nu(\Omega) = \mu$ B-инвариантны, то имеем

$$\nu(\tilde{\Omega}) = \nu(\Omega). \tag{10}$$

Из определения $\tilde{\Omega}$ видим, что для любого $\omega \in \tilde{\Omega}$

$$\nu(V_\delta(\omega) \cap \Omega) = \nu(V_\delta(\omega)). \tag{11}$$

Из (10) вытекает, что для всех $\omega \in \tilde{\Omega}$

$$\nu(V_\delta(\omega) \cap \tilde{\Omega}) = \nu(V_\delta(\omega)).$$

Теперь рассмотрим произвольное $p \in X$. Для него мы можем найти $x = \omega_1, \ldots \omega_n$ такую, что $\omega_i \in V_\delta(\omega_{i-1}) \cap \tilde{\Omega}$ для всех $i = 2, ..., n$ и $O_{0.1\delta} \subset V_\delta(\omega_n)$. Из этого и условия (11) наконец получаем, что

$$\mu(O_{0.1\delta}(p) - \Omega) = 0.$$

Теорема доказана. ■

4 Гипотеза Оппенгейма

4.1 Формулировка

Теорема 4.1 *Пусть Q есть невырожденная квадратичная форма, не являющаяся знакоопределенной и зависящая от $n \geq 3$ переменных. Тогда либо Q пропорционально квадратичной форме с целыми коэффициентами, либо $Q(\mathbb{Z}^n)$ плотно в $\mathbb{R}$.*

Заметим, что условие $n \leq 3$ действительно обязательно, поскольку для квадратичной иррациональности (алгебраического числа степени 2) α из теоремы Литтлвуда следует, что $|\alpha - p/q| \geq C/q^2$ для некоторого C и всех $p/q \in \mathbb{Q}$, а значит для $Q(x, y) = y^2 - \alpha^2 x^2$ имеем

$$|Q(x, y)| = |x^2(y/x - \alpha)(y/x + \alpha)| \geq C|\alpha|,$$

то есть точка 0 является изолированной точкой образа Q.
Также ясно, что в случае, когда Q является знакоопределенной, то $Q(\mathbb{Z}^n)$ это дискретное подмножество $\mathbb{R}^n$ (т.к. существует такая константа $C > 0$, что $|Q(x)| \geq C||x||$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

4.2 Доказательство гипотезы Оппенгейма

Доказательство общего случая $n \geq 3$ может быть сведено к случаю $n = 3$, доказательство этого можно найти в [2].

Прежде чем приступить к доказательству, введем некоторые обозначения.

Определение 4.1 *Если Q есть вещественная квадратичная форма от n переменных, то её группа автоморфизмов это множество*

$$SO(Q) = \{h \in SL_n(\mathbb{R}) | Q(vh) = Q(v), \text{ для любого } x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Обозначим $SO(Q)^0$ как связную компоненту $SO(Q)$, содержащую единичный элемент $SO(Q)$. Также обозначим

$$Q_0(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_3 - x_2^2.$$

Напомним, что мы хотим вывести гипотезу Оппенгейма как следствие из следующей теоремы:

Теорема 4.2 ***(О замыкании орбит)*** *Пусть $X = \Gamma \backslash G$ есть однородное пространство с конечным объемом, где G есть связная группа Ли, Γ есть решетка в G, а H – связная подгруппа G, порождённая унипотентными однопараметрическими подгруппами. Тогда для любого $x \in \Gamma \backslash G$ существует замкнутая связная подгруппа $S \subset G$, содержащая в себе H, такая что $\overline{xH} = xS$, причем замкнутая орбита xS имеет конечную S-инвариантную меру.*

Будем писать H вместо U, поскольку в предыдущем разделе в доказательстве мы подразумевали, что U полностью состоит из унипотентов, в то время как здесь H будет порождена унипотентами.

Мы рассматриваем $G = SL_3(\mathbb{R})$ и $\Gamma = SL_3(\mathbb{Z})$. Идея доказательства такова, что если мы положим $H = SO(Q_0^0)$ и докажем, что она порождена унипотентами, а также является максимальной связной подгруппой G, то по теореме Ратнер существует всего два возможных варианта: либо xH плотно (а значит $Q(\mathbb{Z}^3)$ плотно в $\mathbb{R}$), либо xH замкнуто (то есть Q пропорционально квадратичной форме с целыми коэффициентами).

Теперь сформулируем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 4.1 ***(Лемма Маргулиса)*** *Пусть $n \geq 2$, $\{u_t\}$ - унипотентная однопараметрическая подгруппа $SL_n(\mathbb{R})$, и $x \in SL_n(\mathbb{Z}) \backslash SL_n(\mathbb{R})$. Тогда существует компактное множество $K \subset SL_n(\mathbb{Z}) \backslash SL_n(\mathbb{R})$ такое, что $\{t \geq 0 | xu_t \in K\}$ не ограничено.*

Доказательство данной леммы можно найти в [2]. Также для успешного применения теоремы Ратнер нам понадобится ещё несколько лемм.

Лемма 4.2 *Алгебра Ли группы $SO(Q_0)$ выглядит следующим образом:*

$$\mathfrak{so}(Q_0) = \left\{ X_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & 1 & b \\ 0 & c & -a \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Доказательство. Это можно вычислить, рассмотрев произвольную матрицу A из $\mathfrak{so}(Q_0)$ и выбрав траекторию $a : J \to \mathfrak{so}(Q_0)$, $a(0) = I$ и $a'(0) = A$. Тогда $a(t)^T \eta a(t) = \eta$, где η есть матрица нашей квадратичной формы Q_0. Продифференцировав это соотношение по t и положив $t = 0$, получаем

$$A^T \eta + \eta A = 0.$$

Далее, решая полученную систему уравнений, получим утверждение леммы. ■

Лемма 4.3 *1) Связная компонента $SO(Q_0)^0$ порождена унипотентными однопараметрическими подгруппами.*

2) Централизатор $SO(Q_0)$ в $GL_3(\mathbb{R})$ состоит только из элементов вида αE.

Доказательство. Первый пункт следует из вида элементов соответствующей алгебры Ли, и того, что $[X_{0,1,0}, X_{0,0,1}] = X_{1,0,0}$, см. ниже замечание.

Второй пункт легко доказать, рассмотрев непосредственно произвольную 3×3 матрицу A и посмотрев, какие условия накладываются на неё, если она коммутирует с матрицами $\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, которые лежат в группе H.

■

Замечание. Элементам $X_{0,b,0} \in \mathfrak{h}$ соответствуют матрицы

$$V_t = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

элементам $X_{0,0,c}$ матрицы

$$V_t^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ t^2/2 & t & 1 \end{pmatrix},$$

а элементам $X_{a,0,0}$

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix}.$$

Однопараметрические подгруппы V_t и V_t^T являются унипотентными. Кроме того, однопараметрические подгруппы V_t, V_t^T, A_t порождают все H. Пример того, как элемент группы A_t можно породить элементами групп V_t и V_t^T:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ w & 1 & 0 \\ w^2/2 & w & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ u^2/2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v & v^2/2 \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-2} \end{pmatrix},$$

если положим $w = -\frac{u}{a}$, $v = -\frac{t}{a}$, $a = 1 + \frac{ut}{2}$. Таким образом, мы имеем три однопараметрические подгруппы, порожденные унипотентными элементами. Ясно, что вся связная компоненты группы автоморфизмов порождается этими подгруппами.

Также отметим принципиальную разницу между случаями $n = 2$ и $n = 3$: для случая $n = 2$ группа автоморфизмов не порождена унипотентными элементами.

Пользуясь теоремой Ратнер и данными выше соображениями, в данном разделе мы будем доказывать следующую теорему:

Теорема 4.3 *Пусть Q есть невырожденная квадратичная форма, не являющаяся знакоопределенной и зависящая от $n = 3$ переменных. Тогда либо Q пропорционально квадратичной форме с целыми коэффициентами, либо $Q(\mathbb{Z}^3)$ плотно в $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $g_Q \in SL_3(\mathbb{R})$ и $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ таковы, что $Q = \lambda Q_0 \circ g_Q$. Тогда $SO(Q)^0 = g_Q H g_Q^{-1}$.

$H = SO(Q_0)^0$ порождена унипотентными элементами, а $SL_3(\mathbb{Z})$ есть решетка в $SL_3(\mathbb{R})$. Применяя теорему Ратнер, получим, что существует замкнутая связная подгруппа $S \subseteq SL_3(\mathbb{R})$, для которой выполнено:

- $H \subset S$
- $\overline{g_Q H} = g_Q S$
- существует S-инвариантная вероятностная мера на $g_Q S$.

Так как H это максимальная[11] связная подгруппа G, то есть всего два варианта: $S = H$ и $S = G$. Рассмотрим их по отдельности.

1) Пусть $S = SL_3(\mathbb{R})$. Тогда $SL_3(\mathbb{Z})g_Q H$ плотно в $SL_3(\mathbb{R})$. Имеем

$$Q(\mathbb{Z}^3) = Q_0(\mathbb{Z}^3 g_Q) = Q_0(\mathbb{Z}^3 SL_3(\mathbb{Z}) g_Q) = Q_0(\mathbb{Z}^3 SL_3(\mathbb{Z}) g_Q H).$$

Здесь поочередно использованы определение Q_0, равенство $\mathbb{Z}^3 = SL_3(\mathbb{Z})$ и определение H. $Q(\mathbb{Z}^3)$ плотно в $Q_0(\mathbb{Z}^3 G)$, т.к. Q_0 непрерывно. Однако $Q_0(\mathbb{Z}^3 G) = Q_0(\mathbb{R}^3 - \{0\}) = \mathbb{R}$.

2) Пусть $S = H$, то есть орбита $g_Q H$ замкнута. Тогда H-орбита элемента $SL_3(\mathbb{Z})g_Q \in \Gamma \backslash G$. Теперь пусть $x = \Gamma g_Q^{-1}$ и $x_0 = \Gamma$, тогда $x_0 SO(Q) = xHg_Q$ тоже замкнуто. Рассмотрим $\Delta = SO_3(\mathbb{Z}) \cap SO(Q)$, т.е. множество всех целочисленных автоморфизмов Q.

Идея доказательства следующая: рассмотрим систему линейных уравнений на симметричные 3×3-матрицы σ

$$\gamma^t \sigma \gamma = \sigma, \text{ для любых } \gamma \in \Delta.$$

Тот факт, что пространство решений не является пустым, очевиден (возьмем σ_Q, соответствующее матрице Q). Если мы докажем, что пространство решений данной системы одномерно, то в связи с тем, что эта система определена на целых числах, у данной системы будет хотя бы одно рациональное решение, а значит, Q пропорционально некоторой квадратичной форме с рациональными коэффициентами.

Рассмотрим произвольное решение системы σ, соответствующее квадратичной форме Q'. В терминах квадратичных форм $\gamma^t \sigma \gamma = \sigma$ означает то, что $\Delta \subset SO(Q')$, то есть все целочисленные автоморфизмы Q также являются автоморфизмами для Q'.

Покажем, что если $\Delta \subset SO(Q')$, то все унипотентные однопараметрические подгруппы $SO(Q)$ также содержатся в $SO(Q')$.

Зафиксируем $p \in \mathbb{R}^3$, и

$$f_p : SO(Q) \to \mathbb{R}, g \to Q'(pg^{-1})$$

$\Delta \subset SO(Q')$, поэтому f_p можно факторизовать

$$\tilde{f}_p : \Delta \backslash SO(Q) \to \mathbb{R}.$$

Возьмем унипотентную однопараметрическую подгруппу $\{u(t)\}_{\mathbb{R}}$, и определим функцию

$$q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \to f_p(u(t)).$$

Так как u_t унипотентны, то для некоторого нильпотентного A имеем $u_t = exp(tA)$. С учетом того, что Q' тоже является полиномом, получаем, что q - полином.

По лемме Маргулиса найдется такой неограниченный компакт $K \subset X$, в который $u(t)$-орбита точки x_0 будет постоянно возвращаться, а именно: множество $\{t \geq 0 : x_0 u(t) \in K\}$ не ограничено.

Так как $SO(Q)$ замкнуто, то каноническое отображение

$$\varphi : \Delta \backslash SO(Q) \to x_0 SO(Q), \Delta g \to x_0 g$$

есть гомоморфизм. Это означает, что $K' = \varphi^{-1}(K)$ тоже компактно, а значит, $\tilde{f}_p(K')$ компактное подмножество $\mathbb{R}$. С другой стороны, из выбора K мы имеем неограниченное множество

$$\{t \in \mathbb{R} | q(t) \in \tilde{f}_p(K')\}.$$

Это означает, что на самом деле q является константой, и из определения q и произвольности p получаем, что $Q'(u(t)v) = Q'(v)$ для любых $v \in \mathbb{R}^3$.

Итак, мы доказали, что все однопараметрические подгруппы $SO(Q)$ лежат в $SO(Q')$, а значит, $SO(Q)^0 \subset SO(Q')$.

Теперь пусть σ и σ' две симметричные матрицы, соответствующие квадратичным формам Q и Q' соответственно. Тогда для любого $h \in SO(Q)^0$

$$h\sigma'\sigma^{-1}h^{-1} = (h\sigma' h^T)((h^{-1})^T \sigma^{-1} h^{-1}) = \sigma'\sigma^{-1}.$$

Это означает, что $\sigma'\sigma^{-1}$ коммутирует с H, т.е. это элемент централизатора H, а значит, это константа. Получаем желаемый результат: Q и Q' пропорциональны.

$\blacksquare$

Список литературы

[1] M. Ratner: Raghunathan's conjectures for SL(2, R). Israel J. Math. 80 (1992) 1–31

[2] B. Bekka and M. Mayer, Ergodic theory and topological dynamics of group actions on homogeneous spaces, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[3] D. Witte-Morris, Ratner's Theorems on Unipotent Flows, University of Chicago Press, 2005.

[4] M. Ratner, On measure rigidity of unipotent subgroups of semisimple groups. Acta Math. 165, 229–309 (1990).

[5] M. Ratner, Strict measure rigidity for unipotent subgroups of solvable groups. Invent. Math. 101, 449–482 (1990).

[6] M. Ratner, On Raghunathan's measure conjecture. The Annals of Mathematics, 134, 545–607, (1991).

[7] M. Ratner, Raghunathan's topological conjecture and distributions of unipotent flows, Duke Math. J. 63(1) (1991), 235–280.

[8] W. Rossmann, Lie Groups: An Introduction Through Linear Groups, Oxford University

[9] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, "Основы теории групп Ли", Группы Ли и алгебры Ли – 1, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 20, ВИНИТИ, М., 1988, 5–101 Press, 2002.

[10] Р.В. Константинов, Лекции по функциональному анализу: учеб. пособие. – М.: МФТИ, 2009. – 368 с

[11] Winternitz, Pavel. Subalgebras of Lie algebras. Example of Sl(3,R). 10.1090/crmp/034/21. (2004)