ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
“МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА”

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА
специалиста

Проблема Борсука в многомерных решетках

Выполнил студент 612 группы
Богачев Тихон Владимирович

____
(подпись студента)

Научный руководитель:
д.ф-м.н., доцент Герман Олег Николаевич

____
(подпись руководителя)

Москва, 2018 г.

Содержание

1. Введение

Комбинаторная геометрия - одна из самых стремительно развивающихся областей современной математики. Задачи замощения и упаковки шаров, многогранники, разбиения исследовались еще Кеплером и Коши, но в самостоятельном ключе комбинаторная геометрия стала формироваться в конце 19-го века. Тогда основное внимание уделялось геометрии чисел Минковского, проблеме четырех раскрасок Гутри, плотности упаковки кругов Акселя Туэ, и т.д.

В целом, комбинаторная геометрия - наука о комбинаторных свойствах геометрических объектов и структур, как правило, дискретных. Среди вопросов, стоящих в этой области, выделяют так называемые метрические задачи, связанные с расстояниями между точками изучаемого геометрического объекта. Такими являются задача Нелсона-Эрдеша-Хадвигера и задача Борсука.

Проблема Борсука была сформулирована в 1933 году в знаменитой работе К. Борсука [1], содержащей также теорему Борсука-Улама, для произвольного ограниченного неодноточечного множества $V \subset \mathbb{R}^n$. Определим диаметр этого множества как

$$diam(V) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{a,b \in V} \rho(a,b), \text{ где } \rho \text{ - метрика в пространстве.}$$

Ограниченность множества подразумевает, что такое число существует. Гипотеза Борсука есть следующий вопрос: всегда ли можно такое множество разбить на $n+1$ часть строго меньшего, чем $diam(V)$, диаметра? Эта гипотеза оставалась неразрешенной до 1992 года, когда Калай и Кан [3] доказали ложность предположения, представив контрпример к нему в размерности 1325 и выше. До этого была показана верность гипотезы в размерностях $1, 2, 3$. В 1997 году А. М. Райгородский [2] представил контрпример в размерности $n = 561$, обобщаемый на все размерности, большие чем 561. В 2003 году

А.Хинрихс, Х.Рихтер [4] получили результат, который показывает, что гипотеза неверна для всех $n \geq 298$. В 2013 году А. В. Бондаренко [5] доказал, что в размерности 65 существует двухдистанционное множество (то есть множество, внутри которого есть только два различных расстояния), которое не разбиваются на 66 частей меньшего диаметра. Более того, было доказано, что минимальное количество частей - 84. После этого был представлен пример множества в пространстве размерности 64, которое нельзя разбить на меньшее, чем 71, число частей меньшего диаметра. На данный момент это лучший контрпример для гипотезы Борсука в $\mathbb{R}^n$. До сих пор открыт вопрос о верности предположения в размерностях от 4 до 63.

В задаче Нелсона-Эрдеша-Хадвигера изучается так называемое *хроматическое число пространства* $\chi(a)$ - количество цветов, в которые можно раскрасить все его точки, чтобы между точками одного цвета не было заданного расстояния a. Нахождение этого числа на настоящее время почти невыполнимо, даже для плоскости известно лишь, что оно не менее 4 и не более 7, а в 2018 году математик-любитель Обри ди Грей представил конструкцию из 1567 вершин на плоскости, которую невозможно раскрасить в 4 цвета так, чтобы расстояние 1 не было реализовано между вершинами одного цвета. Тем самым хроматическое число плоскости заведомо не менее 5.

Часть специалистов изучала эти проблемы не во всем евклидовом пространстве, а в булевом кубе. Специфика постановки в булевом кубе состоит в том, что все множества дискретны и конечны, в качестве метрики может рассматриваться как стандартная евклидова, так и метрика Хэмминга (количество различных координат у двух точек), поскольку разность i-ых координат у двух разных точек может быть только 1 или 0. Более того, в случае плоскости мы можем рассматривать множества диаметра 1, хроматические числа для расстояния 1, и т.д., поскольку плоскость можно гомотетией перевести саму в себя. Для куба же мы должны рассматривать разбиение с учетом конкретного расстояния - раскраска куба или его подмножества с "запретным" числом 1 не равносильна раскраске для числа $\sqrt{2}$. В булевом кубе получен [6] утвердительный ответ на вопрос Борсука во всех размерностях до 9 включительно, то есть для любого подмножества булева куба размерности $d \leq 9$ существует разбиение на $d+1$ часть строго меньшего диаметра.

В этой работе изучается проблема Борсука в сечениях булева куба и затем обобщается на многомерные регулярные решетки. Важность рассмотрения именно сечения пространством $\mathcal{L}$ меньшей размерности n состоит в том, что мы получаем множество из исходного $\{0,1\}^d$, которое не будет $\{0,1\}$-множеством в базисе пространства $\mathcal{L}$. Тем самым эту проблему нельзя свести к проблеме Борсука в $\{0,1\}^n$. Более того, часть контрпримеров к гипотезе Борсука была найдена именно в подмножествах сечений булева куба (с точностью до изоморфизма), поэтому изучение структуры сечений позволит в дальнейшем упростить поиск новых результатов в этом направлении.

2. **Формулировка результата**

Будем рассматривать d-мерный булев куб $\mathbb{B}^d \stackrel{\text{def}}{=} \{0,1\}^d$, где d - некоторое натуральное число. Сечением размерности n куба $\mathbb{B}^d$ ($n \le d$ - натуральное) назовем множество L вершин этого куба, получившееся в результате пересечения некого n-мерного афинного пространства $\mathcal{L}$ с кубом и не лежащее целиком в подпространстве меньшей (чем n) размерности. Последнее уточнение важно тем, что, например, трехмерный куб можно сечь плоскостью и получить в пересечении одну точку, или одно ребро, что странно было бы называть двумерным сечением. Поскольку мы находимся в конечной дискретной структуре ($\mathbb{B}^d$), то у любого подмножества есть диаметр - максимум расстояний между двумя точками. В нашей задаче сечение L будет исследоваться нами на возможность разделить его на $n+1$ частей строго меньшего диаметра.

При изучении дискретных конструкций удобно рассматривать *граф расстояний* $G_a(L)$ - граф, вершины которого есть точки конструкции, а ребра проводятся между теми и только теми вершинами, расстояние между которыми равно a. Тогда полезно ввести *хроматическое число графа* - количество цветов, в которые можно раскрасить все его вершины, чтобы вершины одного цвета не были смежны. В нашем случае нас интересует в первую очередь *граф Борсука* $\mathcal{B}(L) \stackrel{\text{def}}{=} G_{diam(L)}(L)$, то есть граф на точках множества L, ребра которого проведены между теми и только теми вершинами, расстояния между которыми равны диаметру множества L. Тогда деление L на части меньшего диаметра равносильно нахождению хроматического числа графа $\mathcal{B}(L)$, которое будет равно числу искомых частей меньшего диаметра.

В данной работе получен следующий результат:

Теорема 2.1. *Для всех натуральных n каждое n-мерное сечение L булева куба $\mathbb{B}^d$, где $n \le d$, может быть разбито на $n+1$ частей строго меньшего диаметра.*

Для обоснования этого утверждения было обобщено понятие грани куба. Будем брать те части топологической границы куба, которые сами по себе являются кубами некой размерности, и называть их также гранями. Таким образом, вершины куба - 0-мерные грани, ребра куба, то есть отрезки между вершинами, отличающимися в только одной координате, - 1-мерные, грани в классическом понимании - $(d-1)$-мерные. Обобщенную грань можно более формально задать по индукции:

(1) грань куба $\mathbb{B}^d$ есть $(d-1)$-мерная грань;
(2) каждая грань куба является кубом меньшей размерности, грани уже этого нового куба будем считать обобщенными гранями исходного.

В этой терминологии была доказана более общая

Теорема 2.2. (Конструктивное описание сечения булева куба)
Пусть L - n-мерное сечение булева куба $\mathbb{B}^d$ $(n \leq d)$. Тогда возможны два случая:

(1) *L есть одна из n-мерных граней куба $\mathbb{B}^d$;*
(2) *L состоит ровно из $k+1$ параллельных граней размерности $n-k$ (т.н.* ребер*) куба, где $k \leq n$ - натуральное.*

Более того, в случае (2) диаметр множества L может быть реализован только между вершинами, лежащими в разных ребрах.

В формулировке второго пункта принципиально важно, что k натуральное, потому что при равенстве его нулю мы получаем случай (1), то есть вырожденный вариант общей картины.

Затем было показано, что эти утверждения верны не только для куба, но и для многомерной решетки. Многомерной регулярной решеткой размерности d мы будем называть множество $\{b_1, \ldots, b_m\}^d$, где $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ и $b_{i+1} - b_i = const$. Последнее условие нужно, чтобы решетка преобразованием подобия переводилась в $\{0,\dots,m-1\}^d$. Понятие грани для этого множества вводится так же, как для куба $\{b_1,b_m\}^d$ (только с учетом того, что на отрезке есть еще и внутренние точки, то есть не все точки грани будут ее вершинами). Определение сечения абсолютно такое же, как для булева куба. Для таких объектов получен следующий результат:

Теорема 2.3. (Конструктивное описание сечения многомерной решетки) *Пусть L - n-мерное сечение множества $\mathbb{A}^d$, $n \le d$, где $\mathbb{A} \stackrel{def}{=} \{b_1,\dots,b_m\}$ - конечный участок арифметической прогрессии. Тогда возможны два случая:*

(1) *L есть одна из n-мерных граней $\mathbb{A}^d$;*

(2) *L состоит ровно из $k+1$ параллельных граней размерности $n-k$ (т.н.* ребер*) куба, где $k \le n$ - натуральное.*

Более того, в случае (2) диаметр множества L может быть реализован только между вершинами, лежащими в разных ребрах.

И, как следствие этого,

Теорема 2.4. (О раскраске сечений многомерной решетки) *Для всех натуральных n каждое n-мерное сечение L множества $\{b_1,\dots,b_m\}^d$, где $b_1,\dots,b_m \in \mathbb{R}$ и $b_{i+1}-b_i = const$, может быть разбито на $n+1$ частей меньшего диаметра.*

3. **Обоснование**

3.1. **Доказательство теоремы 2.2.** Заметим, что все утверждения теоремы инвариантны относительно поворотов куба, переводящих его в себя, поэтому мы можем рассматривать сечения линейными пространствами, а не всеми афинными. Это сделает дальнейшие рассуждения более легко воспринимаемыми. Рассмотрим обобщенные грани куба, целиком лежащие в данном сечении L куба $\mathbb{B}^d$ n-мерным линейным пространством $\mathcal{L}$. Найдем максимально возможную размерность такой грани - $n-k$, где k - целое неотрицательное, и назовем грани этой максимальной размерности *ребрами*. Если $k = 0$, то L есть одна из n-мерных граней куба $\mathbb{B}^d$, и это есть случай (1).

Пусть теперь k натуральное. Будем строить систему параллельных ребер, существование которой мы заявили. Возьмем одно из ребер, лежащих в L, и назовем его C. В C рассмотрим ортонормированную систему $e_1, \ldots, e_{n-k}$, состоящую из $0,1$-векторов, соединяющих какие-то пары вершин ребра C. Для этого достаточно взять любую вершину из C и все обычные ребра исходного куба $\mathbb{B}^d$, инцидентные вершине и лежащие в C.

Если в L нет точки, не лежащей в C, то $L = C$, и L не является n-мерным сечением по определению. Пусть $a_1 \in L$ - точка вне C. Опустим из нее перпендикуляр на C в некоторую точку $c_1 \in C$. Тогда вектор $\overrightarrow{c_1 a_1}$ есть некий $0,1$-вектор, ортогональный ребру C, и лежащий в $\mathcal{L}$. Очевидно, что линейная оболочка векторов $e_1, \ldots, e_{n-k}, \overrightarrow{c_1 a_1}$ лежит в пространстве $\mathcal{L}$ (именно тут нам важно, что $\mathcal{L}$ - линейное). Следовательно, $(n-k)$-мерное ребро C_1, параллельное C и проходящее через точку a_1, содержится в L.

Дальше применим принцип индукции. Пусть известно, что $S \stackrel{\text{def}}{=} C \cup C_1 \cup \ldots \cup C_i \subset L$ - система параллельных ребер, где $i \leq k$. Тогда множеству S соответствует ортогональная система векторов $e_1, \ldots, e_{n-k}, v_1, \ldots, v_i$, где в нашем случае $v_1 = \overrightarrow{c_1 a_1}$. Если $i = k$, то S есть n-мерное сечение, совпадающее с L, что соответствует случаю (2). Если же $i < k$, то существует точка $a_{i+1} \in L$, не лежащая в S (если не существует, то S совпадает с L). Аналогично написанному выше, ребро C_{i+1}, параллельное C и проходящее через a_{i+1}, лежит в L. Таким образом, в систему добавляется еще одно ребро на каждом шаге, в итоге мы получим на каком-то шаге индукции $i = k$, что нам и требуется.

Теперь обоснуем вторую часть теоремы. Предположим противное: диаметр множества L реализуется на точках $a, b \in A$, где A - некоторое ребро, лежащее в L. Опустим из точки b перпендикуляр на ребро C, отличное от A

(такое есть по предположению пункта (2)). Основанием перпендикуляра станет вершина $c \in C$, и $\|\overrightarrow{ca}\| > \|\overrightarrow{ba}\|$ по теореме Пифагора, поскольку ca есть гипотенуза в получившемся прямоугольном треугольнике (рисунок 1). Получили противоречие с тем, что на паре a, b реализован диаметр множества L. Теорема доказана.

3.2. **Вывод теоремы 2.1.** Зная структуру сечения, легко предоставить такую его раскраску в не более чем $n+1$ цветов, при которой диаметр может быть реализован только на паре вершин разного цвета. В случае (1) граф $\mathcal{B}(L)$ двудольный (в кубе у каждой точки есть ровно одна диаметрально противоположная) и красится в два цвета. В случае (2) мы имеем $k+1 \leq n+1$ ребер, раскрасив каждое из которых в свой уникальный цвет, получим требуемое (исходя из второго утверждения теоремы 2.2). Тем самым мы имеем $k+1$ часть, расстояния внутри каждой из которых меньше диаметра L, причем их объединение дает L. Теорема доказана.

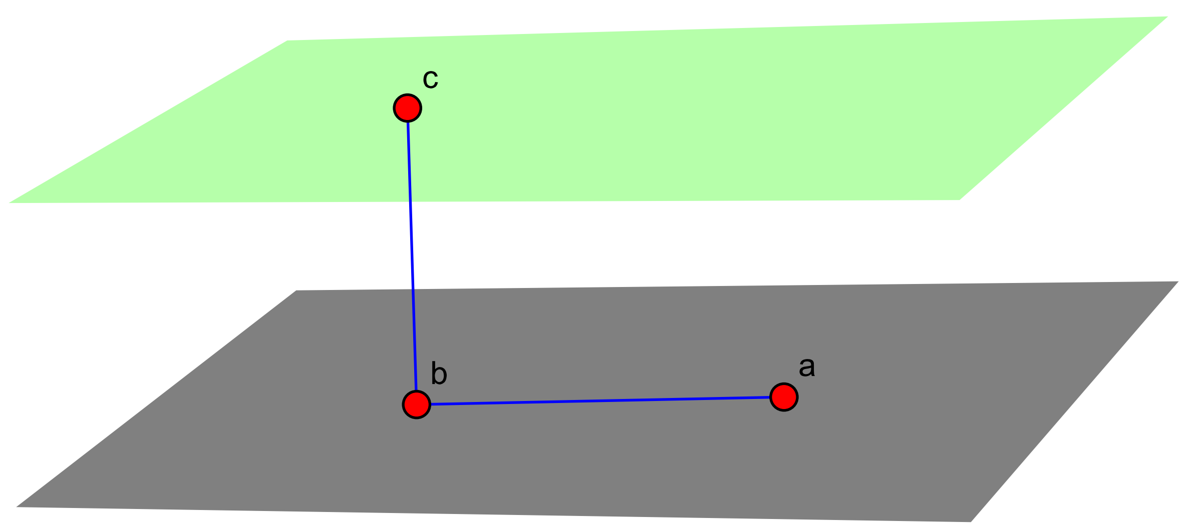

Рис. 1. Построение

4. Обобщение результатов

Первым делом отметим, что для всех приведенных выше рассуждений не были принципиальны значения $0, 1$, то есть результаты верны также для кубов $\{0, b\}^d$, где $0 < b \in \mathbb{R}$. Нам было важно, что начало координат o является вершиной куба, то есть, зная, что точка c лежит в сечении, мы могли сказать, что $\overrightarrow{oc} \in \mathcal{L}$. Затем, структура куба не меняется при параллельных переносах, так что наши утверждения распространяются на кубы $\{a, b\}^d$, где $a < b \in \mathbb{R}$. Далее, полученные утверждения будем обобщать на случай многомерной решетки, а именно множества $\mathbb{A}^d$, где $\mathbb{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{b_1, \ldots, b_m\}$ - некоторое конечное подмножество действительной прямой (будем считать, что оно отсортировано по возрастанию и $b_{i+1} - b_i = const$).

Рассмотрим такую постановку задачи, считая при этом, что $\mathbb{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{0, \ldots, m-1\}$, и что пространство $\mathcal{L}$ линейно (выше мы обосновывали, что это не ограничивает общность). Заметим, что каждая обобщенная грань размерности k определяется своей системой уравнений, "закрепляющей" некоторые $d - k$ координат:

$$x_{i_1} = c_1, \ldots, x_{i_{d-k}} = c_{d-k}, \text{ где } 1 \leq i_1 < \ldots < i_{d-k} \leq d.$$

Когда мы выделим ребро C размерности $n - k$ в сечении L, как в 3.1 (из всех обобщенных граней куба взяв грань максимальной размерности, полностью лежащую внутри L), то будем считать без ограничения общности, что в нем закреплены первые $d - n + k$ координат $c_1, \ldots, c_{d-n+k}$. Без изменений остается существование точки $a \in L \setminus C$ - если такой нет, то наше сечение имеет меньшую размерность. Пусть $a \stackrel{\text{def}}{=} (a_1, \ldots, a_d)$, тогда возьмем точку $c \stackrel{\text{def}}{=} (c_1, \ldots, c_{d-n+k}, a_{d-n+k+1}, \ldots, a_d) \in C$. Очевидно, что $\overrightarrow{ca}$ ортогонален ребру C, так как c есть проекция точки a на множество C. Соответственно, если взять базис ребра C, добавить к нему вектор $\overrightarrow{ca}$, то их линейная оболочка содержится в $\mathcal{L}$. То есть мы можем построить ребро, параллельное C и проходящее через точку a. Итак, здесь действует такая же индукция, как и в 3.1. Теорема 2.3 доказана.

5. **Заключение**

Полученные результаты, особенно если говорить о структуре сечений, могут быть полезны при дальнейшем исследовании 0,1 и -1, 0, 1-проблем Борсука. Знание структуры позволит неким образом классифицировать все возможные подмножества сечений, что сузит поиск контрпримеров к гипотезе, если для части таких “классов” будет показано выполнение предположения во всех размерностях, или же в каком-то наборе. Также возможно рассмотрение не произвольных подмножеств сечения, а лишь с определенным диаметром k, как это делалось, например, в работе Циглера [6] про 0,1-проблему Борсука. Далее, на настоящий момент алгоритм перебора подмножеств куба, основанный на отсечении части множеств, отрабатывает на компьютере за разумное время лишь для размерностей до 9, для размерности 9 время выполнения алгоритма составило примерно 20 минут. Принцип отсечения был описан в диссертации В. Б. Гольдштейна [7], он основан на том, что при переборе существенная часть подмножеств куба отбрасывается, так как для них известен утвердительный ответ из аналитических соображений. Для размерности 10 пока не удалось реализовать такую программу перебора, слишком высоко количество вычислительных операций. Сужение возможных классов подмножеств даст возможность написать алгоритмы перебора для кубов большей размерности, начиная с 10, чтобы их сложность была выполнима для современных компьютеров.

Список литературы

[1] K. Borsuk. Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre. *Fundementa Math*, 20 (1933), 177–190.

[2] А. М. Райгородский. О размерности в проблеме Борсука. *УМН*, (6), 52 (1997), 181–182.

[3] J. Kahn & G. Kalai. A counterexample to Borsuk's conjecture. *Bulletin Amer. Math. Soc.*, 29 (1993), 60–62.

[4] A. Hinrichs & C. Richter. New sets with large Borsuk numbers. *Discrete Math*, 270 (2003), 137–147.

[5] A. Bondarenko. On Borsuk's conjecture for two-distance sets. *ArXiv*, 2013.

[6] G.M. Ziegler. Coloring Hamming Graphs, Optimal Binary Codes, and the 0/1-Borsuk Problem in Low Dimensions. In: Alt H. (eds) Computational Discrete Mathematics. *Lecture Notes in Computer Science, Springer*, 2122 (2001), 159–171.

[7] В. Б. Гольдштейн. Оценки чисел Борсука и Грюнбаума для (0,1)- и (-1, 0, 1)-многогранников в пространствах малой размерности. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Москва 2013.