ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

Экспоненты Шмидта-Суммерера для рациональных решёток

Выполнил студент
605 группы
Ильметов Максим Федорович

____
подпись студента

Научный руководитель:
доцент О. Н. Герман

____
подпись научного руководителя

Москва
2019

Содержание

1 Введение

Нашей целью в данной работе является изучение экспонент Шмидта-Суммера для рациональных решёток $\mathbb{Z}^d$, которые тесно связаны с Диофантовыми экспонентами. В частности, будут подсчитаны явные представления этих экспонент.

2 Основная теорема

Пусть $\Lambda \in \mathcal{L}_d$. Обозначим через $\mathcal{B}$ единичный шар в $sup-$норме

$$\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^d \| x| \leq 1\}$$

Положим для каждого набора $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_d) \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{array}{rcl} \tau_1 & + & \cdots + \tau_d = 0, \\ D_{\boldsymbol{\tau}} & = & diag(e^{\tau_1}, \dots, e^{\tau_d}), \\ \mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}} & = & D_{\boldsymbol{\tau}}\mathcal{B}. \end{array}$$

Введем следующие обозначения функций для набора $\boldsymbol{\tau}$

$$\begin{array}{rcl} |\boldsymbol{\tau}|_+ & = & \max\{\tau_i | \tau_i \geq 0\}, \\ |\boldsymbol{\tau}|_- & = & |-\boldsymbol{\tau}|_+ = \max\{|\tau_i| | \tau_i \leq 0\}. \end{array}$$

Заметим, что

$$|\boldsymbol{\tau}| = \max\{|\boldsymbol{\tau}|_-, |\boldsymbol{\tau}|_+\},$$

$$|\boldsymbol{\tau}|_+/(d-1) \leq |\boldsymbol{\tau}|_- \leq (d-1)|\boldsymbol{\tau}|_+.$$

Для каждого $k = 1, \dots, d$ определим k-ый последовательный минимум, т.е минимальное положительное λ такое, что $\lambda\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}}$ содержит k линейно независимых векторов решетки Λ. Обозначим его через $\lambda_k(\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}})$. И ещё для каждого $k = 1, \dots, d$ определим новую функцию $L_k(\boldsymbol{\tau})$:

$$L_k(\boldsymbol{\tau}) = \log(\lambda_k(\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}})).$$

Определим *нижние и верхние экспоненты Шмидта-Суммерера первого типа* как

$$\underline{\psi}_i(\Lambda) = \liminf_{|\boldsymbol{\tau}| \to \infty} \frac{L_i(\boldsymbol{\tau})}{|\boldsymbol{\tau}|_+}, \quad \overline{\psi}_i(\Lambda) = \limsup_{|\boldsymbol{\tau}| \to \infty} \frac{L_i(\boldsymbol{\tau})}{|\boldsymbol{\tau}|_+},$$

и *второго типа* как

$$\underline{\Psi}_i(\Lambda) = \liminf_{|\boldsymbol{\tau}| \to \infty} \sum_{1 \leq j \leq i} \frac{L_i(\boldsymbol{\tau})}{|\boldsymbol{\tau}|_+}, \quad \overline{\Psi}_i(\Lambda) = \limsup_{|\boldsymbol{\tau}| \to \infty} \sum_{1 \leq j \leq i} \frac{L_i(\boldsymbol{\tau})}{|\boldsymbol{\tau}|_+}.$$

Теорема 1 *Экспоненты Шмидта-Суммерера первого и второго типов для рациональной решётки $\Lambda = \mathbb{Z}^d$ равны соответственно:*

$$\underline{\psi}_k(\Lambda) = \begin{cases} -1, & \textit{при } k < d, \\ \frac{1}{d-1}, & \textit{при } k = d \end{cases} \qquad \overline{\psi}_k(\Lambda) = \begin{cases} -1, & \textit{при } k = 1, \\ \frac{k-1}{d-k+1}, & \textit{при } k > 1 \end{cases}$$

$$\underline{\Psi}_k(\Lambda) = \begin{cases} -k, & \textit{при } k < d, \\ 0, & \textit{при } k = d \end{cases} \qquad \overline{\Psi}_k(\Lambda) = \begin{cases} -1, & \textit{при } k = 1, \\ -\frac{d-k}{d-1}, & \textit{при } k > 1 \end{cases}$$

3 Доказательство теоремы в случае d = 2

Пусть $\Lambda = \mathbb{Z}^2$. Тогда рассмотрим единичный шар

$$\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^2 | |x| \leq 1\}$$

с набором $\boldsymbol{\tau}$

$$\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{R}^2, \tau_1 + \tau_2 = 0$$

и матрицами $D_{\boldsymbol{\tau}}, \mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}}$

$$D_{\boldsymbol{\tau}} = diag(e^{\tau_1}, e^{\tau_2}), \quad \mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}} = D_{\boldsymbol{\tau}}\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | |x| \leq e^{\tau_1}, |y| \leq e^{\tau_2}\}.$$

Посчитаем последовательные минимумы для этой решетки. Сначала докажем два простых утверждения.

Утверждение 3.1 *Если $\lambda\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}}$ содержит целую ненулевую точку в $\mathbb{Z}^2$, то $\lambda\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}}$ содержит либо точку (1;0), либо (0;1).*

Доказательство.

Множество $\lambda\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}}(\lambda > 0)$ содержит в $\mathbb{Z}^2$ целую ненулевую точку, удовлетворяющую неравенству

$$(\lambda|x|)(\lambda|y|) \leq e^{\tau_1}e^{\tau_2} = e^{\tau_1+\tau_2} = e^0 = 1.$$

Запишем теперь следующую систему неравенств

$$\begin{cases} (\lambda|x|)(\lambda|y|) \leq 1 \\ 0 \leq \lambda|x| \leq e^{\tau_1} \\ 0 \leq \lambda|y| \leq e^{\tau_2} = \frac{1}{e^{\tau_1}} \end{cases} \tag{1}$$

Чтобы множество $\lambda\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}}$ содержало лишь одну целую ненулевую точку, то должно выполнятся либо неравенство $e^{\tau_1} < 2$, либо $e^{\tau_2} < 2$. Перепишем систему (1) для первого случая

$$\begin{cases} (\lambda|x|)(\lambda|y|) \leq 1 \\ 0 \leq \lambda|x| < 2 \\ 0 \leq \lambda|y| < 1/2 \end{cases} \tag{2}$$

Заметим, что в случае $e^{\tau_1} < 2$, множество $\lambda\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}}$ содержит целую ненулевую точку (1;0), а в случае $e^{\tau_2} < 2$ содержит (0;1). Следовательно, если $\lambda\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}}$ содержит одну целую ненулевую точку, то она имеет вид (1;0), либо (0;1).

Утверждение 3.2 *Если $\lambda\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}}$ содержит две линейно независимые точки в $\mathbb{Z}^2$, то $\lambda\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}}$ содержит точки (1;0) и (0;1).*

Доказательство.

Доказывается аналогичным образом. Множество $\lambda\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}}$ может содержать две линейно независимые точки $\mathbb{Z}^2$, лишь в том случае, когда $e^{\tau_1} = e^{\tau_2} = 1$. Тогда из системы (2) вытекает, что множество $\lambda\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}}$ содержит точки (1;0),(0;1) одновременно.

Переходим к вычислению последовательных минимумов $\lambda_k(\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}})$

$$\lambda_1(\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}}) = \min\{\lambda > 0 | \lambda\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}} \text{ содержит целую ненулевую точку в } \mathbb{Z}^2\} = \\ = \frac{1}{\max(e^{\tau_1}, e^{\tau_2})} = e^{-\max(\tau_1,\tau_2)},$$

$$\lambda_2(\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}}) = \min\{\lambda > 0 | \lambda\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}} \text{ содержит 2 л.н.з. точки в } \mathbb{Z}^2\} = \\ = \frac{1}{\min(e^{\tau_1}, e^{\tau_2})} = e^{-\min(\tau_1,\tau_2)}$$

Теперь найдем значения функции $L_k(\boldsymbol{\tau}) = \log(\lambda_k(\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}}))$

$$\begin{aligned} L_1(\boldsymbol{\tau}) &= \log(\lambda_1(\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}})) = -\max(\tau_1,\tau_2) = -|\boldsymbol{\tau}|_+, \\ L_2(\boldsymbol{\tau}) &= \log(\lambda_2(\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}})) = -\min(\tau_1,\tau_2) \end{aligned}$$

Далее вычисляем $\psi_k(\Lambda,\boldsymbol{\tau}) = L_k(\boldsymbol{\tau})/|\boldsymbol{\tau}|_+$

$$\begin{aligned} \psi_1(\Lambda,\boldsymbol{\tau}) &= \frac{L_1(\boldsymbol{\tau})}{|\boldsymbol{\tau}|_+} = \frac{-|\boldsymbol{\tau}|_+}{|\boldsymbol{\tau}|_+} = -1, \\ \psi_2(\Lambda,\boldsymbol{\tau}) &= \frac{L_2(\boldsymbol{\tau})}{|\boldsymbol{\tau}|_+} = \frac{-\min(\tau_1,\tau_2)}{|\boldsymbol{\tau}|_+} = -\frac{\min(\tau_1,\tau_2)}{\max(\tau_1,\tau_2)} \end{aligned}$$

Нижние и верхние экспоненты Шмидта-Суммерера первого типа будут равны соответственно:

$$\begin{aligned} \underline{\psi}_1(\Lambda) &= \liminf_{|\boldsymbol{\tau}|\to\infty} \psi_1(\Lambda,\boldsymbol{\tau}) = -1, \overline{\psi}_1(\Lambda) = \limsup_{|\boldsymbol{\tau}|\to\infty} \psi_1(\Lambda,\boldsymbol{\tau}) = -1, \\ \underline{\psi}_2(\Lambda) &= \liminf_{|\boldsymbol{\tau}|\to\infty} \psi_2(\Lambda,\boldsymbol{\tau}) = 1, \overline{\psi}_2(\Lambda) = \limsup_{|\boldsymbol{\tau}|\to\infty} \psi_2(\Lambda,\boldsymbol{\tau}) = 1 \end{aligned}$$

Экспоненты второго типа вычисляются с помощью функции $\Psi_k(\Lambda,\boldsymbol{\tau})$

$$\Psi_1(\Lambda,\boldsymbol{\tau}) = \psi_1(\Lambda,\boldsymbol{\tau}) = -1, \Psi_2(\Lambda,\boldsymbol{\tau}) = \psi_1(\Lambda,\boldsymbol{\tau}) + \psi_2(\Lambda,\boldsymbol{\tau})$$

Получим следующие результаты для экспонент второго типа

$$\begin{aligned} \underline{\Psi}_1(\Lambda) &= \liminf_{|\boldsymbol{\tau}|\to\infty} \Psi_1(\Lambda,\boldsymbol{\tau}) = -1, \overline{\Psi}_1(\Lambda) = \limsup_{|\boldsymbol{\tau}|\to\infty} \Psi_1(\Lambda,\boldsymbol{\tau}) = -1, \\ \underline{\Psi}_2(\Lambda) &= \liminf_{|\boldsymbol{\tau}|\to\infty} \Psi_2(\Lambda,\boldsymbol{\tau}) = 0, \overline{\Psi}_2(\Lambda) = \limsup_{|\boldsymbol{\tau}|\to\infty} \Psi_2(\Lambda,\boldsymbol{\tau}) = 0 \end{aligned}$$

4 Доказательство теоремы в общем случае

Пусть теперь $\Lambda = \mathbb{Z}^d$. Докажем несколько вспомогательных утверждений.

Утверждение 4.1

$$\lambda_k(\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}}) = \min\{\lambda > 0 | \lambda\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}} \textit{ содержит хотя бы } k \textit{ пар } \pm e_i\} \tag{3}$$

Доказательство. Воспользуемся определением последовательного минимума решетки. Это минимальное положительное λ такое, что $\lambda\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}}$ содержит хотя бы k линейно независимых целых точек решетки $\mathbb{Z}^d$. И они имеют вид $\pm e_i = (0, \ldots, \underbrace{\pm 1}_{i}, \ldots, 0)$, так как удовлетворяют следующему условию:

$$e_i \in \lambda\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}} \Leftrightarrow e^{\tau_i} \geq \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda \geq e^{-\tau_i}, \text{ где } i, k \in (1, \ldots, d). \tag{4}$$

Утверждение 4.2

$$\lambda_k(\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}}) = \min\{\lambda > 0 | \ \exists k \textit{ различных } i \textit{ таких, что } \lambda \geq e^{-\tau_i}\} \tag{5}$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством (4) для e_1, e_2:

$$e_1 \in \lambda\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}} \Leftrightarrow e^{\tau_1} \geq \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda \geq e^{-\tau_1},$$

$$e_2 \in \lambda\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}} \Leftrightarrow e^{\tau_2} \geq \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda \geq e^{-\tau_2} \tag{6}$$

Если $\tau_1 \geq \tau_2$, то $e^{-\tau_1} \leq e^{-\tau_2}$. Таким образом, мы можем получить всего k различных i и упорядочить по возрастанию $e^{-\tau_{i_1}} \leq e^{-\tau_{i_2}} \cdots \leq e^{-\tau_{i_d}}$.

Утверждение 4.3

$$\lambda_k(\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}}) = e^{-\tau_{i_k}} \tag{7}$$

Доказательство. Из предыдущего утверждения следует, что последовательный минимум $\lambda_1(\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}})$ будет равен $e^{-\tau_{i_1}}$ для первого минимального значения i и далее по возрастанию $\lambda_2(\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}}) = e^{-\tau_{i_2}}$. Соответственно, k-ый последовательный минимум $\lambda_k(\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}}) = e^{-\tau_{i_k}}$.

Утверждение 4.4

$$L_k(\boldsymbol{\tau}) = \log\left(\lambda_k(\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}})\right) = -\tau_{i_k} \tag{8}$$

Доказательство. Из последнего утверждения нам известно следующее равенство:

$$\lambda_k(\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}}) = e^{-\tau_{i_k}}.$$

Отсюда получаем, что

$$L_k(\boldsymbol{\tau}) = \log\left(\lambda_k(\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}})\right) = \log(e^{-\tau_{i_k}}) = -\tau_{i_k}.$$

Приступаем к вычислению экспонент Шмидта-Суммерера. Начнем с экспонент первого типа, имеющих следующий вид:

$$\underline{\psi}_k(\Lambda) = \liminf_{|\boldsymbol{\tau}|\to\infty} \frac{L_k(\boldsymbol{\tau})}{|\boldsymbol{\tau}|_+} - \text{ нижняя экспонента 1-го типа,}$$

$$\overline{\psi}_k(\Lambda) = \limsup_{|\boldsymbol{\tau}|\to\infty} \frac{L_k(\boldsymbol{\tau})}{|\boldsymbol{\tau}|_+} - \text{ верхняя экспонента 1-го типа.}$$

Рассмотрим соотношение $L_k(\boldsymbol{\tau})/|\boldsymbol{\tau}|_+$ и воспользуемся равенством (8)

$$L_k(\boldsymbol{\tau}) = -\tau_{i_k},$$

а $|\boldsymbol{\tau}|_+$ по определению

$$|\boldsymbol{\tau}|_+ = \max\{\tau_i|\tau_i \geq 0\} = \tau_{i_1}(\text{т.к. } \tau_{i_1} \geq \cdots \geq \tau_{i_k} \geq \cdots \geq \tau_{i_d}).$$

Получим соотношение для $L_k(\boldsymbol{\tau})$ и $|\boldsymbol{\tau}|_+$

$$\frac{L_k(\boldsymbol{\tau})}{|\boldsymbol{\tau}|_+} = -\frac{\tau_{i_k}}{\tau_{i_1}}. \tag{9}$$

Теперь, воспользовавшись двумя известными условиями для набора $\boldsymbol{\tau}$:

$$\begin{cases} \tau_{i_1} \geq \cdots \geq \tau_{i_k} \geq \cdots \geq \tau_{i_d}, \\ \tau_{i_1} + \cdots + \tau_{i_k} + \cdots + \tau_{i_d} = 0 \end{cases} \tag{10}$$

оценим сверху отношение $\frac{L_k(\boldsymbol{\tau})}{|\boldsymbol{\tau}|_+} = -\frac{\tau_{i_k}}{\tau_{i_1}}$. Через S обозначим и рассмотрим сумму $\tau_{i_1} + \cdots + \tau_{i_k} + \cdots + \tau_{i_d}$. Пусть первые $k-1$ элемента будут равны τ_{i_1}, а остальные $d-k+1$ равны τ_{i_k}. После этих преобразований заметим, что S увеличится и выполнится такое условие, что $S \geq 0$

$$\begin{aligned} 0 \leq S = \underbrace{\tau_{i_1} + \cdots + \tau_{i_{k-1}}}_{k-1} + \tau_{i_k} + \overbrace{\tau_{i_{k+1}} + \cdots + \tau_{i_d}}^{d-k} \leq \\ \leq (k-1)\tau_{i_1} + \tau_{i_k} + (d-k)\tau_{i_k} = (k-1)\tau_{i_1} + (d-k+1)\tau_{i_k} \end{aligned}$$

По условию τ_{i_1} не может принимать отрицательные значения, тогда разделим последнее неравенство на $\tau_{i_1} > 0$, умножим на -1 и получим верхнюю оценку для $\frac{L_k(\boldsymbol{\tau})}{|\boldsymbol{\tau}|_+}$

$$\frac{L_k(\boldsymbol{\tau})}{|\boldsymbol{\tau}|_+} = -\frac{\tau_{i_k}}{\tau_{i_1}} \leq \frac{k-1}{d-k+1} \tag{11}$$

Неравенство (11) выполняется для всех $k > 1$. Если $k = 1$, то получим следующее равенство

$$\frac{L_1(\boldsymbol{\tau})}{|\boldsymbol{\tau}|_+} = -\frac{\tau_{i_k}}{\tau_{i_1}} = -\frac{\tau_{i_1}}{\tau_{i_1}} = -1 \tag{12}$$

В неравенстве (11) равенство достигается тогда, когда набор (τ_{i_j}) имеет вид, где первые $k-1$ элемента будут равны τ_{i_1}, а остальные $d-k+1$ равны τ_{i_k}.

$$\boldsymbol{\tau_1} = (\underbrace{\tau_{i_1},\dots,\tau_{i_1}}_{k-1},\overbrace{\tau_{i_k},\dots,\tau_{i_k}}^{d-k+1})$$

Следовательно, используя оценки (11) и (12), можем вычислить верхнюю экспоненту $\overline{\psi}_k(\Lambda)$:

$$\overline{\psi}_k(\Lambda) = \limsup_{|\boldsymbol{\tau}|\to\infty} \frac{L_k(\boldsymbol{\tau})}{|\boldsymbol{\tau}|_+} = \limsup_{|\boldsymbol{\tau}|\to\infty} \left(-\frac{\tau_{i_k}}{\tau_{i_1}}\right) = \begin{cases} -1, & \text{при } k=1, \\ \frac{k-1}{d-k+1}, & \text{при } k>1. \end{cases} \tag{13}$$

Теперь оценим отношение $\frac{L_k(\boldsymbol{\tau})}{|\boldsymbol{\tau}|_+}$ снизу. Так как $\tau_{i_1} \geq \tau_{i_k}$ из условий (10), то получим простую нижнюю оценку

$$-1 \leq -\frac{\tau_{i_k}}{\tau_{i_1}} \tag{14}$$

Неравенство (14) выполняется для всех $k \geq 1$. Если $k=d$, то оценку можно улучшить. В таком наборе (τ_{i_j}) первый элемент будет равен τ_{i_1}, а остальные $d-1$ равны τ_{i_d}. Значение S такого набора будет отрицательным. Значит можем записать оценку

$$0 \geq S = \tau_{i_1} + \overbrace{\tau_{i_2}+\dots+\tau_{i_d}}^{d-1} = \tau_{i_1} + (d-1)\tau_{i_d},$$

$$\frac{1}{d-1} \leq -\frac{\tau_{i_d}}{\tau_{i_1}} \tag{15}$$

Равенство в неравенстве (14) достигается, когда набор (τ_{i_j}) имеет вид, где k-ый элемент будут равен τ_{i_1}, а в неравенстве (15), когда набор (τ_{i_j}) имеет вид, где первый элемент будет равен τ_{i_1}, а остальные $d-1$ равны τ_{i_d}.

$$\boldsymbol{\tau_2} = (\tau_{i_1},\overbrace{\tau_{i_d},\dots,\tau_{i_d}}^{d-1})$$

Следовательно, теперь, используя оценки (14) и (15), можем вычислить нижнюю экспоненту $\underline{\psi}_k(\Lambda)$:

$$\underline{\psi}_k(\Lambda) = \liminf_{|\boldsymbol{\tau}|\to\infty} \frac{L_k(\boldsymbol{\tau})}{|\boldsymbol{\tau}|_+} = \liminf_{|\boldsymbol{\tau}|\to\infty} \left(-\frac{\tau_{i_k}}{\tau_{i_1}}\right) = \begin{cases} -1, & \text{при } k<d, \\ \frac{1}{d-1}, & \text{при } k=d. \end{cases} \tag{16}$$

Приступаем к вычислению экспонент второго типа. Сначала мы хотим оценить сумму

$$\sum_{1\leq j\leq k} \frac{L_k(\boldsymbol{\tau})}{|\boldsymbol{\tau}|_+} = \sum_{1\leq j\leq k} \left(-\frac{\tau_{i_j}}{\tau_{i_1}}\right) = -\frac{1}{\tau_{i_1}} \sum_{1\leq j\leq k} \tau_{i_j} = -\frac{1}{\tau_{i_1}}(\tau_{i_1}+\dots+\tau_{i_k}) \tag{17}$$

Воспользуемся уравнением

$$\tau_{i_1} + (\tau_{i_2} + \dots + \tau_{i_k}) + (\tau_{i_{k+1}} + \dots + \tau_{i_d}) = 0 \tag{18}$$

из системы (10). Для нашего удобства введем новые обозначения:

$$\begin{aligned} a &= \tau_{i_1}, \\ b &= \frac{1}{k-1}(\tau_{i_2} + \dots + \tau_{i_k}), \\ c &= \frac{1}{d-k}(\tau_{i_{k+1}} + \dots + \tau_{i_d}). \end{aligned} \tag{19}$$

С учетом (19) перепишем уравнение (18) как

$$a + (k-1)b + (d-k)c = 0, \tag{20}$$

а сумму (17) как

$$-\frac{a + (k-1)b}{a} = \frac{(d-k)c}{a}. \tag{21}$$

Заметим также, что верно неравенство

$$a \geq b \geq c, \tag{22}$$

которое легко выводится из неравенства системы (10). Теперь наша задача в том, чтобы оценить выражение (21) сверху и снизу. Разделив уравнение (20) и неравенство (21) на $-a$, получим систему

$$\begin{cases} (k-1) \cdot \frac{-b}{a} + (d-k) \cdot \frac{-c}{a} = 1 \\ -1 \leq \frac{-b}{a} \leq \frac{-c}{a} \end{cases} \tag{23}$$

Заметим, что из неравенства $-1 \leq \frac{-b}{a}$ следует, что сумма

$$\sum_{1 \leq j \leq k} \left(-\frac{\tau_{i_j}}{\tau_{i_1}} \right) = -\frac{a + (k-1)b}{a} = -1 - \frac{(k-1)b}{a} \geq -1 - (k-1) = -k \tag{24}$$

легко оценивается снизу. В неравенстве (24) равенство достигается тогда, когда набор (τ_{i_j}) имеет такой вид

$$\boldsymbol{\tau_3} = (\underbrace{\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_1}}_{k}, \tau_{i_{k+1}}, \dots, \tau_{i_d}),$$

где первые k элементов будут равны τ_{i_1}. Если $k = d$, то получим равенство

$$\sum_{1 \leq j \leq d} \left(-\frac{\tau_{i_j}}{\tau_{i_1}} \right) = -\frac{1}{\tau_{i_1}}(\tau_{i_1} + \dots + \tau_{i_d}) = 0. \tag{25}$$

Теперь, используя оценки (24) и (25), вычислим нижнюю экспоненту $\underline{\Psi}_k(\Lambda)$:

$$\underline{\Psi}_k(\Lambda) = \liminf_{|\boldsymbol{\tau}|\to\infty} \sum_{1\le j\le k} \frac{L_k(\boldsymbol{\tau})}{|\boldsymbol{\tau}|_+} =$$

$$= \liminf_{|\boldsymbol{\tau}|\to\infty} \sum_{1\le j\le k} \left(-\frac{\tau_{i_j}}{\tau_{i_1}}\right) = \begin{cases} -k, & \text{при } k < d, \\ 0, & \text{при } k = d. \end{cases} \quad (26)$$

В системе (23) посмотрим на неравенство $\frac{-b}{a} \le \frac{-c}{a}$. В нем оценка снизу для $\frac{-c}{a}$ достигается тогда, когда

$$\frac{-c}{a} = \frac{-b}{a} \quad (27)$$

Подставляя выражение (27) в равенство системы (23), получаем

$$\frac{-c}{a} \ge \frac{1}{d-1} \quad (28)$$

Пользуясь неравенством (28), оцениваем сумму сверху

$$\sum_{1\le j\le k} \left(-\frac{\tau_{i_j}}{\tau_{i_1}}\right) = \frac{(d-k)c}{a} \le -\frac{d-k}{d-1}, \quad (29)$$

где равенство достигается на наборе (τ_{i_j}), элементы $\tau_{i_2}, \ldots, \tau_{i_d}$ которого будут равны $-\frac{1}{d-1}\tau_{i_1}$:

$$\boldsymbol{\tau_4} = (\tau_{i_1}, \underbrace{\tau_{i_2}, \ldots, \tau_{i_k}, \tau_{i_{k+1}}, \ldots, \tau_{i_d}}_{d-1})$$

Если $k = 1$, то получим равенство:

$$\sum_{1\le j\le k} \left(-\frac{\tau_{i_j}}{\tau_{i_1}}\right) = -1 \quad (30)$$

Следовательно, используя оценки (31) и (32), вычислим верхнюю экспоненту $\overline{\Psi}_k(\Lambda)$:

$$\overline{\Psi}_k(\Lambda) = \limsup_{|\boldsymbol{\tau}|\to\infty} \sum_{1\le j\le k} \frac{L_k(\boldsymbol{\tau})}{|\boldsymbol{\tau}|_+} = \limsup_{|\boldsymbol{\tau}|\to\infty} \sum_{1\le j\le k} \left(-\frac{\tau_{i_j}}{\tau_{i_1}}\right) =$$

$$= \begin{cases} -1, & \text{если } k = 1, \\ -\frac{d-k}{d-1}, & \text{если } k > 1 \end{cases} \quad (31)$$

Следствие 4.1 *При* $k = 1, \underline{\psi}_k(\Lambda) = \overline{\psi}_k(\Lambda) = \underline{\Psi}_k(\Lambda) = \overline{\Psi}_k(\Lambda) = -1$

5 Заключение и выводы

Для рациональных решеток $\mathbb{Z}^d$ получили явные представления экспонент Шмидта-Суммера.

Список литературы

[1] Oleg N.German. Problems concerning Diophantine exponents of lattices. — M.: 2018.

[2] Oleg N.German. Intermediate Diophantine exponents and parametric geometry of numbers. — M.: 2011.