ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА»
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

Диофантовы экспоненты в некоторых задачах теории многомерных диофантовых приближений

Выполнил студент
612 группы
Бигушев Эльмир Руфкатович

____
подпись студента

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., доцент
Герман Олег Николаевич
____
подпись научного руководителя

Москва
2018

Аннотация

В данной работе будет представлена некоторая связь между полиэдрами Клейна и диофантовой экспонентой решетки. А именно, будет доказано неравенство

$$\omega(\Lambda) \leqslant \frac{d-1}{d} \limsup_{\substack{|\mathbf{v}|\to\infty \\ \mathbf{v}\in\bigcup_i \nu(K_i)}} \frac{\log(\det St_{\mathbf{v}})}{\log|\mathbf{v}|}$$

для трехмерного случая.

§ 1. Введение

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ — произвольная d-мерная решетка с определителем 1.

Определение 1. Выпуклые оболочки ненулевых точек решетки Λ, содержащихся в каждом ортанте, называются *полиэдрами Клейна* решетки Λ.

И соответствующее "двойственное" определение, когда фиксируется решетка и варьируется конус:

Определение 2. Пусть $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$ — произвольный d-мерный симплициальный конус с вершиной в начале координат. Выпуклая оболочка K ненулевых точек решетки $\mathbb{Z}^d$, содержащихся в $\mathcal{C}$, называется *полиэдром Клейна*, соответствующим решетке $\mathbb{Z}^d$ и конусу $\mathcal{C}$.

Везде далее мы будем рассматривать только иррациональные решетки Λ, то есть не имеющие в координатных плоскостях ненулевых точек, и иррациональные конусы $\mathcal{C}$, то есть такие, что в плоскостях гранях нет ненулевых точек. Тогда, как показано в [1], полиэдр Клейна K является обобщенным многогранником, то есть множество, которое в пересечении с любым многогранником дает многогранник. В этом случае граница полиэдра является $(d-1)$-мерной полиэдральной поверхностью, гомеоморфную $\mathbb{R}^{d-1}$ и состоящей из выпуклых $(d-1)$-мерных многогранников, такой, что каждая точка этой поверхности принадлежит не более чем конечному числу таких многогранников. Некоторые из граней K могут оказаться неограниченными, но только в том случае (см. [2]), когда решетка, двойственная Λ, не является иррациональной (соотв. конус, двойственный к $\mathcal{C}$, не является иррациональным). Тогда имеет смысл следующее

Определение 3. Граница ∂K полиэдра Клейна K называется *парусом.*

Теперь же попробуем взглянуть на все это в двумерном случае. И посмотрим на геометрическую интерпретацию цепных дробей. Пусть задано число α, $0 < \alpha < 1$. Рассмотрим двумерную решетку Λ_α с неотрицательными координатами в исходном базисе. Выпуклая оболочка ненулевых точек будет полигоном Клейна, его граница полиэдром. Целочисленные же длины ребер полиэдра равны соответствующим неполным частным числа α с нечетным индексами, а целочисленные углы между парами смежных ребер равны неполным частным с четными индексами. *Целочисленной длиной* отрезка с концами в точках решетки Λ_α называется количество точек решетки, лежащих во внутренности отрезка, минус 1. *Целочисленным углом* между двумя такими отрезками с общей вершиной называется площадь параллелограмма, натянутого на них, деленная на произведение их целочисленных длин (или иными словами, индекс подрешетки, порожденной примитивными векторами решетки Λ_α, параллельными этим двум отрезкам).

А произвольную двумерную решетку можно задать как

$$\Lambda_{\alpha,\beta} = \left\{ (\langle \alpha, x\rangle, \langle \beta, x\rangle) \,\middle|\, x \in \mathbb{Z}^2 \right\},$$

где $\alpha_1 = \beta_1 = -1$, а α_2, β_2 — различные вещественные числа ($\alpha = (\alpha_1, \alpha_1), \beta = (\beta_1, \beta_2)$). Нетрудно понять, что комбинаторную структура паруса, построенного на этой решетке, описывают неполные частные чисел α и β.

Ввиду соответствия между неполными частными и целочисленными длинами и углами, описанного выше, в d-мерном случае естественно ожидать, что $(d-1)$-мерные грани паруса и реберные звезды при вершинах паруса будут играть роль неполных частных. Теперь немного формализуем это.

§ 2. Грани и реберные звезды паруса

Пусть опять $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ — произвольная иррациональная d-мерная решетка с определителем 1. Рассмотрим соответствующий ей полиэдр Клейна K и парус ∂K. Пусть F — один из граней паруса с вершинами $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$, тогда определителем этой грани будем считать величину

$$\det F = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_d \leqslant k} |\det(\mathbf{w}_{i_1}, \dots, \mathbf{w}_{i_d})|.$$

Пусть теперь $\mathbf{v}$ — вершина паруса, а $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k$ — примитивные векторы решетки Λ параллельные ребрам, инцидентным вершине $\mathbf{v}$. Определим через $St_{\mathbf{v}}$ реберную звезду с вершиной $\mathbf{v}$. Тогда определителем этой грани будет

$$\det St_{\mathbf{v}} = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_d \leqslant k} |\det(\mathbf{r}_{i_1}, \dots, \mathbf{r}_{i_d})|.$$

Или, другими словами, это объемы сумм Минковского $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ и $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k$ соответственно.

В формулировке данной задачи будет крайне удобно использовать обозначением

$$\Pi(x) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant d} |x_i|^{\frac{1}{d}},$$

где $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

Определение 4. Рассмотрим произвольную решетку $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ полного ранга. *Диофантовой экспонентой* этой решетки будем называть величину

$$\omega(\Lambda) = \sup \left\{ \gamma \in \mathbb{R} \,\middle|\, \Pi(x) \leqslant |x|^{-\gamma} \text{ для бесконечного количества } x \right\},$$

где $|\cdot|$ sup-норма.

Другими словами,

$$\omega(\Lambda) = \limsup_{\substack{\mathbf{v} \in \Lambda \\ |\mathbf{v}| \to \infty}} \frac{\log \left(\Pi(\mathbf{v})^{-1} \right)}{\log |\mathbf{v}|}.$$

Теорема Минковского о выпуклом теле говорит, что $\omega(\Lambda) \geqslant 0$. Обозначим за $\nu(K_i)$ — множество вершин полиэдра Клейна K_i. При этом, для двумерного случая известно, что

$$\omega(\Lambda) = \limsup_{\substack{|\mathbf{v}|\to\infty \\ \mathbf{v}\in\bigcup_i \nu(K_i)}} \frac{\log(\det St_{\mathbf{v}})}{\log|\mathbf{v}|}.$$

Учитывая это, можно сделать предположение. Верно ли, что

$$\omega(\Lambda) \asymp \limsup_{\substack{|\mathbf{v}|\to\infty \\ \mathbf{v}\in\bigcup_i \nu(K_i)}} \frac{\log(\det St_{\mathbf{v}})}{\log|\mathbf{v}|}$$

для произвольной размерности?

Ниже мы приведем незаконченное рассуждение О.Н.Германа из статьи [3], где "доказывается" неравенство в одну сторону. А после, я покажу, как его завершить для трехмерного случая.

§ 3. Некоторые рассуждения

Рассмотрим иррациональную решетку Λ как в пункте выше. Еще рассмотрим один из 2^d полиэдров K. Пусть $|\cdot|$ sup-норма. Пусть $\mathbf{v} \in \nu(K), \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_d)$. Возьмем

$$D = \operatorname{diag}\left(\frac{\Pi(\mathbf{v})}{|v_1|}, \ldots, \frac{\Pi(\mathbf{v})}{|v_d|}\right).$$

Подействуем этим оператором на все пространство и получим $K' = DK, \Lambda' = D\Lambda, \mathbf{v}' = D\mathbf{v}$. Нетрудно заметить, что K' будет одним из полиэдров соответствующих решетке Λ'. При этом $\det D = 1$, а значит:

$$\det St_{\mathbf{v}'} = \det St_{\mathbf{v}}.$$

Кроме этого $\mathbf{v}'$ — самый маленький ненулевой вектор решетки Λ' и

$$|\mathbf{v}'| = \Pi(\mathbf{v}') = \Pi(\mathbf{v}).$$

Предположим, что мы можем выбрать $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_d$ примитивные вектора решетки Λ', которые параллельны ребрам K' инцидентных вершине $\mathbf{v}'$, удовлетворяющих условиям

- $|\mathbf{r}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{r}_i| \gg |\mathbf{r}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{r}_{i-1}| \cdot |\mathbf{r}_i|$ для всех $i = 2, \ldots, d$;
- любые d векторов из множества $\mathbf{v}', \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_d$ линейно независимы.

Далее в рассуждениях будем называть эти условия первым и вторым соответственно. Тогда, с одной стороны,

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant d} |\mathbf{r}_i| \asymp |\det(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_d)| \leqslant \det St_{\mathbf{v}'} = \det St_{\mathbf{v}}.$$

С другой стороны,

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant d} \left(|\mathbf{v}'| \prod_{\substack{0\leqslant j\leqslant d \\ j\neq i}} |r_j| \right) \gg (\Lambda')^d = 1,$$

откуда

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant d}|\mathbf{r}_i| \gg |\mathbf{v}'|^{-\frac{d}{d-1}} = \Pi(\mathbf{v})^{-\frac{d}{d-1}}.$$

Учитывая эти неравенства, получим

$$\Pi(\mathbf{v})^{-\frac{d}{d-1}} \ll \det St_{\mathbf{v}}.$$

Теперь предположим, что $K_1,\dots,K_{2^d}$ все 2^d полиэдра Клейна решетки Λ. Так как локальный минимум $\Pi(\mathbf{v})$ достигается на парусе, получим:

$$\omega(\Lambda) = \frac{d-1}{d}\limsup_{\substack{|\mathbf{v}|\to\infty\\ \mathbf{v}\in\bigcup_i \nu(K_i)}}\frac{\log\left(\Pi(\mathbf{v})^{-1}\right)}{\log|\mathbf{v}|} \leqslant \frac{d-1}{d}\limsup_{\substack{|\mathbf{v}|\to\infty\\ \mathbf{v}\in\bigcup_i \nu(K_i)}}\frac{\log(\det St_{\mathbf{v}})}{\log|\mathbf{v}|}.$$

Стоит заметить, что в качестве $\mathbf{r}_i$ можно "брать" не только инцидентные $\mathbf{v}$ ребра, но и вектора, являющиеся линейной комбинацией соседних с положительными ограниченными константой коэффициентами. Теперь докажем, что такие вектора можно всегда выбрать при $d = 3$.

§ 4. Доказательство существования

Будем отождествлять понятие вектора и точки для удобства. И будем считать, что $\mathbf{v} = \mathbf{v}', \Lambda = \Lambda', K = K'$. Для удобства назовем условия

- $|\mathbf{r}_1\wedge\dots\wedge\mathbf{r}_i| \gg |\mathbf{r}_1\wedge\dots\wedge\mathbf{r}_{i-1}|\cdot|\mathbf{r}_i|$ для всех $i = 2,\dots,d$;
- любые d векторов из множества $\mathbf{v}', \mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_d$ линейно независимы.

первым и вторым соответственно. Для начала, докажем довольно тривиальное утверждение.

Утверждение 1. *Если $\mathbf{v}\in\nu(K)$, то внутри параллелепипеда, с диагональю $2\mathbf{v}$ и ребрами параллельными координатным осям, всего 3 целые точки решетки Λ — $0, \mathbf{v}, 2\mathbf{v}$.*

Доказательство. Пусть существуеют целая точка $\mathbf{w}$ внутри этого параллелепипеда(возможно на границе). Тогда в силу симметрии, точка $2\mathbf{v}-\mathbf{w}$ тоже лежит внутри, но эти точки должны принадлежать полиэдру, а в силу его выпуклости получаем противоречие. $\square$

Без потери общности будем считать, что полиэдр K находится в положительном ортанте. Кроме этого, если сместить этот ортант в точку $\mathbf{v}$, то он будет полностью содержаться в полиэдре в силу выпуклости.

Теперь зафиксируем $T > 1$ и достаточно маленькое $\epsilon(T) > 0$ (в явном виде мы эти константы не подберем, но из рассуждений ниже будет следовать, что они существуют, и даже примерно понятно, какими их можно взять). Обозначим за $\mathbf{w}_1,\dots\mathbf{w}_k$ — множество целых примитивных векторов решетки Λ, которые параллельны ребрам паруса инцидентных вершине $\mathbf{v}$. Теперь будем рассматривать два случая.

1. Пусть у нас существует плоскость π, проходящая через точку $\mathbf{v}$ и имеющая компактное пересечение с положительным ортантом, такая, что все $\mathbf{w}_i$ отделены от этой плоскости углом хотя бы ϵ (вторым случаем будет, когда такой плоскости нет).

   Утверждается, что можно выбрать такое подмножество $\mathbf{w}_{i_1}, \ldots \mathbf{w}_{i_s}$ векторов, что их выпуклая оболочка будет содержать положительный ортант с началом в $\mathbf{v}$, и при этом $s \leqslant 12$ (под выпуклой оболочкой векторов будем понимать выпуклую оболочку лучей с началом в точке $\mathbf{v}$ и направлением этих самых векторов). Почему? Отложим координатные плоскости от точки $\mathbf{v}$ каждая плоскость пересекает не более двух граней (если плоскость проходит через один из векторов, считаем это за одну грань) выпуклой оболочки этих векторов. Возьмем все вектора этих граней (а их ровно по 2), нетрудно заметить, что их выпуклая оболочка содержит положительный ортант, а всего этих векторов не более 6. Далее будем считать, что $\mathbf{w}_1, \ldots \mathbf{w}_k$ — эти самые вектора и $k \leqslant 12$ (а если брать не все вектора, а только одинаковой четности, то можно получить $k \leqslant 6$, но это нам и не нужно).

   Теперь можем рассмотреть сечение выпуклой оболочки $\mathbf{w}_i$ плоскостью π' параллельной π на расстоянии 1 от вершины $\mathbf{v}$ (понятно, что отойти на расстояние 1 можно двумя способами, но в одном из них просто не будет пересечения с $\mathbf{w}_i$).

   Получим, что это сечение представляет из себя выпуклый ограниченный многоугольник с не более чем 12 вершинами. При этом, он содержит треугольник (сечение положительного ортанта с началом в точке $\mathbf{v}$) площадью $\gg 1$, значит площадь многоугольника $S \gg 1$. Диаметр этого многоугольника $l \ll \frac{1}{\sin\epsilon} \asymp \epsilon^{-1} \Rightarrow l^{-1} \gg \epsilon$. Теперь рассмотрим произвольную триангуляцию этого многоугольника. Пусть r — максимальный радиус вписанной окружности треугольников. Тогда $rl \gg S$, так как треугольников ограниченное количество и площадь каждого не превосходит $\frac{3}{2}rl$. Отсюда получим, что $rl \gg S \gg 1 \Rightarrow r \gg l^{-1} \gg \epsilon$. Теперь рассмотрим треугольник с максимальным радиусом вписанной окружности. Попробуем оценить радиус сферы, вписанной в трехгранный угол соответствующий данному треугольнику на расстоянии 1 от точки $\mathbf{v}$. Так как угол между плоскостью и всеми векторами больше ϵ, то $R \gg r\sin\epsilon \gg \epsilon^2$ — радиус сферы на расстоянии $\ll l$, то есть радиус вписанной сферы на расстоянии 1 от $\mathbf{v}$ будет $\gg \epsilon^3$. А это как раз и значит, что угол между любым вектором и оставшейся плоскостью этой тройки отделен от нуля константой ϵ^3.

   Еще можно заметить, что это выполняется для любой триангуляции многоугольника. Центром многоугольника назовем точку, которая является пересечением прямой, с образующим вектором $\mathbf{v}$, и нашей плоскостью. Понятно, что выбранный треугольник будет удовлетворять второму условию только в том случае, если центр многоугольника не лежит на его границе. Пусть теперь существует такая триангуляция, что центр многоугольника лежит внутри какого-то треугольника, тогда предположение, очевидно, выполняется. Если же для любой триангуляции центр всегда лежит на каком-то ребре, это значит, что для любой точки многоугольника существует "противоположная" ей точка относительно центра (если же для какой-то точки не будет противоположной, рассмотрим триангуляцию, в которой все ребра будут исходить из этой точки и получим противоречие). Значит, многоугольник состоит из четного количества вершин (на самом деле, несложным перебором можно свести их количество к 4, но это не нужно). Тогда достаточно добавить к векторам $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ еще один вектор, равный сумме каких-то двух соседних. Тогда точек будет нечетное количество и при этом, этот вектор будет лежать на границе выпуклой оболочки. И тогда мы сможем выбрать 3 вектора, удовлетворяющих условиям.

2. Пусть такой плоскости нет. Для начала, докажем несложное утверждение.

   Утверждение 2. *Не существует векторов $\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j$ таких, что угол между ними больше, чем $\pi - 2T\epsilon$ (а как следствие, больше чем $\pi - 2\epsilon$).*

   Доказательство. Рассмотрим прямую, проходящую через точку $\mathbf{v}$ с направлением $\mathbf{w}_i$. Она пересекает параллелепипед из утв.1 (для удобства подсчета углов будем считать, что его сторона равна 1) в двух точках A, B (точка A лежит не на координатной плоскости). Тогда расстояние между B и $\mathbf{w}_j$ не больше $2T\epsilon$ (по порядку),а расстояние между A и $\mathbf{w}_i$ тоже не превосходит $2T\epsilon$, так как B обязан лежать на расстояние не более $2T\epsilon$ от ребер параллелепипеда (значит и A). Тогда сумма векторов $\mathbf{w}_i$ и $\mathbf{w}_j$ есть сумма точек $A + \delta_1$ и $B + \delta_2$ относительно точки $\mathbf{v}$. Так как A и B противоположны относительно $\mathbf{v}$, то их сумма ноль, а $|\delta_i| \ll T\epsilon$. Значит, их сумма лежит на расстоянии не более чем $T\epsilon$ от точки $\mathbf{v}$, а значит внутри параллелепипеда, противоречие. Понятно, что для любой константы T существует ϵ, которая удовлетворяет данному условию. □

   Рассмотрим минимальный по углу конус вращения, который содержит выпуклую оболочку векторов $\mathbf{w}_i$. По предположению, этот угол больше чем $\pi - 2\epsilon$, иначе плоскость удаленная от всех векторов строится явно. Теперь рассмотрим плоскость через точку $\mathbf{v}$ и ортогональную биссектрисе конуса. Рассмотрим сечение параллелепипеда (на самом деле это куб) этой плоскостью. Эта плоскость вырезает из положительного ортанта с началом в нуле треугольник и многоугольник на кубе. Если рассмотреть разность этих фигур, то мы получим либо 3 треугольника, либо фигуру, лежащую по одну сторону от прямой, которая проходит через точку $\mathbf{v}$. Покажем, что второй случай не возможен. Если рассмотреть сечение конуса на кубе, можно увидеть, что это сечение лежит в какой-то окрестности сечения плоскостью. При этом эта окрестность зависит только от ϵ и ограничена линейно по ϵ. Как раз в этот момент будем считать, что ограничена она $T\epsilon$. Тогда максимально возможный угол между двумя векторами на границе конуса обязан быть больше чем $\pi - 2T\epsilon$. Значит, все точки на границе конуса лежат в $T\epsilon$ — окрестности "3 треугольников". При этом, аналогично предыдущему рассуждению, существует хотя бы по одному вектору в $T\epsilon$ — окрестности каждого треугольника. Пусть теперь плоскость пересекает оси в точках $(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$. Для того, чтобы треугольники были непустыми нужно, чтобы $2\Pi(\mathbf{v}) \leqslant a \leqslant b \leqslant c$. Пусть $Ax + By + Cz - 1 = 0$ — уравнение этой плоскости. Тогда $B = \frac{1}{b}, C = \frac{1}{c}, A = \Pi(\mathbf{v})^{-1} - b^{-1} - c^{-1}$. Тогда $a = A^{-1} = \frac{1}{\Pi(\mathbf{v})^{-1} - b^{-1} - c^{-1}}$. Пусть теперь $b > 5\Pi(\mathbf{v})$, тогда $a < \frac{1}{\Pi(\mathbf{v})^{-1}(1 - \frac{2}{5})} = \frac{5}{3}\Pi(\mathbf{v})$. Значит, $a, b \leqslant 5\Pi(\mathbf{v})$.

   Тогда рассмотрим решетку с началом в точке $\mathbf{v}$ и натянутую на точку 0 и две вершины "рядом" с "маленькими" треугольниками. Точка 0 имеет длину $\Pi(v)$, а остальные две вершины длину не более $\frac{5\Pi(\mathbf{v})}{\cos \epsilon} \ll 5\Pi(\mathbf{v})(1 + T\epsilon)$. Решетка будет ранга 3, иначе две вершины на конусе будут иметь угол больше $\pi - 2T\epsilon$ (рассуждение абсолютно такое же, что и выше). Тогда ее определитель не больше чем $\Pi(\mathbf{v})^3(1 + T\epsilon)^2 < 1$, а такого быть не может.

Итог, при $d=3$ верно

$$\omega(\Lambda)\leqslant\frac{d-1}{d}\limsup_{\substack{|\mathbf{v}|\to\infty\\ \mathbf{v}\in\bigcup_i\nu(K_i)}}\frac{\log(\det St_{\mathbf{v}})}{\log|\mathbf{v}|}.$$

§ Литература

[1] J.-O. Moussafir *Convex hulls of integral points.* Zapiski nauch. sem. POMI, 256 (2000).

[2] О.Н. Герман *Паруса и норменные минимумы решеток.* Мат. сборник, 196:3 (2005), 31-60.

[3] O.N. German *Problems concerning Diophantine exponents of lattices.* (2018)

[4] J.W.S. Cassels *An introduction to Diophantine approximation.* Cambridge University Press (1957).

[5] W.M. Schmidt *On heights of algebraic subspaces and diophantine approximations.* Annals of Math (1967).