ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА"

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

Диофантовые свойства неподвижных точек функции Минковского

Выполнил студент
605 группы
Шульга Никита Анатольевич

____

подпись студента

Научный руководитель:
Н.Г. Мощевитин

____

подпись научного руководителя

Москва
2019 г.

1 Введение

Для числа $x \in [0,1]$ мы рассматриваем разложение в обыкновенную цепную дробь

$$x = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots] = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}, \ \ a_j \in \mathbb{Z}_+$$

которое бесконечной длины и определяется единственным образом, когда $x \notin \mathbb{Q}$ и конечной длины для рациональных x. Каждое рациональное x имеет два разложения

$$x = [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n], \quad \text{и} \quad x = [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1, 1], \quad \text{где} \quad a_n \geq 2.$$

Обозначим за

$$\frac{p_k}{q_k} := [a_1, \ldots, a_k]$$

k-ю подходящую дробь к x. За B_n мы обозначаем n-ный уровень дерева Штерна-Броко, то есть

$$B_n := \{x = [a_1, \ldots, a_k] : a_1 + \ldots + a_k = n + 1\}.$$

В [8] Минковский вводит функцию $?(x)$, которая может быть определена как предел функций распределения множеств B_n. Эту функцию переоткрывали и изучали многие авторы (см. [7],[6],[1],[4],[11]). Для рационального или иррационального $x = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ формула

$$?(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{a_1 + \ldots + a_k - 1}} \tag{1}$$

представленная Денжуа [2, 3] и Салемом [13], может быть рассмотрена как одно из эквивалентных определений функции $?(x)$.
Известно, что $?(x)$ - непрерывная строго возрастающая функция, ее производная $?'(x)$ существует почти всюду в $[0,1]$ в смысле меры Лебега, и $?'(x) = 0$ для $x \in \mathbb{Q}$.

Так как $?(x)$ непрерывна и

$$?(0) = 0, \quad ?\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad ?(1) = 1.$$

мы видим, что существует как минимум 2 точки $x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $x_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, такие что

$$?(x_j) = x_j, \quad j = 1, 2.$$

Известная гипотеза состоит в следующем:

Гипотеза 1. *Вопрос-функция Минковского $?(x)$ имеет в точности 5 неподвижных точек. Существует только одна неподвижная точка функции $?(x)$ на интервале $(0, \frac{1}{2})$.*

Это открытая гипотеза (см. препринт Мощевитина [9]). Однако, если существует более одной неподвижной точки на интервале $(0; \frac{1}{2})$, то более чем 4000 первых неполных частных в их разложениях в цепную дробь совпадают. Несмотря на то, что мы не знаем, действительно ли существует всего лишь 2 иррациональные неподвижные точки функции $?(x)$, мы можем кое-что сказать о диофантовых свойствах некоторых из них. В данной работе приводятся явные нижние оценки на меру иррациональности самой маленькой и самой большой неподвижных точек с интервала $(0, \frac{1}{2})$, то есть нижние оценки следующего вида:

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^2 \cdot I(q)} = \frac{1}{q^{2+\delta(q)}}, \quad \delta(q) \geq 0$$

для любых $p, q \in \mathbb{Z}, q \geq q_0$, где зависимость $I(q)$ от q явная и q_0 задано. Обычно, минимум $\inf_{q \in \mathbb{Z}_+}(2 + \delta(q))$ называют мерой(или экспонентой) иррациональности числа x.

2 Основные результаты

Первый результат задает ограничение на относительный рост неполных частных некоторых неподвижных точек функции $?(x)$.

Теорема 1. *Пусть* $x = [a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ *- самая маленькая или самая большая неподвижная точка функции Минковского на интервале* $(0, \frac{1}{2})$. *Тогда* $a_1 = 2$ *и*

$$a_{n+1} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{2}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство Теоремы 1 дано в Главе 4. Следующая теорема есть усиление Теоремы 1, однако для доказательства используется другие соображения.

Теорема 2. *Обозначим* $\kappa_1 = 2\log_2(\frac{\sqrt{5}+1}{2}) - 1 \approx 0.38848383\ldots$. *Пусть* x *- неподвижная точка из Теоремы 1, тогда*

$$a_{n+1} < \kappa_1 \sum_{i=1}^{n} a_i + 2\log_2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \tag{3}$$

для всех $n \geq 1$.

Формула (3) дает явную оценку меры иррациональности для рассматриваемых неподвижных точек.

Теорема 3. *Пусть* x *- неподвижная точка из Теоремы 1, тогда*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{\left(\frac{2\kappa_1}{\log 2} \log q + O(\log\log q) \right) q^2}$$

для всех $q > q_0 \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}$.

Доказательство Теоремы 3 дано в Главе 6. Явный вид члена $O(\log\log q)$ также приведен.

Следующее утверждение сводит гипотезу о неподвижных точках функции $?(x)$ к свойствам значений $?(x)$ в рациональных точках.

Теорема 4. *Если неравенство*

$$\left| ?\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{2q^2} \tag{4}$$

выполнено для всех $p, q \in \mathbb{Z}, q > q_0$, *то Гипотеза 1 верна.*

Мы доказываем Теорему 4 в Приложении.

3 Вспомогательные утверждения

Через F_k мы обозначаем k-е число Фибоначчи, то есть

$$F_0 = F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

Лемма 3.1. *Пусть* $?([a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}]) = [b_1, b_2, \ldots, b_k]$ *и* $\sum_{i=1}^{n-1} a_i = s + 1 > 2$, *тогда* $\sum_{i=1}^{k} b_i > s + 1$.

Доказательство. Приводя (1) к общему знаменателю, мы получаем

$$?([a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}]) = \frac{2^{a_2+\ldots+a_{n-1}} - 2^{a_3+\ldots+a_{n-1}} + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot 2^{a_{n-1}} + (-1)^n}{2^{\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i - 1}}. \tag{5}$$

Знаменатель данной дроби равен 2^s, а числитель есть нечетное число, значит дробь несократимая. Рассмотрим уровень B_s дерева Штерна-Броко, который содержит число $[a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}]$. Наибольший знаменатель на этом уровне равен F_{s+2}. Мы знаем, что для любого $s > 2$ выполнено $F_{s+2} < 2^s$. Следовательно, образ числа $[a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}]$, заданный формулой (5), принадлежит уровню B_{s+k} для некоторого $k \geq 1$, так как знаменатель образа больше чем максимальный знаменатель на уровне B_s. □

Следствие 3.1. *У функции Минковского существует в точности 3 рациональные неподвижные точки:* 0, $\frac{1}{2}$ *и* 1.

Доказательство. Мы знаем, что $F_{s+2} = 2^s$ только для $s = 0, 1$, то есть для чисел с 0-го и 1-го уровней дерева Штерна-Броко, на которых находятся лишь числа $0, \frac{1}{2}$ и 1. Для любого другого рационального числа, сумма неполных частных увеличивается под действием функции $?(x)$, а значит число переводится не в себя. □

Следующая лемма о значениях функции Минковского в рациональных точках связана с утверждением, известным как "Folding lemma"(see [12]).

Лемма 3.2. *Пусть s - произвольное неотрицательное целое число и*

$$?([a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}]) = [b_1,b_2,\ldots,b_k], \;\; b_k \neq 1.$$

Рассмотрим число

$$\theta = [a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n], \;\; \textit{где } a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + s.$$

Тогда

1. *Если $n \equiv k (mod\ 2)$, то* $?(\theta) = [b_1,b_2,\ldots,b_{k-1},b_k-1,1,2^{s+1}-1,b_k,\ldots,b_1]$.
2. *Если $n \equiv k+1 (mod\ 2)$ то* $?(\theta) = [b_1,b_2,\ldots,b_k,2^{s+1}-1,1,b_k-1,b_{k-1},\ldots,b_1]$.

Доказательство. Мы знаем, что $b_k \neq 1$. Выберем одно из представлений $\frac{p_l}{q_l} = [b_1,b_2,\ldots,b_k]$ или $\frac{p_l}{q_l} = [b_1,b_2,\ldots,b_k-1,1]$ таким образом, чтобы длина l разложения в цепную дробь была бы той же четности, что и $n+1$, то есть $l \equiv n+1 \pmod 2$, и $l = k$ или $l = k+1$. Из (5) мы знаем что $q_l = 2^{\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i - 1}$.
Без ограничения общности, предположим, что $n \equiv k+1 \pmod 2$, тогда

$$?(\theta) = ?([a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}]) + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i - 1 + s}} = \frac{p_l}{q_l} + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{s+1}\cdot q_l^2} = \frac{p_l}{q_l} + \frac{(-1)^l}{2^{s+1}\cdot q_l^2} = \frac{p_l q_l 2^{s+1} - (p_l q_{l-1} - q_l p_{l-1})}{2^{s+1} q_l^2} =$$

$$= \frac{p_l(2^{s+1} - \frac{q_{l-1}}{q_l}) + p_{l-1}}{q_l(2^{s+1} - \frac{q_{l-1}}{q_l}) + q_{l-1}} = [b_1,b_2,\ldots,b_k,2^{s+1} - \frac{q_{l-1}}{q_l}] = [b_1,b_2,\ldots,b_k,2^{s+1}-1,1,b_k-1,b_{k-1},\ldots,b_1].$$

В последнем равенстве мы использовали $-x = 0 + \cfrac{1}{-1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x-1}}}$. □

Замечание 1. Х.Нидеррейтер в [10] доказал, что если m - это число вида 2^k, то существует нечетное целое число a, такое что $1 \leq a \leq m$ и все неполные частные в разложении числа a/m в цепную дробь, ограничены числом 3. Оказывается, он брал итерации функции Минковского в рациональных точках специального вида, у которых каждое неполное частное равно сумме всех предыдущих или сумме всех предыдущих плюс 1.

Лемма 3.3. *Пусть $a_1, \dots, a_{n-1}$ - первые $(n-1)$ неполных частных неподвижной точки x, тогда, в зависимости от четности n, следующее неполное частное a_n удовлетворяет одной из следующих систем*

1. *Если n четно, то a_n удовлетворяет* $\begin{cases} [a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] <?([a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1]), \\ [a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1] >?([a_1, \dots, a_{n-1}, a_n]). \end{cases}$

2. *Если n нечетно, то a_n удовлетворяет* $\begin{cases} [a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] >?([a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1]), \\ [a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1] <?([a_1, \dots, a_{n-1}, a_n]). \end{cases}$

Доказательство. Пусть $x = [a_1, \dots, a_n, \dots]$ - это неподвижная точка. Покажем случай 1).
Так как n четное число, то из теории цепных дробей мы знаем, что

$$[a_1, \dots, a_n] < [a_1, \dots, a_n, \dots] < [a_1, \dots, a_n + 1].$$

То есть мы получили, что $[a_1, \dots, a_n]$ и $[a_1, \dots, a_n + 1]$ лежат по разные стороны относительно x, а значит и их образы лежат по разные стороны, и мы имеем

$$\begin{cases} [a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] <?([a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1]), \\ [a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1] >?([a_1, \dots, a_{n-1}, a_n]). \end{cases}$$

Случай 2) рассматривается аналогичным образом, так как для нечетного n мы имеем

$$[a_1, \dots, a_n + 1] < [a_1, \dots, a_n, \dots] < [a_1, \dots, a_n].$$

□

Следующая лемма локализует неподвижные точки.

Лемма 3.4. *Все неподвижные точки функции $?(x)$ с интервала $(0, \frac{1}{2})$ принадлежат интервалу $(\frac{2}{5}, \frac{3}{7})$*

Доказательство. Для начала покажем, что не существует неподвижных точек на интервале $(0, \frac{1}{3})$. Разложим интервал $(0, \frac{1}{3})$ в объединение подынтервалов $(0, \frac{1}{3}) \setminus \mathbb{Q} = \bigcup\limits_{n=3}^{\infty} (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \setminus \mathbb{Q}$. Предположим, что для некоторого n_0 существует $x_0 \in (\frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0})$, такое что $?(x_0) = x_0$. Тогда

$$\frac{1}{n_0+1} < x_0 =?(x_0) <? \left(\frac{1}{n_0}\right) = \frac{1}{2^{n_0-1}}.$$

То есть $n_0 + 1 > 2^{n_0+1}$, что неверно для $\forall n_0 \geq 3$.
Это означает, что первое неполное частное равно 2. (1 исключается, так как мы находимся на интервале $(0, \frac{1}{2})$).

Теперь следует показать, что не существует неподвижных точек на интервале $(\frac{4}{9}, \frac{1}{2})$. Рассмотрим разложение $(\frac{4}{9}, \frac{1}{2}) \setminus \mathbb{Q} = \bigcup\limits_{n=4}^{\infty} (\frac{n}{2n+1}, \frac{n+1}{2n+3}) \setminus \mathbb{Q}$. Предположим, что для некоторого n_0 существует $x \in (\frac{n_0}{2n_0+1}, \frac{n_0+1}{2n_0+3})$, такое что $?(x) = x$.

$$\frac{n_0+1}{2n_0+3} > x_0 =?(x_0) >? \left(\frac{n_0}{2n_0+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{1+n_0}}.$$

Получили, что $2^{n_0} < 2n_0 + 3$, что выполнено только при $n_0 = 1, 2, 3$.

Для того, чтобы показать, что не существует неподвижных точек на интервалах $(\frac{1}{3}, \frac{2}{5})$ и $(\frac{3}{7}, \frac{4}{9})$, заметим, что $?(?(\frac{2}{5})) =?(\frac{3}{8}) = \frac{5}{16} < \frac{1}{3}$ и $?(?(\frac{3}{7})) =?(\frac{7}{16}) = \frac{29}{64} > \frac{4}{9}$. □

Лемма 3.4 означает, что все неподвижные точки функции $?(x)$ с интервала $(0, \frac{1}{2})$ имеют вид $[2, 2, \dots]$. Следующее утверждение является очевидным свойством непрерывных функций. Приводим его без доказательства.

Лемма 3.5. *Пусть $f(x)$ - это непрерывная функция. Рассмотрим отрезок $[a, b]$, такой что внутри (a, b) нет неподвижных точек функции $f(x)$. Тогда $f(x) - x$ не меняет знак на (a, b).*

4 Доказательство Теоремы 1

Рассмотрим случай самой левой неподвижной точки функции $?(x)$ на интервале $(0, \frac{1}{2})$. Обозначим ее за $x = [a_1, \ldots, a_n, \ldots]$. Будет доказывать от противного. Предположим, что существует $n \geq 3$, такое что

$$a_n \geq \sum_{i=1}^{n-1} a_i. \tag{6}$$

Рассмотрим $[a_1, \ldots, a_{n-1}]$ и пусть $?([a_1, \ldots, a_{n-1}]) = [b_1, \ldots, b_k], b_k \neq 1$. Теперь рассмотрим случаи 1) - 4) и несколько подслучаев. В каждом из случаев мы придем к противоречию. Случай 1) рассмотрим детально. Случаи 2) - 4) сильно похожи на случай 1), поэтому мы будем опускать некоторые подробности.
1) n - нечетное, k - нечетное. Тогда по Лемме 3.2, $?([a_1, a_2, \ldots, a_n]) = [b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}, b_k - 1, 1, 2^{s+1} - 1, b_k, \ldots, b_1]$. По Лемме 3.3 a_n должно удовлетворять

$$\begin{cases} [a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] > ?([a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1]) = [b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}, b_k - 1, 1, 2^{s+2} - 1, b_k, \ldots, b_1], \\ [a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1] < ?([a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n]) = [b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}, b_k - 1, 1, 2^{s+1} - 1, b_k, \ldots, b_1]. \end{cases} \tag{7}$$

Теперь рассмотрим 3 подслучая.
1.1) $k \leq n - 1$. Тогда по Лемме 3.1 мы имеем $\sum_{i=1}^{k} b_i > \sum_{i=1}^{n-1} a_i$, значит существует $i \in \{1, \ldots, k\}$, такое что $a_i \neq b_i$. Если мы рассмотрим неполное частное с наименьшим индексом $i \leq k$, для которого $a_i \neq b_i$, мы получим, что система (7) несовместна по правилам сравнения цепных дробей.
1.2) $k > n$. Если существует $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, такое что $a_i \neq b_i$, тогда аналогично случаю 1.1) система (7) несовместна. Значит предполагаем, что для всех $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ выполнено $a_i = b_i$.
Рассмотрим 4 варианта.
1.2.1) $b_n \leq a_n - 1$. Первое неравенство в (7) может быть переписано как

$$[a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] > [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, b_n, \ldots, b_{k-1}, b_k - 1, 1, 2^{s+2} - 1, b_k, \ldots, b_1]. \tag{8}$$

Но n - нечетное число и $b_n \leq a_n - 1$. Значит (8) не может выполняться.
1.2.2) $b_n \geq a_n + 2$. Второе неравенство в (7) может быть переписано как

$$[a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1] < [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, b_n, \ldots, b_{k-1}, b_k - 1, 1, 2^{s+1} - 1, b_k, \ldots, b_1]. \tag{9}$$

Но n - нечетное число $b_n \geq a_n + 2$. Значит (9) не может выполняться.
1.2.3) $b_n = a_n + 1$. Перепишем систему (7) в соответствии с предположениями данного случая в виде

$$\begin{cases} [a_1, \ldots, a_n] > ?([a_1, \ldots, a_n + 1]) = [a_1, \ldots, a_n + 1, b_{n+1}, \ldots, b_{k-1}, b_k - 1, 1, 2^{s+2} - 1, b_k, \ldots, a_1], \\ [a_1, \ldots, a_n + 1] < ?([a_1, \ldots, a_n]) = [a_1, \ldots, a_n + 1, b_{n+1}, \ldots, b_{k-1}, b_k - 1, 1, 2^{s+1} - 1, b_k, \ldots, a_1]. \end{cases}$$

Второе неравенство не выполняется, так как значение цепной дроби всегда меньше чем ее нечетная подходящая дробь.
1.2.4) $b_n = a_n$. Теперь равенство $?([a_1, \ldots, a_{n-1}]) = [b_1, \ldots, b_k]$ дает нам

$$?([a_1, \ldots, a_{n-1}]) = [a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots, b_k] > [a_1, \ldots, a_{n-1}].$$

Последнее неравенство выполняется из-за того что n нечетно. Но $[a_1, \ldots, a_{n-1}] < x$ - это тоже подходящая дробь к x. Поэтому

$$[a_1, \ldots, a_{n-1}] < ?([a_1, \ldots, a_{n-1}]) < [a_1, \ldots, a_n, \ldots] = x.$$

Покажем, что это противоречит Лемме 3.5. Действительно, по Лемме 3.3 не существует неподвижных точек на интервале $(0, \frac{1}{3})$, а значит $x > \frac{1}{3}$. Рассмотрим отрезок $[0, x]$. Он удовлетворяет условиям Леммы 3.5 и для числа $\frac{1}{4}$ выполнено $?(\frac{1}{4}) = \frac{1}{8} < 1/4$. Следовательно, по Лемме 3.5 неравенство $?(y) < y$ выполнено для всех $y \in (0, x)$, но мы построили число $y = [a_1, \ldots, a_{n-1}] \in (0, x)$ для которого $?(y) > y$.

1.3) $k = n$. Аналогично случаю 1.2) мы получаем $a_i = b_i$ для всех $i = 1, \ldots, n-1$. Рассмотрим 4 подслучая.
1.3.1) $b_n \leq a_n$. В этом случае мы получаем противоречие аналогично случаю 1.2.1)
1.3.2) $b_n \geq a_n + 3$. В этом случае мы получаем противоречие аналогично случаю 1.2.2)
1.3.3) $b_n = a_n + 1$. Равенство $?([a_1, \ldots, a_{n-1}]) = [b_1, \ldots, b_k]$ под предположениями данного случае дает нам

$$?([a_1, \ldots, a_{n-1}]) = [a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1] > [a_1, \ldots, a_{n-1}].$$

Это противоречит Лемме 3.5 так же, как и в случае 1.2.4).
1.3.4) $b_n = a_n + 2$. Система (7) дает нам

$$\begin{cases}[a_1, \ldots, a_n] > [a_1, \ldots, a_n + 1, 1, 2^{s+2} - 1, a_n, \ldots, a_1],\\ [a_1, \ldots, a_n + 1] < [a_1, \ldots, a_n + 1, 1, 2^{s+1} - 1, a_n, \ldots, a_1].\end{cases}$$

Второе неравенство не выполняется, так как нечетная подходящая дробь всегда больше чем значение цепной дроби.

2) n - четное, k - четное. Тогда по Лемме 3.2 $?([a_1, a_2, \ldots, a_n]) = [b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}, b_k - 1, 1, 2^{s+1} - 1, b_k, \ldots, b_1]$.
По Лемме 3.3 a_n должно удовлетворять

$$\begin{cases}[a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] <?([a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1]) = [b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}, b_k - 1, 1, 2^{s+2} - 1, b_k, \ldots, b_1],\\ [a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1] >?([a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n]) = [b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}, b_k - 1, 1, 2^{s+1} - 1, b_k, \ldots, b_1].\end{cases} \tag{10}$$

Как и раньше, мы рассматриваем 3 случая
2.1) $k \leq n - 1$. В данном случае мы получаем противоречие аналогично случаю 1.1)
2.2) $k > n$. Так же, как и в случае 1.2), рассматриваем 4 варианта
2.2.1) $b_n \leq a_n - 1$. В этом случае мы получаем противоречие аналогично случаю 1.2.1)
2.2.2) $b_n \geq a_n + 2$. В этом случае мы получаем противоречие аналогично случаю 1.2.2)
2.2.3) $b_n = a_n + 1$. Тогда система (10) может быть переписано как

$$\begin{cases}[a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] <?([a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1]) = [a_1, \ldots, a_n + 1, b_{n+1}, \ldots, b_{k-1}, b_k - 1, 1, 2^{s+2} - 1, b_k, \ldots, a_1],\\ [a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1] >?([a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n]) = [a_1, \ldots, a_n + 1, b_{n+1}, \ldots, b_{k-1}, b_k - 1, 1, 2^{s+1} - 1, b_k, \ldots, a_1].\end{cases}$$

Второе неравенство не выполняется, так как четная подходящая дробь всего меньше чем значение цепной дроби.
2.2.4) $b_n = a_n$. Рассмотрим четную подходящую дробь $[a_1, \ldots, a_n]$ нашей неподвижной точки, а точнее ее образ под функцией Минковского. Учитывая предположения и используя Лемму 3.2, мы получаем
$?([a_1, \ldots, a_n]) = [a_1, \ldots, a_n, b_{n+1}, \ldots, b_k - 1, 1, 2^{s+1} - 1, b_k, \ldots, a_1] > [a_1, \ldots, a_n]$. Получаем противоречие аналогично случаю 1.2.4), так как мы нашли число, меньшее чем *самая маленькая* неподвижная точка, такое что образ получился больше самого числа.
2.3) $k = n$. Аналогично случаю 1.2) мы приходим к предположению, что для всех $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ $a_i = b_i$ и теперь рассматриваем 4 случая
2.3.1) $b_n \leq a_n$. В этом случае мы получаем противоречие аналогично случаю 1.2.1)
2.3.2) $b_n \geq a_n + 3$. В этом случае мы получаем противоречие аналогично случаю 1.2.2)
2.3.3) $b_n = a_n + 1$. Имеем $?([a_1, \ldots, a_n]) = [a_1, \ldots, a_n, 1, 2^{s+1} - 1, a_n, \ldots, a_1] > [a_1, \ldots, a_n]$. Теперь мы получаем противоречие так же, как в случае 1.2.4).
2.3.4) $b_n = a_n + 2$. Переписывая систему (10) в наших предположениях, мы получаем

$$\begin{cases}[a_1, \ldots, a_n] < [a_1, \ldots, a_n + 1, 1, 2^{s+2} - 1, a_n, \ldots, a_1],\\ [a_1, \ldots, a_n + 1] > [a_1, \ldots, a_n + 1, 1, 2^{s+1} - 1, a_n, \ldots, a_1].\end{cases}$$

Второе неравенство не выполняется, так как четная подходящая дробь всегда меньше чем значение цепной дроби.

Случаи
$$3)\ n-\text{четное},\ k-\ \text{нечетное} \qquad \text{и} \qquad 4)\ n-\ \text{нечетное},\ k-\text{четное}$$
рассматриваются похожим образом. Например, в случае 3) по Лемме 3.2,
$$?([a_1, a_2, \ldots, a_n]) = [b_1, \ldots, b_k, 2^{s+1}-1, 1, b_k - 1, b_{k-1}, \ldots, b_1].$$
По Лемме 3.3, a_n удовлетворяет
$$\begin{cases} [a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] < [b_1, \ldots, b_k, 2^{s+2}-1, 1, b_k - 1, b_{k-1}, \ldots, b_1], \\ [a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1] > [b_1, \ldots, b_k, 2^{s+1}-1, 1, b_k - 1, b_{k-1}, \ldots, b_1], \end{cases}$$
и нам надо рассмотреть только 2 подслучая (случай $n = k$ невозможен, так как четность n и k различна)
$$3.1)\, k \leq n-1 \qquad\qquad \text{и} \qquad\qquad 3.2)\, k > n. \tag{11}$$
В случае 3.2), аналогично случаю 1.2), мы
$$3.2.1)\, b_n = a_n + 1, \qquad 3.2.2)\, b_n = a_n, \qquad 3.2.3)\, b_n \leq a_n - 1, \qquad 3.2.4)\, b_n \geq a_n + 2. \tag{12}$$
В каждом случае мы получим противоречие.
В случае 4) мы имеет по Лемме 3.2
$$?([a_1, a_2, \ldots, a_n]) = [b_1, \ldots, b_k, 2^{s+1}-1, 1, b_k - 1, b_{k-1}, \ldots, b_1],$$
и по Лемме 3.3, a_n удовлетворяет
$$\begin{cases} [a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] > [b_1, \ldots, b_k, 2^{s+2}-1, 1, b_k - 1, b_{k-1}, \ldots, b_1], \\ [a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1] < [b_1, \ldots, b_k, 2^{s+1}-1, 1, b_k - 1, b_{k-1}, \ldots, b_1]. \end{cases}$$
Теперь рассмотрим такие же подслучаи как и в (11), а второй подслучай разобьем на варианты как в (12). Мы исчерпали все возможные варианты, получив противоречие в каждом из них, а значит предположение (6) было ложным. □

Замечание 2. Чтобы доказать Теорему 1 для самой большой неподвижной точки y, мы должны рассмотреть отрезок $[y, \frac{1}{2}]$ и число $\frac{3}{7}$, которое принадлежит этому отрезку (по Лемме 3.4), чтобы получить противоречие, используя Лемму 3.5.
Замечание 3. Можно заметить, что аналог Теоремы 1 можно обобщить со случая самой маленькой и самой большой неподвижной точки на любую неподвижную точку x, изолированную и нестабильную хотя бы с одной стороны.
Например, x является изолированной и нестабильной слева тогда и только тогда, когда
$$\exists \varepsilon > 0 : \forall y \in (x-\varepsilon, x) \ \text{ выполнено } \ |y - x| < |?(y) - x|.$$
Для изолированной и неподвижной точки вместо Теоремы 1 можно показать, что неравенство (2) выполнено для всех достаточно больших n.

5 Доказательство Теоремы 2

Рассмотрим произвольную цепную дробь $[a_1, \ldots, a_n, \ldots]$. Обозначим $S_n = a_1 + \ldots + a_n$. Нам понадобится следующая лемма из ([5], Теорема 4).

Лемма 5.1. *Обозначим* $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. *Для любого* $n \in \mathbb{N}$ *имеем*

$$q_n \leq F_{S_n+1} \leq \varphi^{S_n}. \tag{13}$$

Теперь мы готовы доказать Теорему 2. Мы рассмотрим только случай самой маленькой неподвижной точки на интервале $(0, \frac{1}{2})$. Случай самой большой неподвижной точки рассматривается аналогичным образом.

Доказательство. Для начала, заметим, что Теорема 2 выполнена при $n < 36$, так как мы знаем первые 36 неполных частных числа x. Последовательность неполных частных есть в OEIS A058914. Пусть n - четное число. Тогда по Лемме 3.5 мы имеем $?(\frac{p_n}{q_n}) < \frac{p_n}{q_n} < x = x$. Значит

$$\frac{1}{(a_{n+1}+1)q_n^2} < x - \frac{p_n}{q_n} < ?(x) - ?\left(\frac{p_n}{q_n}\right) < ?\left(\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right) - ?\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \frac{1}{2^{S_n+a_{n+1}-1}}. \tag{14}$$

Получили неравенство

$$\frac{(a_{n+1}+1)q_n^2}{2^{S_n+a_{n+1}-1}} > 1. \tag{15}$$

Предположим, что $a_{n+1} \geq \kappa_1 S_n + 2\log_2 S_n$. Применим верхнюю оценку из Леммы 5.1 и используем тот факт, что $\frac{x}{2^x}$ есть строго убывающая функция при $x \geq 4$.

$$1 < \frac{(a_n+1)q_n^2}{2^{S_n+a_{n+1}-1}} < \frac{(\kappa_1 S_n + 2\log_2 S_n + 1)\varphi^{2S_n}}{2^{S_n(\kappa_1+1)+2\log_2 S_n - 1}} < \frac{2(\kappa_1 S_n + 2\log_2 S_n + 1)}{S_n^2}. \tag{16}$$

Можно легко заметить, что

$$\frac{2(\kappa S_n + 2\log_2 S_n + 1)}{S_n^2} < 1$$

при $S_n \geq 4$. Получили противоречие.

Случай когда n - нечетное число немного сложнее. Теперь мы имеем $?(\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}) < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} < x = x$. Используя те же соображения, получаем, что

$$\frac{(a_{n+2}+1)q_{n+1}^2}{2^{S_n+a_{n+1}+a_{n+2}-1}} > 1.$$

Так как $q_{n+1} < (a_{n+1}+1)q_n$ и $\frac{a_{n+2}+1}{2^{a_{n+2}}} \leq 1$,

$$\frac{(a_{n+1}+1)^2 q_n^2}{2^{S_n+a_{n+1}-1}} > 1. \tag{17}$$

Предположим что $a_{n+1} \geq \kappa_1 S_n + 2\log_2 S_n$. Тогда, как и в предыдущем случае, применим Лемму 5.1 и используем тот факт, что $\frac{x^2}{2^x}$ строго убывающая функция при $x \geq 7$. Имеем

$$1 < \frac{(a_n+1)^2 q_n^2}{2^{S_n+a_{n+1}-1}} < \frac{(\kappa S_n + 2\log_2 S_n + 1)^2 \varphi^{2S_n}}{2^{S_n(\kappa+1)+2\log_2 S_n - 1}} < \frac{2(\kappa S_n + 2\log_2 S_n + 1)^2}{S_n^2}. \tag{18}$$

Из (18) получаем

$$\kappa_1 + \frac{2\log_2 S_n}{S_n} + \frac{1}{S_n} > \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{19}$$

Но неравенство (19) не выполняется для $S_n \geq 36$, а значит мы получили противоречие. $\square$

Замечание 4. Вообще говоря, можно доказать более сильное утверждение, а именно

$$a_{n+1} + \ldots + a_{n+k} < \kappa_1 S_n + 2k\log_2 S_n.$$

Из (17) мы знаем что $\forall n$

$$\frac{(a_{n+1}+1)^2 q_n^2}{2^{S_n+a_{n+1}-1}} > 1.$$

Рассмотрим это неравенство для $n = m + k - 1$:

$$\frac{(a_{m+k}+1)^2 q_{m+k-1}^2}{2^{S_{m+k}-1}} > 1. \tag{20}$$

Оценим левую часть неравенства (20):

$$1 < \frac{(a_{m+k}+1)^2 q_{m+k-1}^2}{2^{S_{m+k}-1}} < \frac{2(a_{m+k}+1)^2 \cdot \ldots \cdot (a_{m+1}+1)^2 q_m^2}{2^{S_m + a_{m+1} + \ldots + a_{m+k}}}.$$

Предполагая, что $a_{m+1}+\ldots+a_{m+k} \geq \kappa_1 S_m + 2k \log_2 S_m$ и применяя соображения, аналогичные доказательству Теоремы 2, мы получим

$$\frac{\kappa_1}{k} + 2\frac{\log_2 S_m}{S_m} + \frac{1}{S_m} > \frac{1}{2^{1/(2k)}},$$

и это неравенство не выполняется для любого $k \geq 1$ когда $S_n \geq 36$.

Замечание 5. Теорема 2 дает (неоптимальную) верхнюю оценку на неполные частные числа x. Однако, их поведение в среднем намного проще. Обозначим

$$\lambda_i = \frac{i + \sqrt{i^2+4}}{2}, \quad \kappa_2 = \frac{5 \log \lambda_4 - 4 \log \lambda_5}{0.5 \log 2 + \log \lambda_4 - \log \lambda_5} \approx 4.40104874\ldots \tag{21}$$

В [4] Душистова, Мощевитин и Кан доказали, что

Лемма 5.2 ([4], Theorem 3)**.** *Пусть для иррационального числа x существует константа C, такая что для любого натурального t выполнено*

$$S_x(t) \geq \kappa_2 t - C.$$

Тогда $?'(x)$ существует и равна 0.

Тот факт, что $?(x-\delta) < x - \delta$ для любого положительного δ влечет в нашем случае $S_x(t) < \kappa_2 t - C$ при некотором C. Простыми вычислениями, можно показать, что можно взять $C = 0$. Теперь имеем следующее очевидное следствие из Теоремы 2 и Леммы 5.2.

Следствие 5.1. *Пусть x - неподвижная точка из Теоремы 1, тогда*

$$a_{n+1} < \kappa_1 \kappa_2 n + 2\log_2(\kappa_2 n) \tag{22}$$

для всех $n \geq 2$.

6 Доказательство Теоремы 3

Доказательство. Из (15) и (17) имеем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\frac{(a_{n+1}+1)^2 q_n^2}{2^{S_n + a_{n+1} - 1}} > 1. \tag{23}$$

Так как $\frac{(a_{n+1}+1)^2}{2^{a_{n+1}-1}} \leq \frac{9}{2}$, мы имеем

$$\frac{2}{9} 2^{S_n} < q_n^2$$

или

$$S_n < \frac{2}{\log 2} \log q_n + \log_2 \frac{9}{2}.$$

Так как $a_{n+1} < \kappa_1 S_n + 2\log_2 S_n$, имеем

$$a_{n+1} < \kappa_1 \left(\frac{2}{\log 2} \log q_n + \log_2 \frac{9}{2} \right) + \frac{2}{\log 2} \log \left(\frac{2}{\log 2} \log q_n + \log_2 \frac{9}{2} \right).$$

Рассмотрим произвольную подходящую дробь к x. Из того что

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|>\frac{1}{(a_{n+1}+1)q_n^2},$$

мы получаем

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|>\frac{1}{\left(\kappa_1\left(\frac{2}{\log 2}\log q_n+\log_2\frac{9}{2}\right)+\frac{2}{\log 2}\log\left(\frac{2}{\log 2}\log q_n+\log_2\frac{9}{2}\right)+1\right)q_n^2}.$$

□

Приложение

Доказательство. Предположим, что существует как минимум две неподвижные точки на интервале $(0,\frac{1}{2})$, которые обозначим за x_1 и x_1'. Рассмотрим произвольное рациональное число $\frac{p}{q}$ между ними. Заметим, что последовательность итераций $z_n=\underbrace{?(?(\ldots?}_{n \text{ iterations}}(\frac{p}{q})\ldots))$ монотонна и сходится к некоторой неподвижной точке на отрезке $[x_1,x_1']$. Предположим, что эта последовательность убывает. Обозначим ее предел $\lim\limits_{n\to\infty}z_n$ за x_1'', который может совпадать с x_1. Обозначим n-ную подходящую дробь к числу x_1'' через $\frac{p_n}{q_n}$. Существует натуральное N, такое что $\forall n>N$ выполнено $x_1''<\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}<\frac{p}{q}$. Так как $?(\frac{p}{q})<\frac{p}{q}$, то по Лемме 3.5, мы имеем $x_1''<?(\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}})<\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$ для всех $n>N$. Значит,

$$0<\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}-?\left(\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}\right)<\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}-x_1''<\frac{1}{a_{2n}q_{2n-1}^2}. \tag{24}$$

Заметим, что если последовательность z_n возрастает, то используя те же соображения, мы получим, что $x_1''>\frac{p_{2n}}{q_{2n}}>\frac{p}{q}$ для всех достаточно больших n. Неравенство (24) в таком случае заменится неравенством

$$0<?\left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)-\frac{p_{2n}}{q_{2n}}<x_1''-\frac{p_{2n}}{q_{2n}}<\frac{1}{a_{2n+1}q_{2n}^2}. \tag{25}$$

Закончим доказательство только в случае убывающей последовательности z_n, так как второй случай с этого момента рассматривается аналогично.

Из (24) следует, что если $a_{2n}\geq 2$ выполнено бесконечного много раз при $n>N$, то мы получим противоречие с (4). Значит существует такое число M, что $a_{2n}=1$ для всех $n>M$. Мы знаем, что

$$\frac{1}{q_{2n-1}^2}>\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}-x_1''>?\left(\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}\right)-?(x_1'').$$

Правая часть предыдущего неравенства может быть оценена следующим образом:

$$?\left(\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}\right)-?(x_1'')>\frac{1}{2^{S_{2n-1}+a_{2n}-1}}-\frac{1}{2^{S_{2n-1}+a_{2n}+a_{2n+1}-1}}>\frac{1}{2^{S_{2n-1}+a_{2n}}}.$$

Значит, так как $a_{2n}=1$ для $n>M$, мы получаем

$$\frac{q_{2n-1}^2}{2^{S_{2n-1}+1}}<1. \tag{26}$$

Если существует бесконечно много s, таких что $?\left(\frac{p_{2s}}{q_{2s}}\right)>\frac{p_{2s}}{q_{2s}}$, то имеет место следующая система неравенств для $s>N$:

$$\begin{cases} 0<\frac{p_{2s-1}}{q_{2s-1}}-?\left(\frac{p_{2s-1}}{q_{2s-1}}\right)<\frac{p_{2s-1}}{q_{2s-1}}-x_1'' \\ 0<?\left(\frac{p_{2s}}{q_{2s}}\right)-\frac{p_{2s}}{q_{2s}}<x_1''-\frac{p_{2s}}{q_{2s}} \end{cases}$$

Классическая теорема из теории чисел утверждает, что для любого $s \in \mathbb{N}$ как минимум одно из неравенств $\frac{p_{2s-1}}{q_{2s-1}} - x_1'' < \frac{1}{2q_{2s-1}^2}$ и $x_1'' - \frac{p_{2s}}{q_{2s}} < \frac{1}{2q_{2s}^2}$ выполняется. Следовательно, мы получили противоречие с (4).

Теперь предположим, что для всех достаточно больших n мы имеем $?\left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right) < \frac{p_{2n}}{q_{2n}}$. Тогда из (14) и (15) мы имеем

$$\frac{(a_{2n+1}+1)q_{2n}^2}{2^{S_{2n-1}+a_{2n+1}}} > 1. \tag{27}$$

Из (26) и (27) мы получаем

$$\left(\frac{q_{2n}}{q_{2n-1}}\right)^2 \frac{a_{2n+1}+1}{2^{a_{2n+1}-1}} > 1. \tag{28}$$

Заметим, что

$$\frac{q_{2n}}{q_{2n-1}} = 1 + [a_{2n-1}, a_{2n-2}, a_{2n-2}, \ldots] < 1 + [1, a_{2n-2}, 1, \ldots]. \tag{29}$$

Как мы уже отмечали, $a_{2n} = 1$ for all $n > M$. Значит мы можем оценить правую часть неравенства (29) следующим образом

$$\left(\frac{q_{2n}}{q_{2n-1}}\right)^2 < (\varphi + \varepsilon_n)^2 < 1.62^2 = 2.6244 \quad \text{для достаточно больших } n \; . \tag{30}$$

Здесь ε_n есть некоторая функция, которая экспоненциально стремится к 0 при n стремящемся к бесконечности. Теперь мы видим, что $a_{2n+1} \le 4$, потому что если $a_{2n+1} \ge 5$, то из (29) мы получим

$$\left(\frac{q_{2n}}{q_{2n-1}}\right)^2 \frac{a_{2n+1}+1}{2^{a_{2n+1}-1}} < 2.6244\frac{6}{16} < 1, \tag{31}$$

придя к противоречию. Значит существует число K, такое что для любого $n > K$ выполнено $a_n \le 4$. По ([4], Theorem 3), мы имеем $?'(x_1'') = +\infty$. В силу того, что

$$\frac{?\left(\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}\right) - ?(x_1'')}{\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} - x_1''} < 1$$

для всех $n > N$, мы приходим к противоречию. Это противоречие завершает доказательство. □

Замечание 6. Неравенство (4) было проверено для всех $\frac{p}{q} \in [0, \frac{1}{2}]$ со знаменателями $q < 30000$ и, отдельно, для первых 5400 подходящих дробей к неподвижной точке функции $?(x)$. Единственными контрпримерами, кроме трех тривиальных рациональных неподвижных точек $0, \frac{1}{2}$ и 1, были $\frac{3}{7}$ и $\frac{8}{19}$, причем обе дроби являются подходящими к неподвижной точке. Так что компьютерные вычисления позволяют нам предположить, что неравенство (4) выполняется при всех $q > 19$.

Список литературы

[1] G. Alkauskas, *Integral transforms of the Minkowski question mark function*, PhD thesis, Nottingham 2008.

[2] A. Denjoy, *Sur une fonction réelle de Minkowski*, C. R. Acad. Sci. Paris 194 (1932) 44?46.

[3] A. Denjoy, *Sur une fonction de Minkowski*, J. Math. Pures Appl. 17 (1938), 105-151.

[4] A.A. Dushistova, I.D. Kan, N.G. Moshchevitin, *Differentiability of the Minkowski question mark function*, J. Math. Anal. Appl. 401 (2) (2013), 774?794

[5] I. D. Kan *Methods for estimating continuants* J. Math. Sci. (NY), 182 (4) (2012), pp. 508-517.

[6] M. Kesseböhmer, B. O. Stratmann, *Fractal analysis for sets of non-differentiability of Minkowski's question mark function*, J. Number Theory 128 (2008), 2663-2686.

[7] J. R. Kinney, *Note on a singular function of Minkowski*, Proc. Amer. Math. Soc. 11 (5) (1960), 788-794.

[8] H. Minkowski, *Zur Geometrie der Zahlen*, Verhandlungen des III Internationalen Mathematiker-Kongresous, Heidelberg 1904, 164-173.

[9] N.G. Moshchevitin, *On some open problems in Diophantine approximation*, preprint. arXiv:1202.4539.

[10] H. Niederreiter, *Dyadic fractions with small partial quotients*. Monatsh. Math. 101, 309?315 (1986).

[11] J. Paradís, P. Viader, L. Bibiloni, *A new light on Minkowski's* $?(x)$ *function*, J. Number Theory 73 (2) (1998), 212-227.

[12] A. J. van der Poorten and J. Shallit, *Folded continued fractions*. J. Number Theory, 40:237?250, 1992.

[13] R. Salem, *On some singular monotonic functions which are strictly increasing*, Trans. Amer. Math. Soc. 53 (3) (1943), 427-439.