ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

# ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТЬ ЗНАЧЕНИЙ МОДУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ

Выполнил студент
605 группы
Туров Евгений Сергеевич

____________________________
подпись студента

Научный руководитель
проф. Нестеренко Ю.В.

____________________________
подпись научного руководителя

Москва

2019 г.

# Содержание

## 1 Введение

Исследование задач теории трансцендентных чисел было бы невозможным без использования знаний и результатов теории дифференциальных уравнений, алгебраической геометрии, комплексного анализа и других дисциплин математики.

Традиционно исследования в области теории трансцендентных чисел основываются на арифметических свойствах значений аналитических функций, удовлетворяющих неким дифференциальным либо модулярным соотношениям. Так знаменитая седьмая проблема Д. Гильберта была решена в 1934 г. А.О. Гельфондом с помощью анализа свойств показательных функций; позднее Ю.В. Нестеренко [1] получил результаты, связанные с алгебраической независимостью чисел $\pi$, $e^{\pi}$ и $\Gamma(1/4)$, используя модулярные свойства функций Рамануджана.

Хорошо известна алгебраическая зависимость чисел $j(\tau)$ и $j(n\tau)$ над полем $\mathbb{Q}$ для натуральных $n$. В работе же будет показан метод, помогающий получить некие соотношения на значения других функций, связанных с $j(\tau)$, в точках $\tau$ и $n\tau$. Подобный метод был использован в работах Ю.В. Нестеренко [2] об алгебраичности функций $\dfrac{\theta_3^4(n\tau)}{\theta_3^4(\tau)}$ над $\mathbb{Q}(\lambda(\tau))$ и работе П. Гринспена [3] об оценке меры трансцендентности отношения $\frac{\eta}{\omega}$ периода эллиптической кривой и соответствующего ему квази-периода; используемые ими конструкции кратко описаны в пунктах 4.1 и 4.2 соответственно; в пункте 4.3 доказаны утверждения, связанные с $\psi$-функциями, а именно следующая

**Теорема.** $\forall n \in \mathbb{N}$, *функции* $\psi_2(n\tau)$, $\psi_3(n\tau)$, $\psi_4(n\tau)$ *алгебраичны над* $\mathbb{Q}(\psi_2(\tau), \psi_3(\tau), \psi_4(\tau))$.
*Более того,* $\forall n \in \mathbb{N},\ n = 2k+1 > 2,\quad \exists P_n(X,Y) \in \mathbb{Z}[X,Y]$, $\deg_X P_n = \psi(n),\quad P_n \not\equiv 0:$

$$P_n\left(-\frac{n\psi_2(n\tau)-\psi_2(\tau)}{\theta_2^4(\tau)}, 16\frac{\lambda(\tau)-1}{\lambda(\tau)}\right) \equiv 0,$$

$$P_n\left(\frac{n\psi_3(n\tau)-\psi_3(\tau)}{\theta_3^4(\tau)}, 16\lambda(\tau)\right) \equiv 0,$$

$$P_n\left(\frac{n\psi_4(n\tau)-\psi_4(\tau)}{\theta_4^4(\tau)}, 16\frac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau)-1}\right) \equiv 0.$$

В пункте 4.4 приведены примеры получения соотношений для эта-функции Дедекинда и дальнейшее возможное применение данной теории.

## 2 Основные понятия

Введём основные определения и понятия.

Пусть $\mathbf{M}$ группа матриц $2\times 2$, с целыми коэффициентами и положительным определителем. Каждой матрице $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M}$ можно сопоставить автоморфизм $\tau \to \alpha.\tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ верхней комплексной полуплоскости $\mathbb{H}$.

**Определение 2.1.** *Мероморфная функция $f(\tau)$ на верхней комплексной полуплоскости $\mathbb{H}$ является модулярной, если $f(\tau) = \sum\limits_{n\geqslant r} a_n q^n$ и для всех матриц $\alpha \in \mathbb{SL}_2(\mathbb{Z})$*

$$f(\tau) = f(\alpha.\tau)$$

Для каждого натурального $N$ обозначим через $\mathbf{M}(N)$ подгруппу матриц в $\mathbf{M}$, сравнимых по модулю $N$ с единичной в $\mathbf{M}$, и через $\Gamma(N)$ - подгруппу в $\mathbf{M}(N)$ с единичным определителем.

**Лемма 1.** *При $N = 1, 2$ для каждой матрицы $\alpha \in \mathbf{M}(N)$ имеет место представление*

$$\alpha = \gamma \begin{pmatrix} a & Nb \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

*где $\gamma \in \Gamma(N)$, $a \geqslant 1$, $d \geqslant 1$, $0 \leqslant b < d$.*

Определим для всякой мероморфной функции $f$ на $\mathbb{H}$ и числа $k \in \mathbb{Z}$ функцию $f|_k\, \alpha(\tau) := \left(\dfrac{\sqrt{\det \alpha}}{c\tau + d}\right)^k f(\alpha.\tau)$.

**Определение 2.2.** *Будем называть функцию $f$ модулярной веса $k$ и уровня $N$, если*

$$\forall \gamma \in \Gamma(N), \quad f|_k\, \gamma(\tau) = f(\tau).$$

Такое определение согласуется с стандартным определением модулярных функций, так функция $\Delta$ является модулярной веса 12 и уровня 1; функция $\theta_3^4$ является модулярной веса 2 и уровня 2; $\lambda$ - веса 0 и уровня 2. Для таких функций $f$ и матриц $\alpha$ будем в дальнейшем писать $f_\alpha$ вместо $f|_k\, \alpha$. Из определения следует

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{M}, \quad f_{\alpha\beta} = (f_\alpha)_\beta\,.$$

Здесь и далее будут использованы матрицы из $\mathbf{M}(2)$. Пусть $\alpha \in \mathbf{M}(2)$, а

$\det\alpha = n$ -нечетное натуральное число. Рассмотрим следующее множество

$$Q_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & d \end{pmatrix}, a \geqslant 1, ad = n, 0 \leqslant b < d, (a,b,d) = 1 \right\},$$

$$|Q_n| = \psi(n) = n \prod_{p|n} (1 + \frac{1}{p}).$$

Пронумеруем для определенности все элементы множества $Q_n$ через $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\psi(n)}$, и для единообразия изложения положим $\alpha_1 = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

## 3 Используемые функции

Основными используемыми объектами будут следующие функции комплексного переменного $\tau$, $\operatorname{Im}\tau > 0$, определенные следующими рядами:

$$P(\tau) = 1 - 24 \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_1(n) q^{2n}, \quad Q(\tau) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^{2n},$$

$$R(\tau) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^{2n},$$

где $\sigma_k(n) = \sum\limits_{d|n} d^k$, $q(\tau) = e^{\pi i \tau}$ - более известные как функции Рамануджана;

Также определим тета-константы

$$\theta_2(\tau) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}, \quad \theta_3(\tau) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}, \quad \theta_4(\tau) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2},$$

их логарифмические производные

$$\psi_2(\tau) = \frac{\delta\theta_2}{\theta_2}, \quad \psi_3(\tau) = \frac{\delta\theta_3}{\theta_3}, \quad \psi_4(\tau) = \frac{\delta\theta_4}{\theta_4},$$

где $\delta = \frac{1}{\pi i}\frac{d}{d\tau}$,

и смежные с ними функции

$$\lambda(\tau) = \frac{\theta_2^4(\tau)}{\theta_3^4(\tau)}, \quad j(\tau) = 256 \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2},$$

$$\Delta(\tau) = \frac{Q^3(\tau) - R^2(\tau)}{12^3} = \left(\frac{\theta_2\theta_3\theta_4}{2}\right)^8 = q^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^{24}.$$

Также нам понадобятся также следующие тождества, связывающие $\theta$ и $\psi$ функции:

$$\psi_3 - \psi_4 = \frac{\theta_2^4}{4}, \quad \psi_2 - \psi_4 = \frac{\theta_3^4}{4}, \quad \psi_2 - \psi_3 = \frac{\theta_4^4}{4}.$$

## 4 Основная конструкция

Основная идея состоит в следующем. Известно, что все модулярные функции образуют поле $\mathbb{K}$, которое порождается одной функцией $\lambda(\tau)$.

Будут конструироваться многочлены, корни которых имеют необходимые нам выражения, связывающие значения исходных функций в точках $\tau$ и $n\tau$. Затем мы покажем, что коэффициенты таких многочленов не меняются под преобразованиями матриц из $\Gamma(2)$. Поскольку многочлены будут определяться через набор своих корней, это равносильно доказательству перестановочности корней под действиями этих матриц.

Как известно [5], фундаментальная область для $\Gamma(2)$ состоит из точек $\tau$ с условиями $\operatorname{Im}\tau > 0$, $-1 \leqslant \operatorname{Re}\tau < 1$, $|2\tau + 1| > 1$, $|2\tau - 1| > 1$ и точки $\tau = -1, 0, \infty$. Далее мы докажем, что коэффициенты этого многочлена будут голоморфными функциями в 0 и бесконечности, и иметь полюс в -1, аналогично функции $\lambda(\tau)$, то есть они будут представимы в виде многочлена от $\lambda(\tau)$, а учитывая поведение коэффициентов в бесконечности, получим, что они на самом деле будут представимы в виде многочлена с целыми коэффициентами от $16\lambda(\tau)$.

В качестве корней мы, в частном случае, получим необходимые соотношения между функциями в точках $\tau$ и $n\tau$.

Перейдём непосредственно к примерам конструкций многочленов.

### 4.1 Соотношения для тета-констант

В работе Ю.В. Нестеренко [4] в качестве корней искомого многочлена были введены следующие функции:

$$x_\nu(\tau) = u^2 \cdot \frac{\theta_3^4\left(\frac{u\tau+2v}{w}\right)}{\theta_3^4(\tau)}, \quad \begin{pmatrix} u & 2v \\ 0 & w \end{pmatrix} = \alpha_\nu, \quad \nu = 1, \dots, \psi(n).$$

Поскольку функция $\theta_3^4$ является модулярной веса 2, то для любой матрицы $\alpha \in \Gamma(2)$ имеет место равенство $\left(\theta_3^4\right)_\alpha(\tau) = (\theta_3^4)(\tau)$. Согласно лемме 1, для любых матриц $\beta \in \Gamma(2)$ и $\alpha_\nu \in Q_n$ существуют матрицы $\gamma \in \Gamma(2)$ и $\alpha_\mu \in Q_n$ такие, что $\alpha_\nu\beta = \gamma\alpha_\mu$. Поэтому

$$x_\nu(\beta.\tau) = \frac{\left(\theta_3^4(\tau)\right)_{\alpha_\nu\beta}}{\left(\theta_3^4(\tau)\right)_\beta} = \frac{\left(\left(\theta_3^4(\tau)\right)_\gamma\right)_{\alpha_\mu}}{\theta_3^4(\tau)} = x_\mu(\tau).$$

А значит многочлен

$$F_1(X) = \prod_{\nu=1}^{\psi(n)}(X - x_\nu(\tau))$$

не меняется при преобразованиях $\tau \to \alpha.\tau, \quad \alpha \in \Gamma(2)$.

Можно показать, что коэффициенты этого многочлена являются голоморфными в верхней полуплоскости и имеют полюс при $\tau = -1$, а значит представимы в виде многочлена от $\lambda(\tau)$. А учитывая разложения в ряды для функций $\theta_3^4(\tau)$ и $\lambda(\tau)$ по степеням $q$, получаем, что коэффициенты $F_1(X)$ являются многочленами с целыми коэффициентами. В качестве следствия мы получаем, в частности, что $x_1(\tau) = n^2 \dfrac{\theta_3^4(n\tau)}{\theta_3^4(\tau)} \in \mathbb{Q}(\lambda(\tau))$.

Аналогично строятся соотношения для остальных тета-констант. Более того, если $\lambda(\tau)$ алгебраическое число, то для всех нечетных $n > 2$ все числа

$$\frac{\theta_2^4(n\tau)}{\theta_2^4(\tau)}, \frac{\theta_3^4(n\tau)}{\theta_3^4(\tau)}, \frac{\theta_4^4(n\tau)}{\theta_4^4(\tau)}$$

будут также алгебраическими.

### 4.2 Соотношения для $P$-функций

В уже упомянутой работе П. Гринспена [3] рассматриваются функции $\lambda(\tau)$, $P(\tau)$, $\theta_3^4(\tau)$ и $\dfrac{P}{\theta_3^4}$ и доказываются аналогичные соотношения. Остановимся подробнее на конструкции для $P$-функции Рамануджана. Сама $P$-функция не является модулярной, поэтому конструкция с $f$ и $f_\alpha$, определённая в п. 3.2, не обладает свойствами перестановочности индексов. Поэтому для $P$-функции определение $P_\alpha$ видоизменяется. А именно, определим для $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M}$

$$P_\alpha(\tau) := \left( \frac{\sqrt{\det \alpha}}{c\tau + d} \right)^2 P(\alpha.\tau) - \frac{6c}{i\pi(c\tau + d)}.$$

Как известно, $P$-функция является квазимодулярной, поэтому из введённого определения следует, что

$$\forall \gamma \in \mathbb{SL}_2(\mathbb{Z}), \ P_\gamma = P.$$

Для каждой матрицы $\alpha \in \mathbb{M}$ с определителем $n$ функция $P_\alpha - P$ будет модулярной формой веса 2 и уровня $n$. Это следует из соотношения $2P_\alpha = (\delta \log \Delta)_\alpha = \delta \log(\Delta_\alpha)$, а также модулярности функции $\Delta$. Многочлены, используемые в работе [5], имеют в качестве корней функции $\dfrac{P_\alpha - P}{\theta_3^4}$ и строятся аналогичным образом.

Рассмотрим теперь подробнее другие объекты.

### 4.3 Соотношения для $\psi$-функций

С помощью уже имеющихся конструкций можно пытаться соорудить новые аналогичные объекты.

Докажем следующую теорему.

**Теорема 1.** *$\forall n \in \mathbb{N}$, функции $\psi_2(n\tau)$, $\psi_3(n\tau)$, $\psi_4(n\tau)$ алгебраичны над $\mathbb{Q}(\psi_2(\tau), \psi_3(\tau), \psi_4(\tau))$.*
*Более того, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n = 2k+1 > 2$, $\exists P_n(X,Y) \in \mathbb{Z}[X,Y]$, $\deg_X P_n = \psi(n)$, $P_n \not\equiv 0$ :*

$$P_n\left(-\frac{n\psi_2(n\tau)-\psi_2(\tau)}{\theta_2^4(\tau)}, 16\frac{\lambda(\tau)-1}{\lambda(\tau)}\right) = P_n\left(\frac{n\psi_3(n\tau)-\psi_3(\tau)}{\theta_3^4(\tau)}, 16\lambda(\tau)\right) = P_n\left(\frac{n\psi_4(n\tau)-\psi_4(\tau)}{\theta_4^4(\tau)}, 16\frac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau)-1}\right) \equiv 0$$

*Доказательство.* Пусть $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M}(2)$. Определим следующую функцию

$$(\psi_3)_\alpha(\tau) := \left(\frac{\sqrt{\det\alpha}}{c\tau+d}\right)^2 \psi_3(\alpha.\tau) - \frac{c}{2\pi i(c\tau+d)}.$$

**Лемма 2.** $\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(2)$, $(\psi_3)_\gamma(\tau) = \psi_3(\tau)$

*Доказательство.* Воспользуемся соотношениями для $P$-функции Рамануджана и функции $\lambda$:

$$P(\gamma.\tau) = (c\tau+d)^2P(\tau) + \frac{6c(c\tau+d)}{\pi i}, \quad \lambda(\gamma.\tau) = \lambda(\tau).$$

Поскольку $\Delta = 2^{-8}(\lambda(1-\lambda))^2\theta_3^{24}$ и $\delta\lambda = \lambda(1-\lambda)\theta_3^4$ имеем

$$\begin{aligned} 2P = \delta\log\Delta = \frac{2\delta\lambda}{\lambda} - \frac{2\delta\lambda}{1-\lambda} + \frac{24\delta\theta_3}{\theta_3} = \\ = 2\lambda(1-\lambda)\theta_3^4\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{1-\lambda}\right) + 24\psi_3 = 2\theta_3^4(1-2\lambda) + 24\psi_3. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$12\psi_3(\gamma.\tau) = 12\psi_3(\tau)(c\tau+d)^2 + \frac{6c(c\tau+d)}{\pi i},$$

что равносильно

$$\psi_3(\tau) = (c\tau+d)^{-2}\psi_3(\gamma.\tau) - \frac{c}{2\pi i(c\tau+d)} = (\psi_3)_\gamma(\tau).$$

□

Пусть $\alpha_\nu = \begin{pmatrix} u & 2v \\ 0 & w \end{pmatrix} \in Q_n$, $\beta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(2)$. Согласно первой лемме, существуют матрицы $\gamma \in \Gamma(2)$ и $\alpha_\mu \in Q_n$ такие, что $\alpha_\nu\beta = \gamma\alpha_\mu$. Введем функции

$$y_\nu(\tau) := \frac{(\psi_3)_{\alpha_\nu}(\tau) - \psi_3(\tau)}{\theta_3^4(\tau)}.$$

Поскольку

$$(\psi_3)_{\alpha_\nu\beta}(\tau) - (\psi_3)_\beta(\tau) = \left( \left( \frac{\sqrt{\det \alpha_\nu\beta}}{w(c\tau+d)} \right)^2 \psi_3(\alpha_\nu.\beta.\tau) - \frac{wc}{2\pi i w(c\tau+d)} \right) -$$

$$-\left( \frac{1}{(c\tau+d)^2}\psi_3(\beta.\tau) - \frac{c}{2\pi i(c\tau+d)} \right) = \frac{1}{(c\tau+d)^2} \left( \frac{u}{w}\psi_3(\alpha_\nu.\beta.\tau) - \psi_3(\beta.\tau) \right) =$$

$$= \frac{1}{(c\tau+d)^2} \left( (\psi_3)_{\alpha_\nu}(\beta.\tau) - \psi_3(\beta.\tau) \right),$$

то

$$y_\nu(\beta.\tau) = \frac{(\psi_3)_{\alpha_\nu}(\beta.\tau) - \psi_3(\beta.\tau)}{\theta_3^4(\beta.\tau)} = \frac{(\psi_3)_{\alpha_\nu\beta}(\tau) - (\psi_3)_\beta(\tau)}{(\theta_3^4)_\beta(\tau)} =$$

$$= \frac{(\psi_3)_{\gamma\alpha_\mu}(\tau) - (\psi_3)_\beta(\tau)}{(\theta_3^4)_\beta(\tau)} = \frac{(\psi_3)_{\alpha_\mu}(\tau) - \psi_3(\tau)}{\theta_3^4(\tau)} = y_\mu(\tau)$$

А значит многочлен

$$F_2(X) := n^{\psi(n)} \prod_{\nu=1}^{\psi(n)} (X - y_\nu(\tau)) = \sum_{k=1}^{\psi(n)} a_k(\tau) X^k$$

не меняется под действиями матриц из $\Gamma(2)$. Первый шаг сделан.

Из построения видно, что функции $y_\nu(\tau)$ раскладываются в степенные ряды по $e^{\frac{\pi i \tau}{n}}$, а значит коэффициенты $a_k(\tau)$ также могут быть представлены в виде степенных рядов по $e^{\frac{\pi i \tau}{n}}$. Но поскольку построенный многочлен инвариантен относительно матриц из $\Gamma(2)$, то разложения коэффициентов $a_k(\tau)$ содержат только степени $e^{\pi i \tau}$. Покажем, что у $a_k(\tau)$ только одна особая точка в фундаментальной области: полюс при $\tau = -1$. Потенциально проблемных точек всего три: 0, бесконечность и -1, поэтому покажем сначала, что в первых двух точках у $a_k(\tau)$ нет особенностей.

Будем пользоваться следующими соотношениями для тета-констант, доказательства можно найти в [6],

$$\theta_2^4(\tau+1) = -\theta_2^4(\tau), \quad \theta_3^4(\tau+1) = \theta_4^4(\tau), \quad \theta_4^4(\tau+1) = \theta_3^4(\tau),$$

$$\theta_2^4\left(-\frac{1}{\tau}\right) = -\tau^2\theta_4^4(\tau), \quad \theta_3^4\left(-\frac{1}{\tau}\right) = -\tau^2\theta_3^4(\tau), \quad \theta_4^4\left(-\frac{1}{\tau}\right) = -\tau^2\theta_2^4(\tau).$$

Введем переменную $\rho = -\dfrac{1}{\tau}$ и матрицу $\beta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Из соотношений для $\theta_3^4$ следуют равенства

$$\theta_3^4(\tau) = \theta_3^4\left(-\frac{1}{\rho}\right) = -\rho^2\theta_3^4(\rho), \quad (\theta_3^4(\rho))_\beta = -\theta_3^4(\rho).$$

Пусть $\alpha_\nu \in Q_n$. Согласно первой лемме, существуют матрицы $\gamma \in \Gamma(2)$ и $\alpha_\mu \in Q_n$ такие, что

$$\beta\alpha_\nu\beta = \gamma\alpha_\mu, \quad \alpha_\nu\beta = \beta\gamma\alpha_\mu.$$

Аналогично вычислениям выше имеем

$$y_\nu(\tau) = y_\nu\left(-\frac{1}{\rho}\right) = \frac{(\psi_3(\rho))_{\alpha_\nu\beta} - (\psi_3(\rho))_\beta}{(\theta_3^4(\rho))_\beta} = \frac{(\psi_3(\rho))_{\beta\gamma\alpha_\mu} - (\psi_3(\rho))_\beta}{(\theta_3^4(\rho))_\beta} =$$
$$= \frac{(\psi_3(\rho))_{\alpha_\mu} - \psi_3(\rho)}{\theta_3^4(\rho)} = y_\mu(\rho).$$

Отсюда следует, что функции $y_\nu(\tau)$ и соответственно коэффициенты $a_k(\tau)$ не имеют особенностей в 0. Для анализа поведения функций $y_\nu(\tau)$ в точке $\tau = -1$ введем аналогичную переменную $\varrho = \dfrac{\tau}{\tau+1}$ и матрицу $\omega = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\omega^2 \in \Gamma(2)$. Соотношения для $\theta_3^4$ можно переписать в виде

$$(\theta_3^4(\varrho))_\omega = \frac{1}{(\varrho-1)^2}\theta_3^4\left(-\frac{\varrho}{\varrho-1}\right) = -\frac{1}{\varrho^2}\theta_3^4\left(1-\frac{1}{\varrho}\right) = -\frac{1}{\varrho^2}\theta_4^4\left(-\frac{1}{\varrho}\right) = \theta_2^4(\varrho).$$

Отсюда следуют представления

$$(\theta_3^4(\varrho))_{\omega^{-1}} = ((\theta_3^4(\varrho)))_\omega = \theta_2^4(\varrho).$$

Аналогично рассуждениям выше, зафиксируем $\alpha_\nu \in Q_n$. Согласно первой лемме, существуют матрицы $\gamma \in \Gamma(2)$ и $\alpha_\mu \in Q_n$ такие, что

$$\omega\alpha_\nu\omega = \gamma\alpha_\mu, \quad \alpha_\nu\omega = \omega^{-1}\gamma\alpha_\mu.$$

Из второй леммы следуют соотношения для $\psi_3$:

$$12\psi_3\left(-\frac{\varrho}{\varrho-1}\right) = P\left(-\frac{\varrho}{\varrho-1}\right) + \left(2\lambda\left(-\frac{\varrho}{\varrho-1}\right)-1\right)\theta_3^4\left(-\frac{\varrho}{\varrho-1}\right) =$$
$$= (\varrho-1)^2\left(P(\varrho) + \frac{2-\lambda}{\lambda}(\varrho)\theta_2^4(\varrho)\right) + \frac{6(\varrho-1)}{\pi i}.$$

Но поскольку $\delta\lambda = \lambda(1-\lambda)\theta_3^4 = (1-\lambda)\theta_2^4$ и $\Delta = 2^{-8}(\lambda(1-\lambda))^2\theta_3^{24} = 2^{-8}(\lambda^{-2}(1-\lambda))^2\theta_2^{24}$ имеем

$$2P = \delta\log\Delta = \frac{2\delta(1-\lambda)}{1-\lambda} - \frac{4\delta\lambda}{\lambda} + \frac{24\delta\theta_2}{\theta_2} =$$
$$= -2(1-\lambda)\theta_2^4\left(\frac{2}{\lambda} + \frac{1}{1-\lambda}\right) + 24\psi_2 = 24\psi_2 - 2\theta_2^4\left(\frac{2-\lambda}{\lambda}\right).$$

Поэтому

$$\psi_3\left(-\frac{\varrho}{\varrho-1}\right) = (\varrho-1)^2\psi_2(\varrho) + \frac{\varrho-1}{2\pi i}.$$

Введя функцию

$$(\psi_2)_\alpha(\tau) := \left(\frac{\sqrt{\det\alpha}}{c\tau+d}\right)^2\psi_2(\alpha.\tau) - \frac{c}{2\pi i(c\tau+d)},$$

аналогично рассуждениям выше можно показать, что $\forall\alpha\in Q_n, \beta\in\Gamma(2)$

$$(\psi_2)_{\alpha\beta}(\tau) - (\psi_2)_\beta(\tau) = \frac{1}{(c\tau+d)^2}\left((\psi_2)_\alpha(\beta.\tau) - \psi_2(\beta.\tau)\right).$$

Поскольку $\theta_2^4(\varrho)$ является модулярной функцией веса 2, далее имеем

$$y_\nu(\tau) = y_\nu\left(-\frac{\varrho}{\varrho-1}\right) = \frac{(\psi_3)_{\alpha_\nu\omega}(\varrho) - (\psi_3)_\omega(\varrho)}{(\theta_3^4)_\omega(\varrho)} = \frac{(\psi_3)_{\omega^{-1}\gamma\alpha_\mu}(\varrho) - (\psi_3)_\omega(\varrho)}{(\theta_3^4)_\omega(\varrho)} =$$
$$= \frac{(\psi_2)_{\gamma\alpha_\mu}(\varrho) - \psi_2(\varrho)}{\theta_2^4(\varrho)} = \frac{(\psi_2)_{\alpha_\mu}(\varrho) - \psi_2(\varrho)}{\theta_2^4(\varrho)} = \tilde{y}_\mu(\varrho),$$

где $\tilde{y}_\mu(\varrho) := \frac{(\psi_2)_{\alpha_\mu}(\varrho)-\psi_2(\varrho)}{\theta_2^4(\varrho)}$, аналогично функциям $y_\nu$. Отсюда следует, что функции $y_\nu(\tau)$ представимы в виде ряда Лорана в окрестности точки $\tau = -1$ по степеням $e^{\frac{\pi i\varrho}{n}}$. Из вида функций $\tilde{y}_\mu(\varrho)$ следует, что разложения начинаются с $e^{\frac{\pi i\varrho(u^2-n))}{n}}$, поэтому разложения функций $a_k(\tau)$ содержат лишь конечное число отрицательных степеней $e^{\frac{\pi i\varrho}{n}}$.

Как было сказано выше, многочлен $F_2(X)$ не меняется под действиями автоморфизмов поля $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{n}})$, то $a_k(\tau)$ содержат в разложении только степени $e^{\pi i\varrho}$.

Отсюда следует, что функции $a_k(\tau)$ и $\lambda(\tau)$ имеют только один полюс в фундаментальной области при $\tau = -1$, а значит существует многочлен $R_k(Y) \in \mathbb{C}(Y)$ такой, что $a_k(\tau) = R_k(16\lambda(\tau))$. Учитывая представления функций $y_\nu(\tau)$ получаем, что коэффициенты в разложениях $a_k(\tau)$ по степеням $e^{\frac{\pi i\varrho}{n}}$ являются целыми алгебраическими числами в $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{n}})$, а значит

$R_k(Y) \in \mathbb{Q}(Y)$. С другой стороны разложение функции $16\lambda(\tau)$ содержит только целые коэффициенты по степеням $e^{\frac{\pi i \varrho}{n}}$, поэтому $R_k(Y) \in \mathbb{Z}[e^{\frac{2\pi i}{n}}](Y)$. Таким образом, $R_k(Y) \in \mathbb{Z}(Y)$, а значит $P_n(X, 16\lambda(\tau)) = F_2(X)$, для некоторого $P_n(X,Y) \in \mathbb{Z}[X,Y]$.

Упростим выражения для $y_\nu(\tau)$:

$$y_\nu(\tau) = \frac{(\psi_3)_{\alpha_\nu}(\tau) - \psi_3(\tau)}{\theta_3^4(\tau)} = \frac{\frac{u}{w}\psi_3\left(\frac{u\tau+2v}{w}\right) - \psi_3(\tau)}{\theta_3^4(\tau)}, \quad \alpha_\nu = \begin{pmatrix} u & 2v \\ 0 & w \end{pmatrix}.$$

В частном случае получаем, что функция $y_1(\tau) = \dfrac{n\psi_3(n\tau) - \psi_3(\tau)}{\theta_3^4(\tau)}$ будет алгебраической над полем $\mathbb{Q}(\lambda(\tau))$. А из тождеств $\lambda(\tau) = \dfrac{\psi_3(\tau) - \psi_4(\tau)}{\psi_2(\tau) - \psi_4(\tau)}$ и $\theta_3^4(\tau) = 4\psi_2(\tau) - 4\psi_4(\tau)$ получаем алгебраичность $\psi_3(n\tau)$ над $\mathbb{Q}(\psi_2(\tau), \psi_3(\tau), \psi_4(\tau))$.

Теперь покажем, как вывести соотношения для остальных $\psi$-функций. Пусть $\alpha_\nu = \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & n \end{pmatrix} \in Q_n$. Тогда

$$y_\nu\left(1 - \frac{1}{\tau}\right) = \frac{\frac{1}{n}\psi_3\left(1 - \frac{1}{n\tau}\right) - \psi_3(1 - \frac{1}{\tau})}{\theta_3^4\left(1 - \frac{1}{\tau}\right)} =$$
$$= \frac{\frac{1}{n}\left((n\tau)^2\psi_2(n\tau) + \frac{n\tau}{2\pi i}\right) - \tau^2\psi_2(\tau) - \frac{\tau}{2\pi i}}{-\tau^2\theta_2^4(\tau)} = -\frac{n\psi_2(n\tau) - \psi_2(\tau)}{\theta_2^4(\tau)}.$$

С другой стороны,

$$\lambda\left(1 - \frac{1}{\tau}\right) = \frac{\lambda(\tau) - 1}{\lambda(\tau)}.$$

Поскольку $y_1(\tau)$ корень многочлена $P_n(X, 16\lambda(\tau))$, то $-\dfrac{n\psi_2(n\tau) - \psi_2(\tau)}{\theta_2^4(\tau)}$ будет корнем многочлена $P_n\left(X, 16\dfrac{\lambda(\tau) - 1}{\lambda(\tau)}\right)$.

Чтобы получить искомое соотношение для функций $\frac{n\psi_4(n\tau) - \psi_4(\tau)}{\theta_4^4(\tau)}$, сделаем замену $\tau \to \tau + 1$ в равенстве $0 = P_n(y_1(\tau), 16\lambda(\tau))$. Поскольку

$$\lambda\left(\tau + 1\right) = \frac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau) - 1}, \quad \psi_3(\tau + 1) = \psi_4(\tau),$$

то имеем $0 = P_n\left(\dfrac{n\psi_4(n\tau) - \psi_4(\tau)}{\theta_4^4(\tau)}, 16\dfrac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau) - 1}\right)$.

Отсюда следует алгебраичность функций $\psi_2(n\tau)$ и $\psi_4(n\tau)$ над $\mathbb{Q}(\psi_2(\tau), \psi_3(\tau), \psi_4(\tau))$.

Все это время рассматривались только нечетные $n$, напомним соотношения между значениями $\theta$-функций для случая $n=2$, см. [4]

$$2\theta_2^2(2\tau)=\theta_3^2(\tau)-\theta_4^2(\tau),\quad 2\theta_3^2(2\tau)=\theta_3^2(\tau)+\theta_4^2(\tau),\quad \theta_4^2(2\tau)=\theta_3(\tau)\theta_4(\tau).$$

Тогда непосредственной проверкой получаются следующие соотношения для $\psi$-функций:

$$\psi_2(2\tau)=\frac{\psi_3(\tau)-\chi(\tau)\psi_4(\tau)}{1-\chi(\tau)},\quad \psi_3(2\tau)=\frac{\psi_3(\tau)+\chi(\tau)\psi_4(\tau)}{1+\chi(\tau)},$$
$$\psi_4(2\tau)=\psi_3(\tau)+\psi_4(\tau),$$

где $\chi(\tau)=\sqrt{1-\lambda(\tau)}$. То есть алгебраичность функций $\psi_2(n\tau)$, $\psi_3(n\tau)$ и $\psi_4(n\tau)$ над $\mathbb{Q}(\psi_2(\tau),\psi_3(\tau),\psi_4(\tau))$ доказана и для чётных $n$. $\square$

*Замечание.* Алгебраичность функций $\psi_{2,3,4}(n\tau)$ над полем $\mathbb{Q}(\psi_2(\tau),\psi_3(\tau),\psi_4(\tau))$ можно доказать из других соображений. Воспользуемся тождеством, см. [3],
$0=F_1\left(n^2\dfrac{\theta_3^4(n\tau)}{\theta_3^4(\tau)}\right)=Q_n\left(n^2\dfrac{\theta_3^4(n\tau)}{\theta_3^4(\tau)},16\lambda(\tau)\right)=Q_n(h_3(\tau),16\lambda(\tau))$. Дифференцируя тождество, получаем

$$0=\frac{\partial Q_n}{\partial X}(h_3(\tau),16\lambda(\tau))\delta h_3(\tau)+\frac{\partial Q_n}{\partial Y}(h_3(\tau),16\lambda(\tau))\delta\lambda(\tau)=$$
$$=\frac{\partial Q_n}{\partial X}(h_3(\tau),16\lambda(\tau))n^2\frac{\theta_3^4(n\tau)}{\theta_3^4(\tau)}(\psi_3(n\tau)-\psi_3(\tau))+$$
$$+\frac{\partial Q_n}{\partial Y}(h_3(\tau),16\lambda(\tau))\cdot 4\lambda(\tau)(\psi_2(\tau)-\psi_3(\tau)).$$

Отсюда следует, что $\psi_3(n\tau)-\psi_3(\tau)\in\mathbb{Q}\left(h_3(\tau),\lambda(\tau),\psi_2(\tau)-\psi_3(\tau)\right)$, а поскольку $\lambda(\tau)=\frac{\psi_3(\tau)-\psi_4(\tau)}{\psi_2(\tau)-\psi_4(\tau)}$, то функции $h_3(\tau),\lambda(\tau)$ будут алгебраическими над $\mathbb{Q}\left(\psi_2(\tau),\psi_3(\tau),\psi_4(\tau)\right)$. Отсюда следует, что $\psi_3(n\tau)$ алгебраический над $\mathbb{Q}\left(\psi_2(\tau),\psi_3(\tau),\psi_4(\tau)\right)$. Для $\psi_2(n\tau)$ и $\psi_4(n\tau)$ доказательство аналогично.

### 4.4 Соотношения для $\eta$-функции Дедекинда

Напомним определение $\eta$-функции Дедекинда и ее связь с $P$-функцией Рамануджана:

$$\eta(\tau)=q^{\frac{1}{12}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})=\Delta^{\frac{1}{24}}(\tau),\quad \delta G(\tau)=\delta\log\eta(\tau)=\frac{1}{24}P.$$

Для получения соотношений между $G(n\tau)$ и $G(\tau)$ возникает необходимость в определении функции $G_\alpha(\tau)$ со свойствами, аналогичными с $(\psi_3)_\alpha$.

Подобные функции можно строить, отталкиваясь от дифференциального уравнения, т.е. подобрать таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{1}{24}(P_\alpha - P) = \delta(G_\alpha - G).$$

Кроме этого должна быть инвариантность относительно матриц $\gamma \in \Gamma(N)$ для некоторого $N$. Пусть $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Q_n$, заметим, что в качестве функции $G_\alpha$ можно взять следующую $G_\alpha := G(\alpha.\tau) - \frac{1}{2}\log(c\tau + d) + c_\alpha$, где $c_\alpha$ некоторая константа. Подбирать константы будем таким образом, чтобы обеспечить инвариантность относительно матриц из $\Gamma(2)$ и перестановочность функций, как было для выше описанных конструкций. Пусть $\alpha_\nu = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Q_n$. Поскольку $\Delta(\tau)$ модулярная функция веса 12, то для нее уже определена функция $(\Delta)_\alpha(\tau) = \left(\frac{\sqrt{\det \alpha}}{c\tau + d}\right)^{12} \Delta(\alpha.\tau)$, и верны соотношения $(\Delta)_\gamma(\tau) = \Delta(\tau)$ для $\gamma \in \Gamma(2)$. Рассмотрим функцию $\phi_\alpha(\tau) := \dfrac{\Delta_\alpha(\tau)}{\Delta(\tau)}$. Аналогично прошлым выкладкам, фиксируем $\beta \in \Gamma(2)$, находим $\gamma \in \Gamma(2)$ и $\alpha_\mu \in Q_n$ такие, что $\alpha_\nu\beta = \gamma\alpha_\mu$. Тогда

$$\phi_{\alpha_\nu}(\beta.\tau) = \frac{\Delta_{\alpha_\nu}(\beta.\tau)}{\Delta(\beta.\tau)} = \frac{\Delta_{\alpha_\nu\beta}(\tau)}{\Delta(\beta.\tau)} = \frac{\Delta_{\gamma\alpha_\mu}(\tau)}{\Delta(\tau)} = \frac{\Delta_{\alpha_\mu}(\tau)}{\Delta(\tau)} = \phi_{\alpha_\mu}(\tau).$$

Несложно заметить, что константу $c_\alpha$ можно определить из условия $\log\phi_\alpha(\tau) = G_\alpha(\tau)$, и поэтому многочлены

$$F_3(X) = \prod_{\alpha \in Q_n}(X - \phi_\alpha(\tau)), \quad F_4(X) = \prod_{\alpha \in Q_n}(X - \log\phi_\alpha(\tau))$$

не меняются под действиями матриц из $\Gamma(2)$.

Один из корней $F_4(X)$ - $z_1(\tau) = \log\dfrac{n^6\eta^{24}(n\tau)}{\eta^{24}(\tau)} = 6\log n + 24\log\eta(n\tau) - 24\log\eta(\tau)$. Найденные функции необходимо корректировать, поскольку их поведение в точках $\tau = -1, 0, \infty$ отличается от функции $\lambda(\tau)$.

## 5 Выводы и дальнейшее развитие

Сам метод конструкции подобных соотношений представляет ценность и может быть применён к доказательству различных результатов в трансцендентной теории чисел. В качестве примера подобного результата рассмотрим уже упоминавшуюся теорему Ю.В. Нестеренко [1]:

**Теорема.** *Для каждого* $q \in \mathbb{C}$, $0 < |q| < 1$, *среди чисел* $q, P(q), Q(q), R(q)$ *имеется не менее трёх алгебраически независимых над* $\mathbb{Q}$.

В доказательстве конструируется последовательность многочленов $A_N(z, P(z), Q(z), R(z)) = F_N(z)$, с целыми коэффициентами, удовлетворяющая критерию Лиувилля. На одном из шаге доказательства используется утверждение о существовании производной порядка $T$ не выше $\gamma_0 N \ln N$, для которой будет нижняя оценка для числа $|F_N^{(k)}(q)|$. В случае возможного "расширения"теоремы на большее число функций можно доказывать существование нижней оценки для числа $|F_N^{(k)}(q^m)|$, для некоторых параметров $k$ и $m$. Числа $q^m$ имеют ту же суть, что и значения функций в точках $\tau$ и $m\tau$, поэтому, в случае наличия соотношений между значениями функций в точках $\tau$ и $m\tau$, оценки для чисел $|F_N^{(k)}(q^m)|$ будут более точны, и удастся применить критерий Лиувилля для более точных параметров.

Таким образом, использование описанного метода конструкции соотношений в будущем может быть использовано для обобщения результатов теории трансцендентных чисел, что и является объектом дальнейших исследований.

## 6 Список литературы


[**1**] Ю. В. Нестеренко, Модулярные функции и вопросы трансцендентности, Матем. сб., 1996, том 187, номер 9, 65–96

[**2**] Yu. V. Nesterenko, On some identities for theta-constants, Sem. Math. Sci., 35, Keio Univ., Yokohama, 2006, 151-160.

[**3**] Pierre Grinspan, A Measure Of Simultaneous Approximation For Quasi-Modular Functions, The Ramanujan Journal 5(1), May 2000

[**4**] Weber H., Lehrbuch der Algebra, Bd. III, Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1908, 105-110

[**5**] Ахиезер Н.И., Элементы теории эллиптических функций, (2-е изд.). М.: Наука, 1970, §22