ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

О ТЕОРЕМАХ СЕГРЕ И РОБИНСОНА О НЕСИММЕТРИЧНЫХ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ

Выполнил студент
612 группы
Сагдеев Арсений Алексеевич

____
(подпись студента)

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Герман О.Н.

____
(подпись научного руководителя)

Москва
2018

Содержание

Аннотация

В настоящей работе получены аналоги теорем Гурвица и Робинсона о диофантовых приближениях. Благодаря этому, достигнут существенный прогресс в решении классических задач Сегре и Робинсона о несимметричных диофантовых приближениях.

Ключевые слова: теорема Гурвица, задача Сегре, теорема Робинсона, несимметричное диофантово приближение, цепная дробь.

1 Введение

В 1891 году в [1] Гурвиц доказал свою знаменитую теорему о том, что для всякого иррационального числа существует бесконечное множество "достаточно хороших" рациональных приближений. Мы сформулируем ее в довольно необычной, но удобной для последующего изложения форме.

Теорема 1. *Пусть α — произвольное иррациональное число. Тогда существует бесконечно много рациональных чисел $\frac{p}{q}$ таких, что*

$$\frac{-1}{\sqrt{5}q^2} < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

Кроме того, при сохранении одного из двух $\sqrt{5}$ в знаменателе левой или правой части неравенства второй $\sqrt{5}$ нельзя заменить на какое-либо большее число.

В 1945 году в работе [2] Сегре попытался обобщить теорему Гурвица на случай несимметричных приближений. А именно, для каждого $\tau \geq 0$ ему было интересно найти "самую большую" константу $S(\tau)$ с которой, тем не менее, верно, что для каждого иррационального α существует бесконечно много рациональных приближений $\frac{p}{q}$ таких, что

$$\frac{-1}{S(\tau)q^2} < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{\tau}{S(\tau)q^2}.$$

Конечно, самой большой такой константы может и не оказаться, так что определение величины $S(\tau)$ нужно давать немного иначе:

$$S(\tau) = \sup\left\{c : \forall\, \alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \ \ \exists^\infty\ p, q \in \mathbb{Z} \text{ таких, что } \frac{-1}{cq^2} < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{\tau}{cq^2}\right\}.$$

Отметим, что сам Сегре в работе [2] не пользовался никаким обозначением для функции $S(\tau)$, хоть и изучал ее. Мы решили обозначить эту функцию по первой букве его фамилии.

Точку τ мы будем называть *достижимой* для функции $S(\cdot)$, если супремум при определении величины $S(\tau)$ достигается.

Нетрудно понять, что в только что введенной терминологии теорема 1 формулируется следующим образом: $S(1)$ равно $\sqrt{5}$ и достижимо.

Сам Сегре в [2] не смог посчитать в явном виде функцию $S(\tau)$, но смог выписать для нее некоторую оценку снизу:

Теорема 2. *Пусть $\tau \geq 0$ — произвольное число. Тогда верно, что*

$$S(\tau) \geq \sqrt{1+4\tau}. \tag{1}$$

Если дополнительно известно, что $\tau = 0$ или что $\frac{1}{\tau} \in \mathbb{N}$, то это неравенство обращается в равенство. Более того, такие τ являются достижимыми.

Сегре высказал гипотезу, что в случае $\frac{1}{\tau} \notin \mathbb{N}$ неравенство (1) не оптимально.

В дальнейшем было опубликовано довольно много работ, в которых было представлено множество разнообразных доказательств теоремы 2, однако, эти статьи не содержали никаких новых результатов, так что мы не будем ссылаться на них в настоящей работе.

Первым существенным продвижением в этом направлении, которое нам бы хотелось отметить, была статья [3], в которой автору удалось доказать, что приближение, с точностью не меньшей чем гарантирует неравенство (1), всегда найдется среди любых пяти последовательных подходящих дробей (см. определение в §2). Или более формально: для каждого $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, каждого $\tau \geq 0$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $m \in \{n, n+1, n+2, n+3, n+4\}$ такое, что подходящая дробь $\frac{p_m}{q_m}$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{-1}{\sqrt{1+4\tau}q_m^2} < \frac{p_m}{q_m} - \alpha < \frac{\tau}{\sqrt{1+4\tau}q_m^2}. \tag{2}$$

Впоследствии, в работе [4] Тонгу удалось доказать, что удовлетворяющая неравенству (2) дробь найдется даже среди четырех последовательных подходящих дробей, а вот тремя подходящими для некоторых τ и α обойтись не удастся.

Однако, нам кажется, что доказательство таких результатов было несколько преждевременно: действительно, если гипотеза Сегре оказалась бы верной и при некотором τ верно, что $S(\tau) > \sqrt{1+4\tau}$, то приближения с константой $\sqrt{1+4\tau}$, даже пусть они и всегда есть среди некоторого количества последовательных подходящих, не очень интересны, так как для каждого иррационального α всегда можно найти бесконечное количество лучших приближений.

Следующим важным продвижением в этом направлении была работа [5], в которой Тонгу удалось доказать гипотезу Сегре о том, что при каждом $\tau > 0$ таком, что $\frac{1}{\tau} \notin \mathbb{N}$ верно, что $S(\tau) > \sqrt{1+4\tau}$. На самом деле, в [5] было обоснованно более сильное утверждение:

Теорема 3. *Пусть $x > 0$ — произвольное число. Положим*

$$\gamma(x) = c \cdot x^2 \cdot \left\{\frac{1}{x}\right\} \cdot \left(1 - \left\{\frac{1}{x}\right\}\right),$$

где $c = \frac{1}{5}$. Тогда для каждого $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ существует бесконечно много $p, q \in \mathbb{Z}$ таких, что

$$\frac{-1}{\left(\sqrt{1+4x} + \gamma(x)\right)q^2} < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{1+4x}}{x} + \gamma(x)\right)q^2}. \tag{3}$$

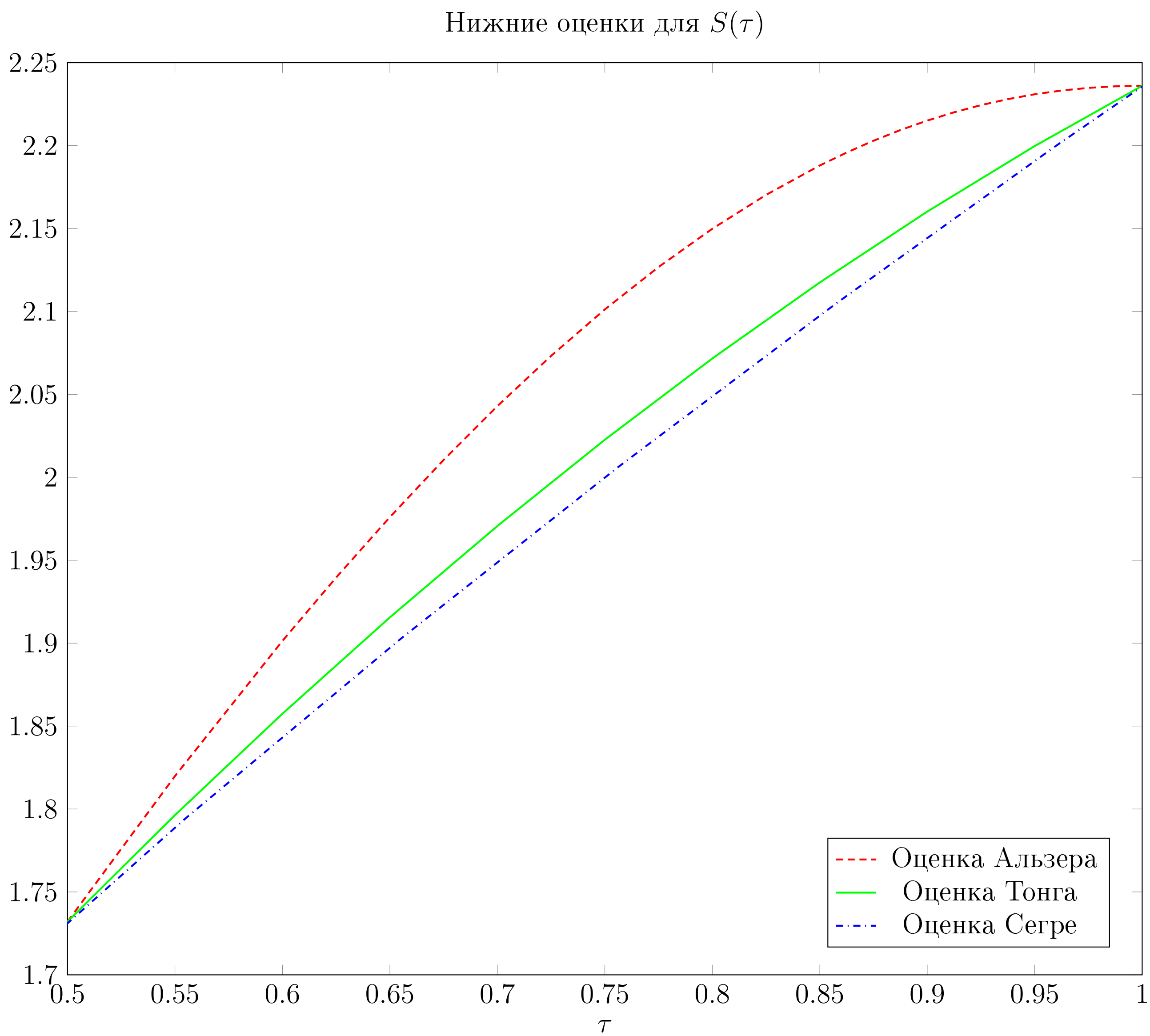
Впоследствии этот результат был улучшен Альзером в работе [6], где он обосновал, что в качестве c в теореме 3 можно взять даже $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

К недостаткам результатов Тонга и Альзера можно отнести тот факт, что хоть они и доказали, что почти всегда $S(\tau) > \sqrt{1+4\tau}$, из их результатов не вытекает какой-то новой явно выписанной нижней оценки для $S(\tau)$, так как в неравенстве (3) отношение "левой константы приближения" к "правой константе приближения" не выражается какой-то простой функцией от x. Однако, при каждом фиксированном τ такую нижнюю оценку можно получить численно. Действительно, нужно только численно найти $x = x(\tau)$ — корень уравнения

$$\frac{\sqrt{1+4x}+\gamma(x)}{\frac{\sqrt{1+4x}}{x}+\gamma(x)} = \tau$$

и после этого сказать, что в силу неравенства (3) верно, что $S(\tau) \geq \sqrt{1+4x(\tau)} + \gamma(x(\tau))$.

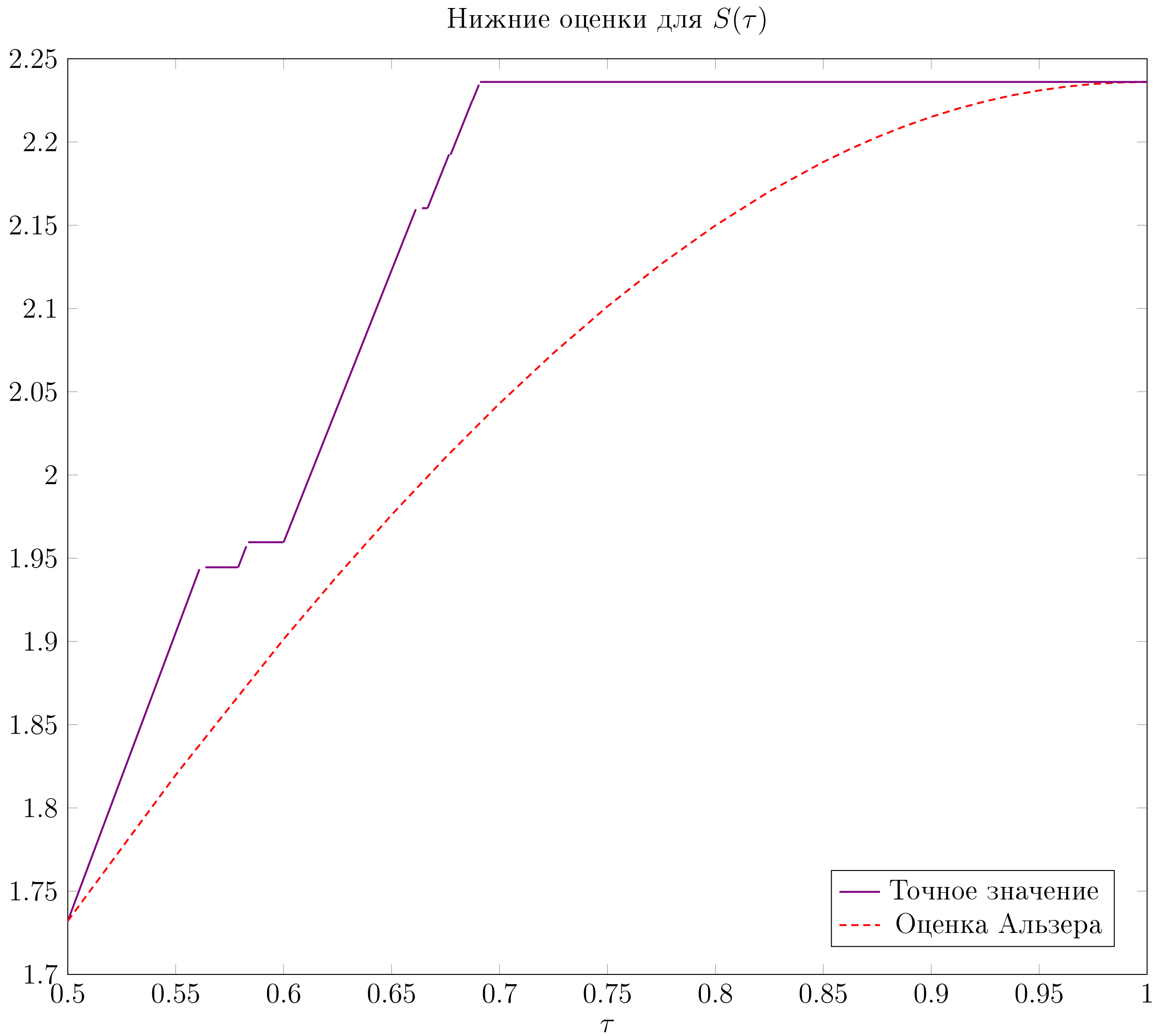
Мы проделали эту процедуру для $\tau \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ и демонстрируем результат работы на следующем графике.



Как видно, нижние оценки Альзера и Тонга превосходят оценку Сегре для всех точек отрезка, кроме его концов (напомним, что в концевых точках данного отрезка Сегре доказал точность своей оценки).

Однако, хоть результат полученный Альзером и является достижением в сравнении с изначальным результатом Сегре, проблема еще далека от своего окончательного решения. Действительно, ни для одного значения $\tau \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ не была доказана оптимальность оценки Альзера, точное значение функции $S(\tau)$ по прежнему известно только при таких τ, для которых $\frac{1}{\tau} \in \mathbb{N}$.

Настоящая статья частично устраняет этот пробел: мы смогли установить *точное* значение функции $S(\tau)$ для *подавляющего большинства* точек из отрезка $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ (а именно, для более чем 99% точек из этого отрезка), а также указать, какие из этих точек достижимы, а какие — нет. Помимо этого мы доказали множество замечательных свойств функции $S(\tau)$. Строгим формулировкам полученных нами результатов (порой — довольно громоздким) посвящен §2, а пока что мы хотели бы продемонстрировать график, на котором отмечены посчитанные нам точные значения функции $S(\tau)$, а также для сравнения приведены их ранее упомянутые нижние оценки, доказанные Альзером.



Видно, что хоть точное значение функции $S(\tau)$ посчитано и не во всех точках $\left[\frac{1}{2};1\right]$, но там, где оно посчитано, оно значительно превосходит ранее известную нижнюю оценку, доказанную Альзером.

Еще одним результатом, тесно связанным с теоремой Гурвица, рассмотренным в настоящей работе, является доказанная в [7] теорема Робинсона. Робинсон задался вопросом, можно ли в неравенстве из теоремы 1 ослабить чуть-чуть одну из границ и усилить при этом другую. Он установил, что ответ на этот вопрос положителен. Его теорему мы, опять же, сформулируем в довольно необычном, но очень полезным для дальнейшего изложения виде.

Теорема 4. *Для каждого положительного $\varepsilon < \sqrt{5}$ и каждого $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ существует бесконечно много рациональных чисел $\frac{p}{q}$ таких, что*

$$\frac{-1}{\left(\sqrt{5}-\varepsilon\right)q^2} < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{1}{\left(1+\sqrt{5}\right)q^2}.$$

Более того, нельзя совсем отказаться от ε слева (т.е. положить $\varepsilon = 0$) оставив при этом справа $1+\sqrt{5}$ в знаменателе, а также нельзя увеличить $1+\sqrt{5}$ справа на некоторую, не зависящую от ε константу, оставив при этом слева $\sqrt{5}-\varepsilon$ в знаменателе.

В сравнении с теоремой Гурвица, этот результат выглядит очень впечатляюще: достаточно на сколь угодно малое ε ослабить по сравнению с $\sqrt{5}$ допустимую точность приближения с одной стороны, так с другой точность сразу же возрастет на независящую от ε константу!

Однако, некоторая зависимость от величины ε тут все же имеется и для того, чтобы увидеть ее, нам потребуется ввести вспомогательное определение.

Для каждого положительного $\varepsilon < \sqrt{5}$ определим функцию Робинсона $R(\varepsilon)$ следующим образом:

$$R(\varepsilon) = \sup\left\{c : \forall\, \alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \;\; \exists^\infty\, p, q \in \mathbb{Z} \text{ таких, что } \frac{-1}{\left(\sqrt{5}-\varepsilon\right)q^2} < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{1}{cq^2}\right\}.$$

Из теоремы 4 следует, что при каждом ε верно, что $R(\varepsilon) \geq 1+\sqrt{5}$, а при $\varepsilon \to 0$ справедливо равенство $R(\varepsilon) = 1+\sqrt{5}+o(1)$. Впоследствии этот результат был немного улучшен Тонгом в работе [8], который доказал следующую теорему.

Теорема 5. *Для достаточно малых положительных ε верно, что*

$$R(\varepsilon) \geq 1+\sqrt{5}+c\cdot\varepsilon^2, \tag{4}$$

где в качестве c можно взять $\frac{\sqrt{5}}{20} = 0.1118\ldots$.

При внимательно изучении работы [8] мы обнаружили, что Тонг допустил ошибку при доказательстве этой теоремы. Если провести все его рассуждения аккуратно, то можно доказать, что в качестве c можно брать лишь $\frac{47\sqrt{5}-105}{40} = 0.00237\ldots$ что намного хуже заявленной теоремы 5.

В настоящей работе мы, во-первых, указали на связь функций $R(\varepsilon)$ и $S(\tau)$, а во-вторых, смогли найти самую большую константу c, с которой неравенство (4) тем не менее верно. Эта константа превосходит не только фактически доказанную Тонгом $0.00237\dots$ но и заявленную им $0.1118\dots$. Соответствующие формулировки результатов мы приводим в следующем параграфе.

Описанных выше результатов нам удалось добиться благодаря тому, что в настоящей работе мы получили множество несимметричных аналогов теорем Гурвица и Робинсона.

Следующий параграф посвящен формулировкам доказанных нами результатов, а их доказательства будут даны в §3. В заключительном §4 данной работы мы опишем возможные пути дальнейшего улучшения полученных нами результатов.

2 Формулировки результатов

Данный параграф мы начнем с формулировки необходимых определений.

Цепную дробь с неполными частными $a_0, a_1, a_2, \ \dots$ мы будем обозначать $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$. Если цепная дробь является периодической, то мы будем обозначать это с помощью подчеркивания периода чертой сверху, а нижний индекс у неполно частного (или у группы неполных частных) мы будем использовать для сокращенной записи цепных дробей, у которых несколько подряд идущих неполных частных принимают одно и то же значение. Например,

$$[0; \overline{1_2, 3}] = [0; \overline{1, 1, 3}] = [0; 1, 1, 3, 1, 1, 3, 1, 1, 3, \ \dots].$$

$n-$ной подходящей дробью числа $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ мы будем называть величину $[a_0; a_1, a_2, \ \dots \ , a_n] = \frac{p_n}{q_n}$. Хорошо известно, что при $n \geq 1$ верно, что

$$\frac{p_n}{q_n} - \alpha = \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n q_n^2},$$

где

$$\lambda_n = a_{n+1} + [0; a_{n+2}, \ \dots] + [0; a_n, \ \dots \ , a_1]. \tag{5}$$

Последняя формула обосновывает следующее вспомогательное определение. Рассматривание приближения $\frac{p_n}{q_n} - \alpha$ мы будем называть *разрезанием* цепной дроби α по неполному частному a_{n+1}.

Из вышесказанного очевидно, что изучать приближения числа α его подходящими дробями $\frac{p_n}{q_n}$ намного проще, чем его приближения какими-то произвольными $\frac{p}{q}$, что мотивирует ввести следующее определение, по аналогии с определением величины $S(\tau)$.

$$S_{cont}(\tau) = \sup \left\{ c : \forall \, \alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \ \ \exists^{\infty} \text{ подходящих дробей } \frac{p_n}{q_n} \text{ таких, что } \frac{-1}{cq_n^2} < \frac{p_n}{q_n} - \alpha < \frac{\tau}{cq_n^2} \right\}.$$

Это определение сразу же порождает вопрос: "да, функцию $S_{cont}(\tau)$ изучать проще, чем $S(\tau)$, но как эти функции вообще связаны между собой?"

К счастью, эти функции всегда равны друг другу, что обосновывается следующими двумя утверждениями.

Теорема 6. *Для любого иррационального α и любого неотрицательного r верно, что бесконечное количество рациональных приближений $\frac{p}{q}$, удовлетворяющих неравенству*

$$0 < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{1}{rq^2},$$

найдутся тогда и только тогда, когда найдется бесконечно много подходящих дробей $\frac{p_n}{q_n}$, удовлетворяющих тому же неравенству. Аналогичное верно и для "приближений с другой стороны".

Следствие 1. *Для каждого неотрицательного τ верно, что $S(\tau) = S_{cont}(\tau)$.*

Глядя на второй график из §1 естественно предположить, что функция $S(\tau)$ является непрерывной и неубывающей. Оказывается, так оно и есть. Более того, функция $S(\tau)$ удовлетворяет некоторому довольно простому функциональному уравнению. Это гарантирует нам наша следующая теорема.

Теорема 7. *На неотрицательной полуоси функция $S(\cdot)$ непрерывна и монотонно не убывает. Кроме того, при всех $\tau > 0$ верно, что*

$$S(\tau) = \tau S\left(\frac{1}{\tau}\right). \tag{6}$$

Следствие 2. *Пусть $0 < \tau_1 < \tau_2$. Тогда $\frac{S(\tau_1)}{\tau_1} \geq \frac{S(\tau_2)}{\tau_2}$*

Здесь нам хотелось бы отметить, что мы предполагаем, что теорема 7, в том или ином виде, была известна более ранним авторам, однако, насколько нам известно, в явном виде эти свойства никто не упоминал.

Очевидно, что благодаря равенству (6) для установления точного значения функции $S(\tau)$ на всей полупрямой нам достаточно установить ее значение на отрезке $[0; 1]$. В настоящей работе мы ограничимся изучением поведения функции $S(\tau)$ на подотрезке $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ и найдем ее точное значение для очень многих точек из этого отрезка.

В тех точках, в которых нам удастся посчитать точные значения, они будут значительно превосходить ранее известные нижние оценки, доказанный Альзером (см. второй график в §1), однако в тех точках, в которых мы не смогли посчитать точное значение, мы все равно можем, при необходимости, выписать нижние оценки, намного превосходящие результат Альзера. Для этого у нас есть два метода. Первый — найти для данной точки τ_1 ближайшую слева точку τ_0, значение функции $S(\cdot)$ в которой нам известно, и сослаться на неубывание функции. Второй — найти для данной точки τ_1 ближайшую справа точку τ_2, значение функции $S(\cdot)$ в которой нам известно, и сослаться на следствие 2. Иногда, лучшая оценка будет получаться с помощью первого метода, иногда — с помощью второго, но всегда полученные оценки будут лучше оценок Альзера, в чем можно убедиться глядя на второй график в §1.

Точное значение функции $S(\tau)$ мы будем находить с помощью нижесформулированой теоремы, указывающей на связь между задачей Сегре и несимметричными аналогами теорем Гурвица и Робинсона, определение которым мы дадим в следующих абзацах.

Несимметричным аналогом теоремы Гурвица с параметрами A и B мы будем называть утверждение о том, что для каждого иррационального α существует бесконечно много $p, q \in \mathbb{Z}$ таких, что

$$\frac{-1}{Aq^2} < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{1}{Bq^2}$$

и ни одну из этих констант нельзя увеличить при сохранении другой.

В предположении истинности несимметричного аналога теоремы Гурвица с параметрами A и B мы будем называть *правым аналогом теоремы Робинсона с параметрами A и R* утверждение о том, что для каждого положительного $\varepsilon < A$ и каждого иррационального α существует бесконечно много $p, q \in \mathbb{Z}$ таких, что

$$\frac{-1}{(A-\varepsilon)\,q^2} < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{1}{Rq^2}$$

причем нельзя совсем отказаться от ε в левом знаменателе (т.е. положить $\varepsilon = 0$) или увеличить константу R на некоторую, не зависящую от ε величину.

Аналогично мы определим *левый аналог теоремы Робинсона с параметрами L и B* как утверждение о том, что для каждого положительного $\varepsilon < B$ и каждого иррационального α существует бесконечно много $p, q \in \mathbb{Z}$ таких, что

$$\frac{-1}{Lq^2} < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{1}{(B-\varepsilon)\,q^2}$$

причем нельзя совсем отказаться от ε в правом знаменателе (т.е. положить $\varepsilon = 0$) или увеличить константу L на некоторую, не зависящую от ε величину.

Итак, мы готовы сформулировать теорему о связи только что введенных определений с задачей Сегре.

Теорема 8. *Справедливы следующие два утвеждения:*

1) Пусть для некоторых положительных чисел A, B, R таких, что $R > B$ доказана справедливость несимметричного аналога теоремы Гурвица и его правого аналога теоремы Робинсона. Тогда верно, что, во-первых, $S(\tau) = A$ для всех $\tau \in \left[\frac{A}{R}; \frac{A}{B}\right]$, во-вторых, точка $\tau = \frac{A}{B}$ является единственной достижимой точкой на этом отрезке, и в-третьих, левая граница данного отрезка оптимальна, то есть ни для какого положительного $\delta < \frac{A}{R}$ не верно, что $S\left(\frac{A}{R} - \delta\right) = A$.

2) Пусть для некоторых положительных чисел A, B, L таких, что $L > A$ доказана справедливость несимметричного аналога теоремы Гурвица и его левого аналога теоремы Робинсона. Тогда верно, что, во-первых, $S(\tau) = B\tau$ для всех $\tau \in \left[\frac{A}{B}; \frac{L}{B}\right]$, во-вторых, точка $\tau = \frac{A}{B}$ является единственной достижимой точкой на этом отрезке, и в-третьих, правая граница данного отрезка оптимальна, то есть ни для какого положительного δ не верно, что $S\left(\frac{L}{B} + \delta\right) = B\tau$.

Таким образом, для получения точных значений функции $S(\tau)$ во многих точках нам предстоит получить много аналогов теорем 1 и 4, что мы сейчас и сделаем, однако перед этим нам потребуется ввести еще несколько вспомогательных определений.

Как и ранее, пусть $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$. Положим

$$A(\alpha) = \limsup_{n\to\infty} \lambda_{2n}, \quad B(\alpha) = \limsup_{n\to\infty} \lambda_{2n+1}.$$

Это определение имеет очень понятный смысл. Величины $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ определяют наилучшие константы, с которыми число α может быть приближено своими подходящими дробями с двух различных сторон. Так как для изучения поведения функции $S(\tau)$ нам потребуется немного по-разному смотреть на точность приближений с разных сторон, то неполные частные числа α мы зачастую будем нумеровать следующим образом:

$$\alpha = [b_0; a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots].$$

Мы установили справедливость следующей любопытной теоремы, связывающей значения функций $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$, взятых от квадратичной иррациональности.

Теорема 9. *Пусть $\alpha \notin \mathbb{Q}$ — квадратичная иррациональность. Тогда $\frac{A(\alpha)}{B(\alpha)} \in \mathbb{Q}$.*

Структура дальнейших нескольких страниц данного параграфа такова. Как мы уже упоминали, нам удалось доказать несколько семейств теорем, аналогичных теоремам 1 и 4. Однако константы, участвующие в формулировках этих теорем, имеют очень неудобный вид, так что, прежде чем формулировать полученные нами результаты, мы определим несколько семейств чисел, которые и будут являться этими константами из формулировок, а так же дадим небольшие комментарии относительно того, откуда эти числа вообще возникают. Итак, приступим.

Пусть F_k — $k-$ое число Фибоначчи. Следующую широко известную лемму не сложно обосновать по индукции.

Лемма 1. *Для каждого целого $k \geq 0$ и каждого $x > 1$ верно, что*

$$[0; 1_k, x] = \frac{F_k \cdot x + F_{k-1}}{F_{k+1} \cdot x + F_k}.$$

Пусть $k \geq 0$ — целое. Положим $\alpha_k^1 = [2; \overline{1_{2k+1}, 2}]$. Благодаря лемме 1 нетрудно составить квадратное уравнение на α_k^1. Решив его, можно доказать следующую лемму:

Лемма 2. *При каждом целом $k \geq 0$ верно, что*

$$\alpha_k^1 = 1 + \sqrt{2 + \frac{F_{2k+1}}{F_{2k+2}}}.$$

Определим также величины $A_k^1, L_k^1, B_k^1, R_k^1$ и τ_k^1 следующим образом:

$$A_{2m+1}^1 = 1 + \frac{F_{2m} \cdot \alpha_{2m+1}^1 + F_{2m-1}}{F_{2m+1} \cdot \alpha_{2m+1}^1 + F_{2m}} + \frac{F_{2m+2} \cdot \alpha_{2m+1}^1 + F_{2m+1}}{F_{2m+3} \cdot \alpha_{2m+1}^1 + F_{2m+2}}, \qquad A_{2m}^1 = 1 + 2 \cdot \frac{F_{2m} \cdot \alpha_{2m}^1 + F_{2m-1}}{F_{2m+1} \cdot \alpha_{2m}^1 + F_{2m}},$$

$$L_{2m}^1 = 1 + \frac{F_{2m} \cdot \alpha_{2m}^1 + F_{2m-1}}{F_{2m+1} \cdot \alpha_{2m}^1 + F_{2m}} + \frac{F_{2m+2} \cdot \alpha_{2m}^1 + F_{2m+1}}{F_{2m+3} \cdot \alpha_{2m}^1 + F_{2m+2}}, \qquad L_{2m+1}^1 = 1 + 2 \cdot \frac{F_{2m+2} \cdot \alpha_{2m+1}^1 + F_{2m+1}}{F_{2m+3} \cdot \alpha_{2m+1}^1 + F_{2m+2}},$$

$$B_k^1 = 2 \cdot \alpha_k^1 - 2, \quad R_k^1 = \alpha_k^1 + \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_k^1 - 2} - 1} - 1, \quad \tau_k^1 = \frac{A_k^1}{B_k^1}.$$

Глядя на эти определения, совершенно не ясно, как ведут себя данные последовательности с ростом k, так что мы решили прояснить это в нашей следующей лемме, все утверждения из которой несложно доказать прямыми вычислениями.

Лемма 3. *Справедливы следующие три утверждения:*
1) Последовательность $A_0^1, L_0^1, A_1^1, L_1^1, A_2^1, L_2^1, \ \ldots$ *возрастает, стремясь к* $\sqrt{5}$.
2) Последовательность $B_0^1, R_1^1, B_1^1, R_2^1, B_2^1, \ \ldots$ *убывает, стремясь к* $1 + \sqrt{5}$.
3) Последовательность $\tau_0^1, \tau_1^1, \tau_2^1 \ \ldots$ *возрастает, стремясь к* $\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$.

Также, для иллюстрации только что описанных закономерностей, мы приводим следующую таблицу начальных членов введенных нами последовательностей.

k	0	1	2	3	4
A_k^1	1.732050...	1.959591...	2.160246...	2.192599...	2.224859...
L_k^1	1.943375...	2.159591...	2.192545...	2.224857...	2.229644...
R_k^1		3.357738...	3.253047...	3.238529...	3.236426...
B_k^1	3.464101...	3.265986...	3.240370...	3.236694...	3.236159...
τ_k^1	0.5	0.6	0.666666...	0.677419...	0.6875

Мы не приводим значение R_0^1 в этой таблице, потому что в формулировках последующих теорем эта величина участвовать не будет.

Мы смогли доказать, что только что введенные нами числа удовлетворяют следующим равенствам.

Лемма 4. *При каждом целом* $k \geq 0$ *справедливы следующие четыре равенства:*

$$1) \ A(\alpha_k^1) = A_k^1, \qquad 2) \ B(\alpha_k^1) = B_k^1,$$

$$3) \ \tau_{2m}^1 = \frac{F_{2m} + F_{2m+2}}{2 \cdot F_{2m+2}}, \qquad 4) \ \tau_{2m+1}^1 = \frac{5 \cdot F_{4m+4}}{2 \cdot F_{4m+4} + 2 \cdot F_{4m+6} + 3}.$$

Отметим, что из равенств 1) и 2), а также теоремы 9 следует, что величины τ_k^1 рациональны, что априори далеко не очевидно. Однако, равенства 3) и 4) леммы 4 помогают нам установить явный вид этих рациональных чисел.

Итак, мы, наконец, готовы сформулировать наши аналоги теорем Гурвица и Робинсона.

Теорема 10. *Справедливы следующие три утверждения:*

1) При каждом целом $k \geq 0$ *для каждого* $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \ \ \exists^\infty \ p, q \in \mathbb{Z}$ *таких, что*

$$\frac{-1}{A_k^1 q^2} < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{1}{B_k^1 q^2}. \tag{7}$$

Более того, нельзя заменить величину A_k^1 *слева на какое-либо большее число, оставив при этом* B_k^1 *справа, а также нельзя заменить величину* B_k^1 *справа на какое-либо большее число, оставив при этом* A_k^1 *слева.*

2) При каждом целом $k \geq 1$ для каждого положительного $\varepsilon < A_k^1$ и каждого иррационального α $\exists^\infty$ $p, q \in \mathbb{Z}$ таких, что

$$\frac{-1}{(A_k^1 - \varepsilon)\, q^2} < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{1}{R_k^1 q^2}. \tag{8}$$

Более того, нельзя совсем отказаться от ε слева (т.е. положить $\varepsilon = 0$) оставив при этом R_k^1 справа , а также нельзя увеличить R_k^1 справа на некоторую, не зависящую от ε константу, оставив при этом $A_k^1 - \varepsilon$ слева.

3) При каждом целом $k \geq 0$ для каждого положительного $\varepsilon < B_k^1$ и каждого иррационального α $\exists^\infty$ $p, q \in \mathbb{Z}$ таких, что

$$\frac{-1}{L_k^1 q^2} < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{1}{(B_k^1 - \varepsilon)\, q^2}. \tag{9}$$

Более того, нельзя совсем отказаться от ε справа (т.е. положить $\varepsilon = 0$) оставив при этом L_k^1 слева, а также нельзя увеличить L_k^1 слева на некоторую, не зависящую от ε константу, оставив при этом $B_k^1 - \varepsilon$ справа .

Видно, что первый пункт теоремы 10 дает нам целую серию несимметричных аналогов теоремы Гурвица, так как ни одну из границ в неравенстве (7) нельзя улучшить при сохранении другой. Однако, если разрешить ослабить одну из них на произвольно малую величину ε, то другую можно будет усилить на независящую от ε константу, о чем нам говорят неравенства (8) и (9). Так что в этом смысле, второй и третий пункты теоремы 10 являются обобщениями теоремы Робинсона.

С помощью теорем 8 и 10 мы можем выписать точное значение функции $S(\tau)$ на многих подотрезках отрезка $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Однако, одна из оставшиеся между этими отрезками “дыр” будет довольно широкой, так что мы считаем нужным ввести еще один ряд параметров и сформулировать еще одну серию аналогов теорем 1 и 4, чтобы “разрядить” ее. Итак, приступим.

Определим последовательность целых чисел G_k следующим образом: $G_0 = 0, G_1 = 1$ и для каждого k верно, что $G_k = 4G_{k-1} - G_{k-2}$. С помощью стандартной техники нетрудно проверить, что для каждого $k \in \mathbb{Z}$ верно, что

$$G_k = \frac{\left(2 + \sqrt{3}\right)^k - \left(2 - \sqrt{3}\right)^k}{2\sqrt{3}}. \tag{10}$$

По индукции нетрудно доказать следующую лемму, схожую с леммой 1:

Лемма 5. *Для каждого целого $k \geq 0$ и каждого $x > 1$ верно, что*

$$[0; (1,2)_k\,, x] = \frac{2G_k \cdot x + G_k - G_{k-1}}{(G_{k+1} - G_k) \cdot x + G_k}.$$

Пусть $k \geq 0$ — целое. Положим $\alpha_k^2 = [1; \overline{(1,2)_k\,, 1, 1}]$. Благодаря лемме 5 нетрудно составить квадратное уравнение на α_k^2. Решив его, можно доказать следующую лемму:

Лемма 6. *При каждом целом $k \geq 0$ верно, что*

$$\alpha_k^2 = \frac{1 + \sqrt{5 + 4 \cdot \frac{G_k}{G_{k+1}}}}{2}.$$

Определим также величины $B_k^2, R_k^2, A_k^2, L_k^2$ и τ_k^2 следующим образом:

$$B_{2m}^2 = 2 + \frac{2G_m \cdot \left(1 + \frac{1}{\alpha_{2m}^2}\right) + G_m - G_{m-1}}{(G_{m+1} - G_m) \cdot \left(1 + \frac{1}{\alpha_{2m}^2}\right) + G_m} + \frac{2G_{m-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{\alpha_{2m}^2}\right) + G_{m-1} - G_{m-2}}{(G_m - G_{m-1}) \cdot \left(1 + \frac{1}{\alpha_{2m}^2}\right) + G_{m-1}},$$

$$B_{2m+1}^2 = 2 + 2 \cdot \frac{2G_m \cdot \left(1 + \frac{1}{\alpha_{2m+1}^2}\right) + G_m - G_{m-1}}{(G_{m+1} - G_m) \cdot \left(1 + \frac{1}{\alpha_{2m+1}^2}\right) + G_m},$$

$$R_{2m+1}^2 = 2 + \frac{2G_m \cdot \left(1 + \frac{1}{\alpha_{2m+1}^2}\right) + G_m - G_{m-1}}{(G_{m+1} - G_m) \cdot \left(1 + \frac{1}{\alpha_{2m+1}^2}\right) + G_m} + \frac{2G_{m+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{\alpha_{2m+1}^2}\right) + G_{m+1} - G_m}{(G_{m+2} - G_{m+1}) \cdot \left(1 + \frac{1}{\alpha_{2m+1}^2}\right) + G_{m+1}},$$

$$R_{2m}^2 = 2 + 2 \cdot \frac{2G_m \cdot \left(1 + \frac{1}{\alpha_{2m}^2}\right) + G_m - G_{m-1}}{(G_{m+1} - G_m) \cdot \left(1 + \frac{1}{\alpha_{2m}^2}\right) + G_m},$$

$$A_k^2 = \frac{1}{\alpha_k^2} + \frac{1}{\alpha_k^2 - 1}, \quad L_k^2 = \frac{1}{\alpha_k^2} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{1}{\alpha_k^2 - 1} - 1} - 2}, \quad \tau_k^2 = \frac{A_k^2}{B_k^2}.$$

Глядя на эти определения, совершенно не ясно, как ведут себя данные последовательности с ростом k, так что мы решили прояснить это в нашей следующей лемме, аналогичной лемме 3, все утверждения из которой также несложно доказать прямыми вычислениями.

Лемма 7. *Справедливы следующие три утверждения:*
1) Последовательность $A_0^2, L_1^2, A_1^2, L_2^2, A_2^2, \ \ldots$ *убывает, стремясь к* $\frac{3+5\sqrt{3}}{6}$.
2) Последовательность $B_0^2, R_0^2, B_1^2, R_1^2, B_2^2, \ \ldots$ *возрастает, стремясь к* $2\sqrt{3}$.
3) Последовательность $\tau_0^2, \tau_1^2, \tau_2^2 \ \ldots$ *убывает, стремясь к* $\frac{5+\sqrt{3}}{12}$.

Также, для иллюстрации только что описанных закономерностей, мы приводим следующую таблицу начальных членов введенных нами последовательностей.

k	0	1	2	3	4
A_k^2	2.236067…	1.959591…	1.944521…	1.943457…	1.943381…
L_k^2		2.159591…	1.957188…	1.944359…	1.943446…
R_k^2	3.236067…	3.357738…	3.449627…	3.456349…	3.463061…
B_k^2	2.236067…	3.265986…	3.358718…	3.449637…	3.456349…
τ_k^2	1	0.6	0.578947…	0.563380…	0.562264

Мы не приводим значение L_0^2 в этой таблице, потому что в формулировках последующих теорем эта величина участвовать не будет.

Мы смогли доказать, что только что введенные нами числа удовлетворяют следующим равенствам, аналогичным равенствам из леммы 4.

Лемма 8. *При каждом целом $k \geq 0$ справедливы следующие четыре равенства:*

$$1)\ A(\alpha_k^2) = A_k^2, \qquad 2)\ B(\alpha_k^2) = B_k^2,$$

$$3)\ \tau_{2m}^2 = \frac{G_{2m} + 4G_{2m+1} + 2}{6\,(G_{2m} + G_{2m+1})}, \qquad 4)\ \tau_{2m+1}^2 = \frac{G_{2m+2}\,(4G_{2m+1} + 5G_{2m+2})}{2\,(G_{2m+1} + G_{2m+2})\,(G_{2m+1} + 4G_{2m+2} - 1)}.$$

Теперь мы готовы сформулировать еще одну серию аналогов теорем Гурвица и Робинсона.

Теорема 11. *Справедливы следующие три утверждения:*

1) При каждом целом $k \geq 0$ для каждого $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ $\exists^\infty$ $p, q \in \mathbb{Z}$ таких, что

$$\frac{-1}{A_k^2 q^2} < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{1}{B_k^2 q^2}. \tag{11}$$

Более того, нельзя заменить величину A_k^2 слева на какое-либо большее число, оставив при этом B_k^2 справа, а также нельзя заменить величину B_k^2 справа на какое-либо большее число, оставив при этом A_k^2 слева.

2) При каждом целом $k \geq 0$ для каждого положительного $\varepsilon < A_k^2$ и каждого иррационального α $\exists^\infty$ $p, q \in \mathbb{Z}$ таких, что

$$\frac{-1}{(A_k^2 - \varepsilon)\,q^2} < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{1}{R_k^2 q^2}. \tag{12}$$

Более того, нельзя совсем отказаться от ε слева (т.е. положить $\varepsilon = 0$) оставив при этом R_k^2 справа , а также нельзя увеличить R_k^2 справа на некоторую, не зависящую от ε константу, оставив при этом $A_k^2 - \varepsilon$ слева.

3) При каждом целом $k \geq 1$ для каждого положительного $\varepsilon < B_k^2$ и каждого иррационального α $\exists^\infty$ $p, q \in \mathbb{Z}$ таких, что

$$\frac{-1}{L_k^2 q^2} < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{1}{(B_k^2 - \varepsilon)\,q^2}. \tag{13}$$

Более того, нельзя совсем отказаться от ε справа (т.е. положить $\varepsilon = 0$) оставив при этом L_k^2 слева, а также нельзя увеличить L_k^2 слева на некоторую, не зависящую от ε константу, оставив при этом $B_k^2 - \varepsilon$ справа .

Отметим, что формулировка данной теоремы при $k = 0$ в точности совпадает с формулировками теорем 1 и 4, так что в этом смысле наша теорема является их прямым обобщением.

Теперь сформулируем следствия о величине функции $S(\tau)$, получающиеся применением теоремы 8 к теоремам 10 и 11.

Теорема 12. *Справедливы следующие четыре утверждения:*

1) При каждом $\tau \in \left[\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}; 1\right]$ верно, что $S(\tau) = \sqrt{5}$. Единственной достижимой точкой на этом отрезке является $\tau = 1$. Левая граница отрезка, на котором соблюдается указанный закон поведения функции $S(\tau)$, неулучшаема.

2) При каждом $\tau \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5+\sqrt{3}}{12}\right]$ верно, что $S(\tau) = 2\sqrt{3}\tau$. Единственной достижимой точкой на этом отрезке является $\tau = \frac{1}{2}$. Правая граница отрезка неулучшаема.

3) Пусть фиксировано некоторое $i \in \{1, 2\}$ и произвольное целое $k \geq 1$. Тогда при каждом $\tau \in \left[\frac{A_k^i}{R_k^i}; \frac{A_k^i}{B_k^i}\right]$ верно, что $S(\tau) = A_k^i$. Единственной достижимой точкой на этом отрезке является $\tau = \frac{A_k^i}{B_k^i}$. Границы этого отрезка неулучшаемы.

4) Пусть фиксировано некоторое $i \in \{1, 2\}$ и произвольное целое $k \geq 1$. Тогда при каждом $\tau \in \left[\frac{A_k^i}{B_k^i}; \frac{L_k^i}{B_k^i}\right]$ верно, что $S(\tau) = B_k^i\tau$. Единственной достижимой точкой на этом отрезке является $\tau = \frac{A_k^i}{B_k^i}$. Границы этого отрезка неулучшаемы.

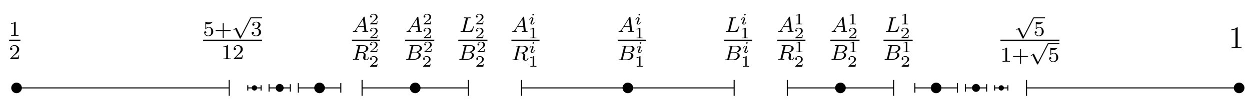
Поймем, как устроено подмножество отрезка, на котором теорема 12 дает точное значение функции $S(\tau)$. Пункты 1) и 2) находят функцию $S(\tau)$ около концевых точек рассматриваемого нами отрезка.

Пункты 3) и 4) при $i = 1$ находят $S(\tau)$ на семействе отрезков $\left[\frac{A_k^1}{R_k^1}; \frac{L_k^1}{B_k^1}\right]$, которые с ростом k сдвигаются вправо, никогда не пересекаются друг с другом и сходятся при $k \to \infty$ к точке $\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$ — правой границе отрезка из первого пункта.

Пункты 3) и 4) при $i = 2$ находят $S(\tau)$ на семействе отрезков $\left[\frac{A_k^2}{R_k^2}; \frac{L_k^2}{B_k^2}\right]$, которые с ростом k сдвигаются влево, никогда не пересекаются друг с другом и сходятся при $k \to \infty$ к точке $\frac{5+\sqrt{3}}{12}$ — левой границе отрезка из второго пункта.

Как расположены друг относительно друга семейства отрезков из 3) и 4) пункта при i равным одному и двум? Эти два семейства отрезков имеют общее начало, т.е. отрезок $\left[\frac{A_1^2}{R_1^2}; \frac{L_1^2}{B_1^2}\right]$ совпадает с отрезком $\left[\frac{A_1^1}{R_1^1}; \frac{L_1^1}{B_1^1}\right]$. Но, при $k > 1$, как уже было отмечено, отрезки, отвечающие значению $i = 1$, начинают сдвигаться вправо, а отрезки, отвечающие значению $i = 2$, — влево.

Эти закономерности схематично отражены на следующем рисунке, масштаб на котором не соблюден. Жирными отмечены точки, в которых $S(\tau)$ достижимо.



Насколько большую часть отрезка $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ покрывают вышеописанные два семейства отрезков? Сложив длины отрезков $\left[\frac{1}{2}; \frac{5+\sqrt{3}}{12}\right]$, $\left[\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}; 1\right]$, $\left[\frac{A_k^2}{R_k^2}; \frac{L_k^2}{B_k^2}\right]$, при $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, а также $\left[\frac{A_k^1}{R_k^1}; \frac{L_k^1}{B_k^1}\right]$, при $k \in \{2, 3, 4, 5\}$, можно убедиться, что сумма равна $0.49508\ldots$, а значит, наши отрезки покрывают более 99% отрезка $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, как и было заявлено во введении.

В заключение данного параграфа нам остается сформулировать наши результаты о функции Робинсона $R(\varepsilon)$.

В следующей теореме мы формулируем найденную нами связь данной функции с уже изученной нами функцией $S(\tau)$.

Теорема 13. *Пусть $\varepsilon < \sqrt{5}$ — произвольное положительное число. Положим*

$$T(\varepsilon) = \left\{\tau > 0 : \left(S(\tau) > \sqrt{5} - \varepsilon\right) \text{ или } \left(S(\tau) = \sqrt{5} - \varepsilon \text{ и достижимо}\right)\right\}.$$

Положим $t(\varepsilon) = \inf T(\varepsilon)$. Тогда верно, что $R(\varepsilon) = \frac{\sqrt{5}-\varepsilon}{t(\varepsilon)}$.

К сожалению, наших знаний о поведении функции $S(\tau)$ пока не хватает, чтобы с помощью теоремы 13 для каждого ε в явном виде вычислять $R(\varepsilon)$ или хотя бы указать наибольшую константу c в теореме 5.

Однако, воспользовавшись иным, несколько менее прямым методом, мы смогли доказать следующую теорему:

Теорема 14. *Для любого положительного $\varepsilon < \sqrt{5}$ верно, что*

$$R(\varepsilon) \geq 1 + \sqrt{5} + \left(\frac{10 + 2\sqrt{5}}{45}\right)\varepsilon^2. \tag{14}$$

Константа перед ε^2 оптимальна в том смысле, что для любой $c > \frac{10+2\sqrt{5}}{45}$ верно, что найдутся сколь угодно малые положительные ε такие, что $R(\varepsilon) < 1 + \sqrt{5} + c\varepsilon^2$.

Видно, что наша теорема, как уже было упомянуто во введении, значительно сильнее заявленной (но неверно доказанной!) Тонгом теоремы 5.

Следующий параграф мы посвятим доказательствам всех сформулированных здесь теорем. В заключительном §4 мы сформулируем нашу гипотезу, которую пока не удалось доказать, о том, какие еще аналоги теорем Гурвица и Робинсона существуют и как ведет себя функция $S(\tau)$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

3 Доказательства результатов

В настоящем параграфе мы последовательно докажем все утверждения, сформулированные в §2. Доказательству каждого утверждения мы посвятим отдельный подпараграф.

3.1 Доказательство теоремы 6

Пусть нам дано произвольное иррациональное число α и произвольное положительное число r. Ясно, что нам достаточно доказать, что если существует бесконечно много рациональных приближений $\frac{p}{q}$, удовлетворяющих неравенству

$$0 < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{1}{rq^2} \tag{15}$$

то найдется и бесконечно много подходящих дробей $\frac{p_n}{q_n}$, удовлетворяющих тому же неравенству.

Отметим, что подходящая дробь $\frac{p_n}{q_n}$ больше α тогда и только тогда, когда $n = 2m+1$. Рассмотрим последовательность $\{q_1, q_3, q_5, \ \dots\}$. Образуем из нее новую последовательность $\{Q_1, Q_2, Q_3, \ \dots\}$ следующим образом: между любыми двумя соседними элементами q_{2m-1} и q_{2m+1} исходной последовательности мы допишем числа

$$q_{2m-1} + q_{2m}, \quad q_{2m-1} + 2q_{2m}, \quad \dots , \quad q_{2m-1} + (a_{2m+1} - 1) \cdot q_{2m} = q_{2m+1} - q_{2m}.$$

Аналогичным образом построим последовательность $\{P_1, P_2, P_3, \ \dots\}$.

Про числа $\frac{P_n}{Q_n}$ известно (см., например, [9]), что, в некотором смысле, они и только они являются наилучшими односторонними приближениями. Более формально, известно, что для любого n, любого q, лежащего между Q_n и Q_{n+1}, и любого p такого, что $\frac{p}{q} > \alpha$ верно, что

$$0 < \left(\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \alpha\right) \cdot Q_{n+1} < \left(\frac{P_n}{Q_n} - \alpha\right) \cdot Q_n < \left(\frac{p}{q} - \alpha\right) \cdot q \tag{16}$$

Итак, пусть $\frac{p}{q}$ — произвольное рациональное число, удовлетворяющее неравенству (15). Пусть $Q_n < q < Q_{n+1}$. Из неравенства (16) следует, что

$$\left(\frac{P_n}{Q_n} - \alpha\right) \cdot Q_n^2 < \left(\frac{p}{q} - \alpha\right) \cdot q^2 < \frac{1}{r}.$$

Итак, мы показали, что если существует бесконечно много рациональных чисел $\frac{p}{q}$, удовлетворяющих неравенству (15), то для бесконечно многих n числа $\frac{P_n}{Q_n}$ удовлетворяют тому же неравенству. Это еще не совсем то, что мы хотели доказать, так как в последовательности $\{Q_1, Q_2, Q_3, \ \dots\}$ есть не только знаменатели подходящих дробей, но и некоторые другие числа.

Пусть рациональное число $\frac{P_n}{Q_n}$ удовлетворяет неравенству (15). И пусть число k таково, что $Q_n = q_{2m-1} + k \cdot q_{2m}$. Введем функцию

$$f(k) = \left(\frac{p_{2m-1} + k \cdot p_{2m}}{q_{2m-1} + k \cdot q_{2m}} - \alpha\right) \cdot (q_{2m-1} + k \cdot q_{2m})^2 .$$

Нетрудно убедиться, что

$$f(k) = q_{2m}^2 \cdot \left(\frac{p_{2m}}{q_{2m}} - \alpha\right) \cdot k^2 + q_{2m-1} \cdot q_{2m} \cdot \left(\frac{p_{2m}}{q_{2m}} + \frac{p_{2m-1}}{q_{2m-1}} - 2\alpha\right) \cdot k + q_{2m-1}^2 \cdot \left(\frac{p_{2m-1}}{q_{2m-1}} - \alpha\right).$$

Из последнего равенства видно, что $f(k)$ является параболой, ветви которой направлены вниз, т.е. $f(k)$ является выпуклой функцией. Так как $\frac{p_{2m-1}}{q_{2m-1}} > \alpha$ и $\frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}} > \alpha$, то $f(0) > 0$ и $f(a_{2m+1}) > 0$. В силу выпуклости это означает, что $f(k) > 0$ при всех $k \in [0; a_{2m+1}]$, а также что минимум функции $f(k)$ на отрезке $[0; a_{2m+1}]$ достигается в одной из двух граничных точек. Без ограничения общности, пусть в правой. Это означает, что

$$\left(\frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}} - \alpha\right) \cdot q_{2m+1}^2 < \left(\frac{P_n}{Q_n} - \alpha\right) \cdot Q_n^2 < \frac{1}{r},$$

что и завершает доказательство всей теоремы.

3.2 Доказательство следствия 1

Данное следствие вытекает из теоремы 6 практически очевидным образом. Действительно, пусть для некоторого иррационального α, некоторого $\tau \geq 0$ и некоторого положительного c верно, что существует бесконечно много рациональных чисел $\frac{p}{q}$ таких, что

$$\frac{-1}{cq^2} < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{\tau}{cq^2}.$$

Без ограничения общности, можно считать, что из этого следует, что что существует бесконечно много рациональных чисел $\frac{p}{q}$ таких, что

$$\frac{-1}{cq^2} < \frac{p}{q} - \alpha < 0.$$

В силу теоремы 6 из этого следует, что существует бесконечно много подходящих дробей $\frac{p_n}{q_n}$, удовлетворяющих тому же неравенству.

А это, в свою очередь означает, что множества тех c, супремум по которым берется в определении величин $S(\tau)$ и $S_{cont}(\tau)$, полностью совпадают, что завершает доказательство следствия 1.

3.3 Доказательство теоремы 7

Монотонное неубывание практически очевидно. Действительно, пусть $\tau_2 > \tau_1$ и некоторое положительное c лежит в множестве, супремум по которому берется при определении $S(\tau_1)$. Покажем, что оно лежит и в множестве, супремум по которому берется при определении $S(\tau_2)$. Это верно, в силу того, что для любого q верно, что

$$\frac{\tau_1}{cq^2} < \frac{\tau_2}{cq^2}.$$

Равенство $S(\tau) = \tau S\left(\frac{1}{\tau}\right)$, верное для всех $\tau > 0$ доказывается практически так же. Нужно лишь заметить, что

$$\left(\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \;\; \exists^{\infty}\; p, q \in \mathbb{Z} \text{ таких, что } \frac{-1}{cq^2} < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{\tau}{cq^2}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \;\; \exists^{\infty}\; p, q \in \mathbb{Z} \text{ таких, что } \frac{-\tau}{cq^2} < \frac{-p}{q} - (-\alpha) < \frac{1}{cq^2}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\forall\, \alpha' \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \;\; \exists^{\infty}\; p', q \in \mathbb{Z} \text{ таких, что } \frac{-1}{\frac{1}{\tau}cq^2} < \frac{p'}{q} - \alpha' < \frac{\frac{1}{\tau}}{\frac{1}{\tau}cq^2}\right),$$

а значит, число c лежит в множестве, определяющем $S(\tau)$ тогда и только тогда, когда число $\frac{c}{\tau}$ лежит в множестве, определяющем $S\left(\frac{1}{\tau}\right)$.

Доказательство непрерывности $S(\tau)$ можно произвести непосредственно, так же, как мы доказали предыдущие два утверждения из этой теоремы, но мы поступим более изощренным способом, объяснив, что непрерывность следует из уже доказанных свойств. Действительно, предположим, что в некоторой точке $\tau_0 \neq 0$ функция $S(\tau)$ не непрерывна. Так как эта функция монотонна, то в точке τ_0 она имеет левый и правые пределы, которые мы обозначим $S(\tau_0 - 0)$ и $S(\tau_0 + 0)$ соответственно, причем правый строго больше левого. Но благодаря уже доказанному функциональному уравнению для $S(\tau)$ мы видим, что

$$S\left(\frac{1}{\tau_0} - 0\right) = \frac{S(\tau_0 + 0)}{\tau_0} > \frac{S(\tau_0 - 0)}{\tau_0} = S\left(\frac{1}{\tau_0} + 0\right),$$

т.е. предположение о наличии у функции $S(\tau)$ разрыва в ненулевой точке противоречит ее монотонности.

Непрерывность этой функции в нуле обосновывается с помощью доказанной Сегре теоремы 2. Действительно, в силу монотонности нашей функции мы можем утверждать, что

$$\lim_{\tau \to 0+} S(\tau) = \lim_{n \to \infty} S\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \sqrt{1 + \frac{4}{n}} = 1,$$

т.е. что этот предел совпадает с точным значением $S(0)$, что и завершает доказательство теоремы 7.

3.4 Доказательство следствия 2

Пусть $0 < \tau_1 < \tau_2$. В силу монотонности функции $S(\tau)$, а также уравнения (6) верно, что

$$\frac{S(\tau_1)}{\tau_1} = S\left(\frac{1}{\tau_1}\right) \geq S\left(\frac{1}{\tau_2}\right) = \frac{S(\tau_2)}{\tau_2}.$$

3.5 Доказательство теоремы 8

Доказательства первого и второго пунктов этой теоремы будут очень похожи между собой, однако для удобства мы решили посвятить каждому из них свой отдельный подпараграф.

3.5.1 Доказательство первого пункта теоремы 8

Из справедливости несимметричного аналога теоремы Гурвица с параметрами A и B следует, что число A лежит в множестве, супремум по которому берется при определении величины $S\left(\frac{A}{B}\right)$, а никакое большее число не лежит. Это означает, что $S\left(\frac{A}{B}\right) = A$ и точка $\frac{A}{B}$ является достижимой.

Из монотонности функции $S(\tau)$ теперь следует, что для всех $\tau \in \left[\frac{A}{R}; \frac{A}{B}\right]$ верно, что $S(\tau) \leq A$. Покажем справедливость обратного неравенства $S(\tau) \geq A$ на этом отрезке. Для этого надо показать, что для каждого $\varepsilon < A$ верно, что для каждого $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ существует бесконечно много рациональных чисел $\frac{p}{q}$ таких, что

$$\frac{-1}{(A - \varepsilon)\, q^2} < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{1}{\frac{A-\varepsilon}{\tau} q^2}. \tag{17}$$

Так как при данном выборе τ верно, что $\frac{A-\varepsilon}{\tau} < R$, то справедливость неравенства (17) следует из справедливости правого аналога теоремы Робинсона с параметрами A и R. Итак, мы доказали, что $S(\tau) = A$ на рассматриваемом отрезке.

Предположим достижимость некоторой точки $\tau \in \left[\frac{A}{R}; \frac{A}{B}\right)$, т.е. тот факт, что при таком τ в (17) можно подставить $\varepsilon = 0$. Так как при таком τ, конечно, $\frac{A}{\tau} > B$, то мы получаем противоречие с несимметричным аналогом теоремы Гурвица с параметрами A и B, утверждающим, в чатности, что константа B неулучшаема. Таким образом, все точки рассматриваемого отрезка за исключением его правой границы недостижимы.

Осталось проверить оптимальность левой границы. Предположим, что при некотором положительном $\delta < \frac{A}{R}$ неравенство (17) справедливо и при $\tau = \frac{A}{R} - \delta$. Можно проверить, что при малых ε правая часть неравенства (17) будет превосходить R на некоторую фиксированную, не зависящую от ε величину, чего не может быть в силу справедливости правого аналога теоремы Робинсона с параметрами A и R. Таким образом, левая граница и правда оптимальна.

Первый пункт теоремы 8 полностью доказан.

3.5.2 Доказательство второго пункта теоремы 8

Из справедливости несимметричного аналога теоремы Гурвица с параметрами A и B следует, что число A лежит в множестве, супремум по которому берется при определении величины $S\left(\frac{A}{B}\right)$, а никакое большее число не лежит. Это означает, что $S\left(\frac{A}{B}\right) = A$ и точка $\frac{A}{B}$ является достижимой.

Теперь, из равенства $S\left(\frac{A}{B}\right) = A$ с помощью следствия 2 мы получаем, что для всех $\tau \in \left[\frac{A}{B}; \frac{L}{B}\right]$ верно, что $S(\tau) \leq B\tau$.

Проверим теперь справедливость обратного неравенства $S(\tau) \geq B\tau$ на рассматриваемом отрезке. Для этого достаточно доказать, что для каждого $\varepsilon < B\tau$ верно, что для каждого $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ существует бесконечно много рациональных чисел $\frac{p}{q}$ таких, что

$$\frac{-1}{(B\tau - \varepsilon)\, q^2} < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{1}{\left(B - \frac{\varepsilon}{\tau}\right) q^2}. \tag{18}$$

Так как при данном выборе параметров верно, что $B\tau - \varepsilon < L$, то справедливость неравенства (18) вытекает из справедливости левого аналога теоремы Робинсона с параметрами B и L.

Итак, мы показали, что $S(\tau) = B\tau$ для всех $\tau \in \left[\frac{A}{B}; \frac{L}{B}\right]$.

Предположим достижимость некоторой точки $\tau \in \left(\frac{A}{B}; \frac{L}{B}\right]$, т.е. тот факт, что при таком τ в (18) можно подставить $\varepsilon = 0$. Так как при таком τ, конечно, $B\tau > A$, то мы получаем противоречие с несимметричным аналогом теоремы Гурвица с параметрами A и B, утверждающим, в чатности, что константа A неулучшаема. Таким образом, все точки рассматриваемого отрезка за исключением его левой границы недостижимы.

Осталось проверить оптимальность правой границы. Предположим, что при некотором $\delta > 0$ неравенство (18) справедливо и при $\tau = \frac{L}{B} + \delta$. Можно проверить, что при малых ε левая часть неравенства (18) будет превосходить L на некоторую фиксированную, не зависящую от ε величину, чего не может быть в силу справедливости левого аналога теоремы Робинсона с параметрами L и B. Таким образом, левая граница и правда оптимальна.

Второй пункт теоремы 8 полностью доказан, а вместе с ним — и вся теорема.

3.6 Доказательство теоремы 9

Пусть $\alpha \notin \mathbb{Q}$ — произвольная квадратичная иррациональность. Известно, что неполные частные α с некоторого момента периодичны. Положим

$$\alpha = [a_0; a_1, \ \dots \ , a_k, \overline{c_1, c_2, \ \dots \ , c_m}] .$$

Определим при каждом $1 \leq i \leq m$ величины α_i, α_i' и C_i следующим образом

$$\alpha_i = [c_i; c_{i+1}, \ \dots \ , c_m, \overline{c_1, c_2, \ \dots \ , c_m}] ,$$

$$\alpha_i' = [0; c_{i-1}, \ \dots \ , c_1, \overline{c_m, c_{m-1}, \ \dots \ , c_1}] ,$$
$$C_i = \alpha_i + \alpha_i'.$$

Производя разрезы по довольно сильно удаленным от начала неполным частным числа α и глядя на формулу (5) нетрудно убедиться, что для некоторых i_A и i_B верно, что

$$A(\alpha) = C_{i_A}, \quad B(\alpha) = C_{i_B}.$$

Для доказательства того, что $\frac{A(\alpha)}{B(\alpha)} \in \mathbb{Q}$ мы докажем более общий факт о том, на самом деле при всех i, j верно, что $\frac{C_i}{C_j} \in \mathbb{Q}$. Доказывать это мы будем прямой проверкой эквивалентного, но более простого утверждения о том, что при каждом i верно, что $\frac{C_i}{C_{i+1}} \in \mathbb{Q}$.

Итак, пусть, без ограничения общности, $i \neq m$. Тогда

$$\frac{C_i}{C_{i+1}} = \frac{\alpha_i + \alpha_i'}{\alpha_{i+1} + \alpha_{i+1}'} = \frac{\alpha_i + \alpha_i'}{\frac{1}{\alpha_i - c_i} + \frac{1}{\alpha_i' + c_i}} = -c_i^2 + (\alpha_i - \alpha_i') \cdot c_i + \alpha_i \alpha_i'. \tag{19}$$

Известна теорема Галуа (см. [10]), утверждающая, что числа α_i и $-\alpha_i'$ являются корнями одного и того же квадратного уравнения с целыми коэффициентами, т.е. они сопряжены друг другу. По теореме Виета, $\alpha_i + (-\alpha_i')$ и $-\alpha_i \alpha_i'$ — рациональные числа. В силу цепочки равенств (19) из этого следует, что $\frac{C_i}{C_{i+1}}$ — рациональное число, что завершает доказательство теоремы.

3.7 Доказательство леммы 4

Для обоснования первого пункта этой леммы заметим, что разрезы, верхним пределом которых будет являться величина $A(\alpha_k^1)$ всегда делаются по неполным частным равным единице. Однако, эти единицы имеют различное окружение, так что надо понять, по какой именно единице внутри каждого периода $\overline{1_{2k+1}, 2}$ лучше производить разрез. С помощью стандартных арифметических вычислений (которые мы на протяжении всей статьи всегда будем опускать, чтобы не удлинять и без того длинный текст) можно убедиться, что разрез лучше производить по тем единицам, которые наиболее сильно удалены от соседствующих с ними двоек.

При $k = 2m$ такая "центральная" единица одна внутри каждого периода. Сделав разрез по ней убеждаемся, что

$$A\left(\alpha_{2m}^1\right) = 1 + \left[0; 1_{2m}, \overline{2, 1_{4m+1}}\right] + \left[0; 1_{2m}, \overline{2, 1_{4m+1}}\right] .$$

Благодаря леммам 1 и 2 нетрудно убедиться, что только что полученное выражение для $A\left(\alpha_{2m}^1\right)$ в точности совпадает с определением величины A_{2m}^1.

Случай $k = 2m+1$ разбирается, в целом, аналогично. Правда в нем таких "центральных" единиц внутри каждого периода будет две, разрезы по которым в пределе абсолютно эквивалентны. Сделав разрез по любой из них убеждаемся, что

$$A\left(\alpha_{2m+1}^1\right) = 1 + \left[0; 1_{2m}, \overline{2, 1_{4m+3}}\right] + \left[0; 1_{2m+2}, \overline{2, 1_{4m+3}}\right],$$

что, опять же, в точность совпадает с A_{2m+1}^1, если воспользоваться леммами 1 и 2.

Для обоснования второго равенства из этой леммы мы заметим, что большинство разрезов, верхний предел которых берется при определении величины $B\left(\alpha_k^1\right)$ делаются по неполным частным равным единице. Но, внутри каждого периода $\overline{1_{2k+1}, 2}$ есть ровно один разрез по двойке. С помощью стандартных арифметических расчетов можно проверить, что именно этот разрез и будет самым лучшим в пределе. То есть

$$B\left(\alpha_k^1\right) = 2 + \left[0; \overline{1_{2k+1}, 2}\right] + \left[0; \overline{1_{2k+1}, 2}\right].$$

Видно, что это выражение в точности совпадает с определением B_k^1.

Равенства 3) и 4) настоящей леммы можно проверить прямым вычислением: действительно, так как для чисел Фибоначчи существует "замкнутая" формула Бине, то и для чисел τ_k^1 мы имеем полностью "замкнутую" формулу. Осталось "лишь" упростить ее до требуемого в лемме вида.

3.8 Доказательство теоремы 10

Доказательство данной теоремы будет основано на следующей идее: мы будем разбивать все иррациональные α на классы, в зависимости от того, встречается ли какая-то заданная конечная последовательность натуральных чисел среди последовательности неполных частных α бесконечно много раз или нет. Для каждого выделенного класса мы с помощью непосредственного подсчета по формуле (5) убедимся, что для каждого α из данного класса неравенства (7)-(9) верны. А после приведем пример некоторых конкретных α, для которых эти неравенства не могут быть усилены.

Итак, приступим. Пусть $\alpha = [b_0; a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots]$.

Случай 1. $\exists^\infty a_n \geq 3$.

В этом случае, делая разрезы по таким a_n, которые не меньше тройки, мы убеждаемся, что $A(\alpha) \geq 3$. Видим, что для таких α неравенства (7)-(9) верны, так как точность только что найденных приближений намного лучше требуемой в теореме 10. Действительно,

$$3 > \sqrt{5} = \lim_{m\to\infty} L_m^1 = \lim_{m\to\infty} A_m^1,$$

а значит, в силу возрастания последовательностей L_m^1 и A_m^1 верно, что при каждом фиксированном $k \in \mathbb{N}$ верно, что $3 > L_k^1$, и $3 > A_k^1$, и уж тем более, $3 > A_k^1 - \varepsilon$. В дальнейшем, подобные места мы будем расписывать менее подробно.

Итак, мы проверили, что для тех α, которые подпадают под случай 1 неравенства (7)-(9) верны. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие α, которые этому случаю не удовлетворяют.

Случай 2. $\exists^\infty\, b_n \geq 3$.

В этом случае, делая разрезы по таким b_n, которые не меньше тройки, мы убеждаемся, что $B(\alpha) \geq 3 + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+1} = \frac{11}{3}$, так как соседствующие с такими b_n числа a_n и a_{n+1} не могут быть больше двойки в силу случая 1.

Так как $\frac{11}{3} > 3.464101... = B_0^1$ — первого члена убывающей последовательности $B_0^1, R_1^1, B_1^1, R_2^1, B_2^1, \ \ldots$, то и для таких α неравенства (7)-(9) верны. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие α, которые не удовлетворяют первым двум случаям.

Случай 3. $\exists^\infty\, a_n = 2$.

В этом случае, делая разрезы по таким a_n, которые равны двойке, мы убеждаемся, что $A(\alpha) \geq 2 + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+1} = \frac{8}{3}$. Опять же, так как $\frac{8}{3} > \sqrt{5}$, то неравенства (7)-(9) верны и для таких α.

После разбора этих трех случаев нам осталось проверить неравенства (7)-(9) только для

$$\alpha = [b_0; a_1, b_1, \ \ldots, a_n, b_n, \ \ldots], \text{ таких, что } \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad a_n = 1, \ b_n \in \{1, 2\}. \tag{20}$$

Каждое из неравенств (7)-(9) для таких чисел мы будем доказывать немного по-разному. Доказательству каждого из них мы посвятим отдельный подпараграф.

3.8.1 Доказательство справедливости неравенства (7)

Итак, пусть фиксировано некоторое целое $k \geq 0$. Пусть α имеет вид (20). Доказательство опять будет построено на разборе нескольких случаев.

Случай 1. В последовательности b_n существует бесконечно много соседних двоек, разделенных не более чем $(k-1)$-ой единицей.

Данный случай мы будем рассматривать только если $k > 0$. Если же $k = 0$, то сразу переходим к разбору случая 2.

Итак, пусть $k > 0$. В этом случае производя разрезы по таким достаточно удаленным от начала двойкам с помощью формулы (5) можно получить некоторую нижнюю оценку на величину $B(\alpha)$. Действительно, так как разрез достаточно удален от начала, то мы можем считать, что в его окрестности равенства из (20) уже выполняются. Нетрудно понять, что наихудшим такое приближение будет тогда, когда соседствующие двойки разделены в последовательности b_n максимально возможным количеством единиц. В нашем случае это $k-1$. При этом в последовательности неполных частных числа α такие двойки будут разделены $(2k-1)$-ой единицей, так как мы считаем, что все a_n равны единице в окрестности разреза. Кроме того, это приближение будет наихудшим, если кроме двух вышеупомянутых двоек других двоек в окрестности разреза нет. Итак, мы показали, что в этом случае.

$$B(\alpha) \geq 2 + \left[0; 1_{2k-1}, 2, \overline{1}\right] + \left[0; \overline{1}\right].$$

Применив лемму 1, это неравенство можно записать в более явном виде следующим образом:

$$B(\alpha) \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{F_{2k-1}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + F_{2k-2}}{F_{2k}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + F_{2k-1}}.$$

С помощью арифметических подсчетов можно убедиться, что из только что полученной нижней оценки величины $B(\alpha)$ следует, что при каждом $k \geq 1$ верно, что $B(\alpha) > B_k^1$, из чего, в частности, следует, что неравенство (7) верно для таких α.

Случай 2. В последовательности b_n существует лишь конечное число двоек, либо существует бесконечно много соседних двоек, разделенных по крайней мере $(k+1)$-ой единицей.

В этом случае будем действовать аналогично, только разрезать мы будем по таким $a_n = 1$ которые дальше всего от соседствующих с ними двоек. Как и ранее, будем предполагать, что в окрестности разреза равенства из (20) уже выполняются. Для получения нижней оценки для $A(\alpha)$ нам потребуется рассмотреть отдельно случаи четного и нечетного k.

Пусть $k = 2m$. В этом случае у нас есть бесконечно много блоков длины хотя бы $2m+1$ из единичных b_n. А значит, сделав разрез по одной из двух a_n, соседствующих с центральной единицей в таком блоке, мы можем добиться того, что с одной стороны от нее будет хотя бы $2m$ единиц, а с другой — хотя бы $2m+2$. Нетрудно проверить, что такое приближение будет иметь наихудшую точность, когда все остальные b_n равняются двойке. То есть в этом случае

$$A(\alpha) \geq 1 + \left[0; 1_{2m}, \overline{2,1}\right] + \left[0; 1_{2m+2}, \overline{2,1}\right].$$

Применяя лемму 1 мы запишем это неравенство в явном виде следующим образом:

$$A(\alpha) \geq 1 + \frac{F_{2m}\left(1+\sqrt{3}\right) + F_{2m-1}}{F_{2m+1}\left(1+\sqrt{3}\right) + F_{2m}} + \frac{F_{2m+2}\left(1+\sqrt{3}\right) + F_{2m+1}}{F_{2m+3}\left(1+\sqrt{3}\right) + F_{2m+2}}.$$

Если же $k = 2m+1$, то с помощью аналогичных рассуждений можно показать, что

$$A(\alpha) \geq 1 + 2 \cdot \left[0; 1_{2m+2}, \overline{2,1}\right] = 1 + 2 \cdot \frac{F_{2m+2}\left(1+\sqrt{3}\right) + F_{2m+1}}{F_{2m+3}\left(1+\sqrt{3}\right) + F_{2m+2}}.$$

С помощью непосредственных вычислений можно убедиться, что вне зависимости от четности $k \geq 0$ полученная нижняя оценка величины $A(\alpha)$ всегда влечет неравенство $A(\alpha) > A_k^1$, а значит неравенство (7) верно и для таких α.

Заметим, что единственными иррациональными α, для которых неравенство (7) все еще не доказано, являются только такие α, неполные частные которых совпадают с неполными частными α_k^1 начиная с некоторого момента и, возможно, с некоторым сдвигом четной длины. Для таких α верно, что $A(\alpha) = A_k^1$, $B(\alpha) = B_k^1$, однако, из этого еще не следует, что для них верно неравенство (7), так как стремление к обоим этим верхним пределам может быть снизу. Покажем, что на самом деле хотя бы к одному из них (а на самом деле - всегда ровно к одному) происходит сверху. Нам будет удобно обозначить неполные частные такого α следующим образом: $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{2m}, \overline{1_{2k+1}, 2}]$.

Нам также потребуется определить формальную бесконечную в обе стороны строку $\beta = [\dots\ , b_{-1}, b_0, b_1,\ \dots] = [\overline{1_{2k+1}, 2}; \overline{1_{2k+1}, 2}]$, элементы которой пронумерованы целыми числами, а точка с запятой в ней "разделяет" b_{2m} и b_{2m+1}.

Введем две величины, характеризующие различие между α и β.

Пусть σ_1 — максимальный номер в $[0; 2m]$, для которого $a_{\sigma_1} \neq b_{\sigma_1}$. Например, если $a_{2m} \neq 2$, то $\sigma_1 = 2m$. Если $a_{2m} = 2$, но $a_{2m-1} \neq 1$, то $\sigma_1 = 2m - 1$. Если же такого номера нет, то положим $\sigma_1 = -1$.

Если $\sigma_1 \neq -1$, то положим $\sigma_2 = 1$ если $b_{\sigma_1} > a_{\sigma_1}$, и положим $\sigma_2 = 0$ если $b_{\sigma_1} < a_{\sigma_1}$. Если $\sigma_1 = -1$, то положим $\sigma_2 = 1$.

То, какая из двух частей неравенства (7) выполняется в данном случае зависит от четности $\sigma_1 + \sigma_2$. Например, по формуле (5) нетрудно убедиться, что если $\sigma_1 + \sigma_2$ четно, то делая разрезы по каждой двойке в периоде, т.е. рассматривая величины $\lambda_{2m+n(2k+2)-1}$ при $n \in \mathbb{N}$, мы получаем, что

$$\lambda_{2m+n(2k+2)-1} = 2 + \left[0; \overline{1_{2k+1}, 2}\right] + \left[0; (1_{2k+1}, 2)_{n-1}, 1_{2k+1}, a_{2m},\ \dots\ , a_1, a_0\right] >$$
$$> 2 + \left[0; \overline{1_{2k+1}, 2}\right] + \left[0; \overline{1_{2k+1}, 2}\right] = B_k^1.$$

А значит, если $\sigma_1 + \sigma_2$ четно, то неравенство (7) верно для таких α.

Аналогично, если $\sigma_1 + \sigma_2$ нечетно, то делая разрезы по наиболее центральной единице с нечетным индексом внутри каждого периода, можно убедиться, что соответствующие λ_n больше A_k^1, а значит, неравенство (7) верно и для таких α.

Итак, после разбора всех этих случаев мы доказали справедливость неравенства (7) для каждого иррационального α.

3.8.2 Доказательство неулучшаемости неравенства (7)

Доказательство неулучшаемости является несложным следствием только что приведенных рассуждений. Нам потребуется рассмотреть два числа, неполные частные которых начиная с некоторого момента и, возможно, после четного сдвига, совпадают с неполными частными α_k^1. Одно из них — с четной суммой $\sigma_1 + \sigma_2$, а другое — с нечетной. Например, можно рассмотреть числа $\alpha_k^1 + 1$ и $\alpha_k^1 - 1$ соответственно.

Предположим, что неравенство (7) улучшаемо, т.е. при некотором k в нем можно усилить одну из границ. Без ограничения общности, пусть левую. То есть для некоторого $\varepsilon > 0$ верно, что для каждого иррационального α существует бесконечно много чисел $p, q \in \mathbb{Z}$ таких, что

$$\frac{-1}{(A_k^1 + \varepsilon)\, q^2} < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{1}{B_k^1 q^2}. \tag{21}$$

Придем к противоречию, показав, что это не верно для числа $\alpha_k^1 - 1$. Действительно, в силу теоремы 6 достаточно рассматривать только подходящие дроби. Так как $A(\alpha_k^1 - 1) = A_k^1 < A_k^1 + \varepsilon$, то существует лишь конечное число $p, q \in \mathbb{Z}$ таких, что

$$\frac{-1}{(A_k^1 + \varepsilon)\, q^2} < \frac{p}{q} - \alpha < 0.$$

Так как для $\alpha_k^1 - 1$ сумма $\sigma_1 + \sigma_2$ нечетна, то, как было фактически обосновано при разборе предыдущего пункта, существует лишь конечное число $p, q \in \mathbb{Z}$ таких, что

$$0 < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{1}{B_k^1 q^2}.$$

А значит, для числа α_k^1-1 неравенство (21) не выполняется, т.е. левая граница неравенства (7) не улучшаема.

Аналогично, с помощью числа α_k^1+1 с четной суммой $\sigma_1+\sigma_2$ можно проверить неулучшаемость правой границы неравенства (7).

3.8.3 Доказательство справедливости неравенства (8)

Итак, пусть фиксировано некоторое целое $k \geq 1$ и некоторое положительное $\varepsilon < A_k^1$. Как уже было упомянуто, достаточно доказать (8) только для тех α, которые имеют вид (20). Для доказательства нам потребуется рассмотреть несколько случаев.

Случай 1. В последовательности b_n существует лишь конечное число двоек, либо существует бесконечно много соседних двоек, разделенных по крайней мере $(k+1)$-ой единицей.

Этот случай уже изучался в §3.8.1, где было показано, что для таких α верно, что $A(\alpha) > A_k^1$. Это обосновывает для таких α справедливость неравенства (8), так как, конечно, $A_k^1 > A_k^1 - \varepsilon$.

Если условия случая 1 не верны, то в последовательности b_n бесконечно много двоек, расстояния из единиц между которыми начиная с некоторого момента не превосходят k. Априори, возможны две различные ситуации:

Случай 2. Расстояния из единиц между соседними двойками в последовательности b_n начиная с некоторого момента всегда равны k.

В этом случае неполные частные α совпадают с неполными частными α_k^1 начиная с некоторого момента и, возможно, с некоторым сдвигом четной длины, и $A(\alpha) = A_k^1 >$ $> A_k^1 - \varepsilon$, так что для таких α неравенство (8) верно.

Случай 3. Расстояния из единиц между соседними двойками в последовательности b_n бесконечно много раз не превосходят $k-1$.

Пусть последовательность $n_1, n_2, \ \ldots$ — это последовательность индексов этих "близких" двоек в последовательности b_n. Для завершения доказательства нам достаточно показать, что начиная с некоторого момента все разрезы по этим двойкам имеют точность лучше, чем R_k^1. Иначе говоря, надо показать, что $\lambda_{2n_i-1} > R_k^1$ начиная с некоторого i.

Последнее неравенство и вправду верно, так как λ_{2n_i-1} можно, очевидно, оценить снизу следующим образом. Минимальным λ_{2n_i-1} будет тогда, когда расстояние из $b_n = 1$ между каждыми соседними двойками будет как можно большим. Так как мы разрезаем по одной из "близких" двоек, то одно из расстояний нужно положить равным $k-1$, все же остальные расстояния ничего не мешает нам положить равными k (расстояния длинной больше k запрещены рассмотрением предыдущих случаев). Итак, мы показали, что для больших i верно, что

$$\lambda_{2n_i-1} > 2 + \left[0; 1_{2k-1}, 2, \overline{1_{2k+1}, 2}\right] + \left[0; \overline{1_{2k+1}, 2}\right].$$

Неравенство и правда строгое, так как пар "близких" двоек в нашей последовательности неполных частных бесконечно много, в то время как для получения этой оценки мы предположили, что она одна.

Легко убедиться, что правая часть полученной оценки в точности равна R_k^1, что и завершает доказательство справедливости неравенства (8) для всех α.

3.8.4 Доказательство неулучшаемости неравенства (8)

Доказательство неулучшаемости неравенства (8) будем проводить в два шага.

На первом, более легком шаге, мы покажем, что в левую часть неравенства (8) нельзя положить $\varepsilon = 0$. Действительно, если бы было можно, то левая часть (8) совпала бы с левой частью (7), а правая часть была бы сильнее, так как при каждом целом $k \geq 1$ верно, что $R_k^1 > B_k^1$. А это бы противоречило уже доказанной неулучшаемости неравенства (7).

На втором, более сложном шаге, мы покажем, что ни при каком целом $k \geq 1$ правую часть неравенства (8) нельзя улучшить так, чтобы это улучшение не зависело от ε.

Предположим противное. Пусть при некотором целом $k \geq 1$ существует некоторое $\delta > 0$ такое, что для каждого положительного $\varepsilon < A_k^1$ и каждого иррационального α верно, что найдется бесконечно много $p, q \in \mathbb{Z}$ таких, что

$$\frac{-1}{(A_k^1 - \varepsilon)\, q^2} < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{1}{(R_k^1 + \delta)\, q^2}. \tag{22}$$

Определим при каждом $r \in \mathbb{N}$ число $\alpha_{k,r}^1$ следующим образом:

$$\alpha_{k,r}^1 = [2; \overline{1_{2k-1}, 2, (1_{2k+1}, 2)_r}]$$

Исходя из рассуждений в §3.8.3, нетрудно понять, что последовательность $B(\alpha_{k,r}^1)$ убывает с ростом r и стремится к R_k^1 при $r \to \infty$. В частности, найдется такое m, что $B(\alpha_{k,m}^1) < R_k^1 + \delta$. Ясно, что $A(\alpha_{k,m}^1) < A(\alpha_k^1) = A_k^1$. В частности, найдется такое положительное $\varepsilon < A_k^1$, что $A(\alpha_{k,m}^1) < A_k^1 - \varepsilon$.

Видим, что для такого выбора параметров неравенство (22) не может быть выполнено для $\alpha_{k,m}^1$, так как $A(\alpha_{k,m}^1) < A_k^1 - \varepsilon$ и $B(\alpha_{k,m}^1) < R_k^1 + \delta$. Полученное противоречие завершает обоснование неулучшаемости неравенства (8).

3.8.5 Доказательство справедливости неравенства (9)

Итак, пусть фиксировано некоторое целое $k \geq 0$ и некоторое положительное $\varepsilon < B_k^1$. Как уже было упомянуто, достаточно доказать (9) только для тех α, которые имеют вид (20). Для доказательства нам потребуется рассмотреть несколько случаев.

Случай 1. В последовательности b_n существует бесконечно много соседних двоек, разделенных не более чем $(k-1)$-ой единицей.

Данный случай мы будем рассматривать только если $k > 0$. Если же $k = 0$, то сразу переходим к разбору случая 2.

Итак, пусть $k > 0$. Этот случай уже изучался в §3.8.1, где было показано, что для таких α верно, что $B(\alpha) > B_k^1$. Это обосновывает для таких α справедливость неравенства (9), так как, конечно, $B_k^1 > B_k^1 - \varepsilon$.

Если условия случая 1 не верны, то в последовательности b_n либо конечное число двоек, либо бесконечное, но расстояния из единиц между соседними двойками начиная с некоторого момента не меньше k. Априори, возможны две различные ситуации:

Случай 2. Расстояния из единиц между соседними двойками в последовательности b_n начиная с некоторого момента всегда равны k.

В этом случае неполные частные α совпадают с неполными частными α_k^1 начиная с некоторого момента и, возможно, с некоторым сдвигом четной длины, и $B(\alpha) = B_k^1 > B_k^1 - \varepsilon$, так что для таких α неравенство (9) верно.

Случай 3. В последовательности b_n существует бесконечно много блоков длины $k+1$ из единиц.

Разбор этого случая будет происходить немного по-разному в зависимости от того, четно или нечетно k.

Пусть $k = 2m$ — четно. Обозначим через $n_1, n_2, \ldots$ последовательность индексов этих "центральных" единиц в блоках из $(2m+1)$-ой единицы. Будем производить разрезы по a_{n_i+1} — одной из двух a_n, наиболее близких к b_{n_i}. Иначе говоря, будем рассматривать величины λ_{2n_i}.

Для завершения доказательства нам достаточно показать, что начиная с некоторого момента все λ_{2n_i} больше L_{2m}^1.

Последнее неравенство и вправду верно. Действительно, в силу выбора индекса разрезания ясно, что влево от разреза стоят как минимум $2m+2$ единицы ($m+1$ из b_n и $m+1$ из a_n), а справа — $2m$ единиц. Минимальным λ_{2n_i} будет тогда, когда оставшиеся b_n будут двойками как можно чаще. Так как мы уже миновали предыдущие случаи, то самая частая расстановка двоек, которую нам нужно рассмотреть это $2m$ единиц в последовательности b_n между каждыми двумя двойками. Итак, мы показали, что для больших i верно, что

$$\lambda_{2n_i} > 1 + \left[0; 1_{2m}, 2, \overline{1_{4m+1}, 2}\right] + \left[0; 1_{2m+2}, 2, \overline{1_{4m+1}, 2}\right].$$

Неравенство и правда строгое, так как блоков из $(k+1)$-ой единицы в последовательности b_n бесконечно много, в то время как для получения этой оценки мы предположили, что он один.

С помощью лемм 1 и 2 нетрудно убедиться, что правая часть полученной оценки в точности равна L_{2m}^1, что и завершает доказательство справедливости неравенства (8) для всех α при $k = 2m$.

Пусть $k = 2m+1$. Обозначим через $n_1, n_2, \ldots$ последовательность индексов левой из двух "центральных" единиц в блоках из $(2m+2)$-ух единиц. Рассуждая абсолютно аналогично тому, как мы рассуждали в случае четного k, можно показать, что для больших i верно, что

$$\lambda_{2n_i} > 1 + \left[0; 1_{2m+2}, 2, \overline{1_{4m+3}, 2}\right] + \left[0; 1_{2m+2}, 2, \overline{1_{4m+3}, 2}\right].$$

С помощью лемм 1 и 2 нетрудно убедиться, что правая часть полученной оценки в точности равна L_{2m+1}^1, что и завершает доказательство справедливости неравенства (9) для всех α и при $k = 2m+1$.

Итак, вне зависимости от четности k, неравенство (9) полностью доказано.

3.8.6 Доказательство неулучшаемости неравенства (9)

Доказательство неулучшаемости неравенства (9) будем проводить в два шага.

На первом, более легком шаге, мы покажем, что в правую часть неравенства (9) нельзя положить $\varepsilon = 0$. Действительно, если бы было можно, то правая часть (9) совпала бы с правой частью (7), а левая часть была бы сильнее, так как при каждом целом $k \geq 0$ верно, что $L_k^1 > A_k^1$. А это бы противоречило уже доказанной неулучшаемости неравенства (7).

На втором, более сложном шаге, мы покажем, что ни при каком целом $k \geq 0$ левую часть неравенства (9) нельзя улучшить так, чтобы это улучшение не зависело от ε.

Предположим противное. Пусть при некотором целом $k \geq 0$ существует некоторое $\delta > 0$ такое, что для каждого положительного $\varepsilon < B_k^1$ и каждого иррационального α верно, что найдется бесконечно много $p, q \in \mathbb{Z}$ таких, что

$$\frac{-1}{(L_k^1 + \delta)\, q^2} < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{1}{(B_k^1 - \varepsilon)\, q^2}. \tag{23}$$

Определим при каждом $l \in \mathbb{N}$ число $\alpha_{k,l}^1$ следующим образом:

$$\alpha_{k,l}^1 = [2; \overline{1_{2k+3}, 2, (1_{2k+1}, 2)_l}]$$

Исходя из рассуждений в §3.8.5, нетрудно понять, что последовательность $A(\alpha_{k,l}^1)$ убывает с ростом l и стремится к L_k^1 при $l \to \infty$. В частности, найдется такое m, что $A(\alpha_{k,m}^1) < L_k^1 + \delta$. Ясно, что $B(\alpha_{k,m}^1) < B(\alpha_k^1) = B_k^1$. В частности, найдется такое положительное $\varepsilon < B_k^1$, что $B(\alpha_{k,m}^1) < B_k^1 - \varepsilon$.

Видим, что для такого выбора параметров неравенство (23) не может быть выполнено для $\alpha_{k,m}^1$, так как $A(\alpha_{k,m}^1) < L_k^1 + \delta$ и $B(\alpha_{k,m}^1) < B_k^1 - \varepsilon$. Полученное противоречие завершает обоснование неулучшаемости неравенства (9).

3.9 Доказательство леммы 8

Для обоснования первого пункта этой леммы заметим, что разрезы, верхним пределом которых будет являться величина $A(\alpha_k^2)$ всегда делаются по неполным частным равным единице. Однако, эти единицы имеют различное окружение, так что надо понять, по какой именно единице внутри каждого периода $\overline{(1,2)_k, 1, 1}$ лучше производить разрез. С помощью стандартных арифметических вычислений можно убедиться, что разрез лучше производить по тем единицам, которые соседствуют только с одной двойкой. Разрезы по всем таким единицам абсолютно эквивалентны в пределе. Сделав разрез по одной из них убеждаемся, что

$$A\left(\alpha_k^2\right) = 1 + \left[0; 1, \overline{(1,2)_k, 1, 1}\right] + [0; (2,1)_k, 1, \overline{(1,2)_k, 1, 1}].$$

Благодаря лемме 6 видно, что это выражение в точности совпадает с определением величины A_k^2.

Для обоснования второго равенства из этой леммы мы заметим, что цепочку равенств

$$B(\alpha_0^2) = B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \sqrt{5} = B_0^2$$

нетрудно проверить непосредственно, так что произведем доказательство в случае $k \geq 1$.

С помощью стандартных арифметических вычислений можно проверить, что разрезы, верхний предел которых берется при определении величины $B\left(\alpha_k^2\right)$ делаются по "наиболее" центральной двойке внутри каждого периода $\overline{(1,2)_k, 1, 1}$. Нам придется рассмотреть отдельно случай четного и нечетного k.

При $k = 2m+1$ такая “центральная” двойка одна внутри каждого периода. Сделав разрез по ней убеждаемся, что

$$B\left(\alpha^2_{2m+1}\right) = 2 + \left[0; (1,2)_m, 1, 1, \overline{(1,2)_{2m+1}, 1, 1}\right] + \left[0; (1,2)_m, 1, 1, \overline{(1,2)_{2m+1}, 1, 1}\right].$$

Благодаря леммам 5 и 6 нетрудно убедиться, что только что полученное выражение для $B\left(\alpha^2_{2m+1}\right)$ в точности совпадает с определением величины B^2_{2m+1}.

Случай $k = 2m$ разбирается, в целом, аналогично. Правда в нем таких “центральных” двоек внутри каждого периода будет две, разрезы по которым в пределе абсолютно эквивалентны. Сделав разрез по любой из них убеждаемся, что

$$B\left(\alpha^2_{2m}\right) = 2 + \left[0; (1,2)_m, 1, 1, \overline{(1,2)_{2m}, 1, 1}\right] + \left[0; (1,2)_{m-1}, 1, 1, \overline{(1,2)_{2m}, 1, 1}\right],$$

что, опять же, в точность совпадает с B^2_{2m}, если воспользоваться леммами 5 и 6.

Равенства 3) и 4) настоящей леммы можно проверить прямым вычислением: действительно, так как для чисел Q_k существует “замкнутая” формула (10), то и для чисел τ^2_k мы имеем полностью “замкнутую” формулу. Осталось “лишь” упростить ее до требуемого в лемме вида.

3.10 Доказательство теоремы 11

Доказательство данной теоремы будет, в целом, очень близко к доказательству очень похожей и доказанной ранее теоремы 10.

Так как сразу после формулировки теоремы 11 было отмечено, что при $k = 0$ она совпадает с уже доказанными теоремами 1 и 4, то и разбирать этот случай мы здесь не будем, а ограничимся доказательством этой теоремы только при $k \geq 1$.

Итак, приступим. Пусть $\alpha = [b_0; a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots]$.

Случай 1. $\exists^\infty\, a_n \geq 3$.

В этом случае, делая разрезы по таким a_n, которые не меньше тройки, мы убеждаемся, что $A(\alpha) \geq 3$. Видим, что для таких α неравенства (11)-(13) верны, так как точность только что найденных приближений намного лучше требуемой в теореме 11. Действительно, $3 > \sqrt{5} = A^2_0$ — первого члена убывающей последовательности $A^2_0, L^2_1, A^2_1, L^2_2, A^2_2, \ldots$, а значит, в силу убывания последовательностей L^1_m и A^1_m верно, что при каждом фиксированном $k \geq 1$ верно, что $3 > L^2_k$, и $3 > A^2_k$, и уж тем более, $3 > A^2_k - \varepsilon$.

Итак, мы проверили, что для тех α, которые подпадают под случай 1 неравенства (11)-(13) верны. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие α, которые этому случаю не удовлетворяют.

Случай 2. $\exists^\infty\, b_n \geq 3$.

В этом случае, делая разрезы по таким b_n, которые не меньше тройки, мы убеждаемся, что $B(\alpha) \geq 3 + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+1} = \frac{11}{3}$, так как соседствующие с такими b_n числа a_n и a_{n+1} не могут быть больше двойки в силу случая 1.

Так как

$$\frac{11}{3} > 2\sqrt{3} = \lim_{m\to\infty} R^2_m = \lim_{m\to\infty} B^2_m$$

и последовательность $B_0^2, R_0^2, B_1^2, R_1^2, \ \ldots$ возрастает, то при каждом $k \geq 1$ верно, что $\frac{11}{3} > R_k^2$ и $\frac{11}{3} > B_k^2$. А значит, и для таких α неравенства (11)-(13) верны. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие α, которые не удовлетворяют первым двум случаям.

Случай 3. $\exists^\infty \, a_n = 2$.

В этом случае, делая разрезы по таким a_n, которые равны двойке, мы убеждаемся, что $A(\alpha) \geq 2 + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+1} = \frac{8}{3}$. Опять же, так как $\frac{8}{3} > \sqrt{5}$, то неравенства (11)-(13) верны и для таких α.

После разбора этих трех случаев нам осталось проверить неравенства (11)-(13) только для

$$\alpha = [b_0; a_1, b_1, \ \ldots \ , a_n, b_n, \ \ldots], \text{ таких, что } \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad a_n = 1, \ b_n \in \{1, 2\}. \tag{24}$$

Каждое из неравенств (11)-(13) для таких чисел мы будем доказывать немного по-разному. Доказательству каждого из них мы посвятим отдельный подпараграф.

3.10.1 Доказательство справедливости неравенства (11)

Итак, пусть фиксировано некоторое целое $k \geq 1$. Пусть α имеет вид (24). Доказательство опять будет построено на разборе нескольких случаев.

Случай 1. В последовательности b_n существует бесконечно много соседних единиц, разделенных не более чем $(k-1)$-ой двойкой.

Обозначим последовательность индексов таких близких пар $b_n = 1$ через n_i и $n_i + s_i$. Причем формулировкой рассматриваемого нами случая гарантируется, что $s_i \leq k - 1$.

В этом случае производя разрезы по a_{n_i+1}, соседствующим с $b_{n_i} = 1$, с помощью формулы (5) можно получить некоторую нижнюю оценку на величину $A(\alpha)$.

Действительно, можно считать, что разрез достаточно удален от начала, то есть мы можем считать, что в его окрестности равенства из (24) уже выполняются. Нетрудно понять, что наихудшим такое приближение будет тогда, когда величина s_i максимальна, а других единиц кроме b_{n_i} и $b_{n_i+s_i}$ в последовательности b_n нет. Итак, мы показали, что в этом случае.

$$A(\alpha) \geq 1 + \left[0; (2,1)_{k-1}, 1, \overline{1,2}\right] + \left[0; 1, 1, \overline{2,1}\right].$$

Применив лемму 5, это неравенство можно записать в более явном виде следующим образом:

$$A(\alpha) \geq \frac{3+\sqrt{3}}{3} + \left(\left(\frac{2G_{k-1}\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) + G_{k-1} - G_{k-2}}{(G_k - G_{k-1})\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) + G_{k-1}} \right)^{-1} - 1 \right).$$

С помощью арифметических подсчетов можно убедиться, что из только что полученной нижней оценки величины $A(\alpha)$ следует, что при каждом $k \geq 1$ верно, что $A(\alpha) > A_k^2$, из чего, в частности, следует, что неравенство (11) верно для таких α.

Случай 2. В последовательности b_n существует лишь конечное число единиц, либо существует бесконечно много соседних единиц, разделенных по крайней мере $(k+1)$-ой двойкой.

В этом случае нам гарантируется, что существует бесконечно много блоков длины $k+1$ из $b_n = 2$. Будем производить разрезы по "наиболее центральной" двойке в таком блоке. Для получения нижней оценки для $B(\alpha)$ нам потребуется рассмотреть отдельно случаи четного и нечетного k.

Пусть $k = 2m$. В этом случае такая центральная двойка в каждом блоке длины $k+1$ ровно одна. Нетрудно видеть, что наихудшим разрез по ней будет тогда, когда все b_n вне рассматриваемого нами блока равны единице. Таким образом, мы доказали, что в этом случае

$$B(\alpha) \geq 2 + \left[0; (1,2)_m, \overline{1}\right] + \left[0; (1,2)_m, \overline{1}\right].$$

Применяя лемму 5 мы запишем это неравенство в явном виде следующим образом:

$$B(\alpha) \geq 2 + 2 \cdot \frac{2G_m\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + G_m - G_{m-1}}{(G_{m+1} - G_m)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + G_m}.$$

Если же $k = 2m+1$, то с помощью аналогичных рассуждений можно показать, что разрез по одной из двух центральных двоек в блоке длины $2m+2$ дает нам следующую оценку:

$$B(\alpha) \geq 2 + \left[0; (1,2)_{m+1}, \overline{1}\right] + \left[0; (1,2)_m, \overline{1}\right].$$

Применяя лемму 5 мы можем записать это неравенство в явном виде следующим образом:

$$B(\alpha) \geq 2 + \frac{2G_{m+1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + G_{m+1} - G_m}{(G_{m+2} - G_{m+1})\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + G_{m+1}} + \frac{2G_m\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + G_m - G_{m-1}}{(G_{m+1} - G_m)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + G_m}.$$

С помощью непосредственных вычислений можно убедиться, что вне зависимости от четности $k \geq 1$ полученная нижняя оценка величины $B(\alpha)$ всегда влечет неравенство $B(\alpha) > B_k^2$, а значит, неравенство (11) верно и для таких α.

Заметим, что единственными иррациональными α, для которых неравенство (11) все еще не доказано, являются только такие α, неполные частные которых совпадают с неполными частными α_k^2 начиная с некоторого момента и, возможно, с некоторым сдвигом четной длины. Для таких α верно, что $A(\alpha) = A_k^2$, $B(\alpha) = B_k^2$, однако, из этого еще не следует, что для них верно неравенство (11), так как стремление к обоим этим верхним пределам может быть снизу.

На самом деле, абсолютно так же, как мы сделали это при доказательстве аналогичного места в теореме 10, можно показать, что для таких α стремление к одному из этих пределов всегда происходит сверху, а к другому — снизу. То, к какому же из двух пределов происходит стремление сверху, определяется четностью суммы величин σ_1 и σ_2, которые определяются абсолютно аналогично тому, как они определялись в доказательстве теоремы 10, с тем лишь отличием, что теперь мы сравниваем неполные частные α с элементами бесконечной в обе стороны последовательности $\beta = [\overline{(1,2)_k, 1, 1}; \overline{(1,2)_k, 1, 1}]$.

Итак, после разбора всех этих случаев мы доказали справедливость неравенства (11) для каждого иррационального α.

3.10.2 Доказательство неулучшаемости неравенства (11)

Доказательство неулучшаемости может быть проведено точь-в-точь тем же образом, как мы доказали неулучшаемость неравенства (7). Для этого нам нужно рассмотреть два эквивалентных α_k^2 числа. Одно — с четной суммой $\sigma_1+\sigma_2$, а другое — с нечетной. В данном случае мы могли бы рассмотреть числа α_k^2+1 и α_k^2-1 соответственно.

3.10.3 Доказательство справедливости неравенства (12)

Итак, пусть фиксировано некоторое целое $k \geq 1$ и некоторое положительное $\varepsilon < A_k^2$. Как уже было упомянуто, достаточно доказать (12) только для тех α, которые имеют вид (24). Для доказательства нам потребуется рассмотреть несколько случаев.

Случай 1. В последовательности b_n существует бесконечно много соседних единиц, разделенных не более чем $(k-1)$-ой двойкой.

Этот случай уже изучался в §3.10.1, где было показано, что для таких α верно, что $A(\alpha) > A_k^2$. Это обосновывает для таких α справедливость неравенства (12), так как, конечно, $A_k^2 > A_k^2 - \varepsilon$.

Если условия случая 1 не верны, то в последовательности b_n либо лишь конечное число единиц, либо количество единиц бесконечно, но начиная с некоторого момента любые две такие единицы разделены хотя бы k двойками. Априори, возможны две различные ситуации:

Случай 2. Расстояния из двоек между соседними единицами в последовательности b_n начиная с некоторого момента всегда равны k.

В этом случае неполные частные α совпадают с неполными частными α_k^2 начиная с некоторого момента и, возможно, с некоторым сдвигом четной длины, и $A(\alpha) = A_k^2 >$ $> A_k^2 - \varepsilon$, так что для таких α неравенство (12) верно.

Случай 3. В последовательности b_n существует бесконечно много блоков длины $k+1$ из двоек.

Разбор данного случая будет происходить немного по-разному в зависимости от того, четно или нечетно k.

Пусть $k = 2m$. Обозначим последовательность индексов "центральных" двоек в каждом блоке через n_i. Нетрудно видеть, что разрез по b_{n_i}, т.е. величина λ_{2n_i}, будет наихудшим если верно следующее. Во-первых, этот блок будет иметь длину ровно $2m+1$, а соседние с ним b_n будут равны единице. Во-вторых, вне этого блока единицы в последовательности b_n будут появляться как можно чаще. В нашем случае это означает, что после $b_n = 1$ будет стоять ровно $2m$ $b_n = 2$, а после — снова $b_n = 1$.

Таким образом мы доказали, что для больших i верно, что

$$\lambda_{2n_i} > 2 + \left[0; (1,2)_m, 1, 1, \overline{(1,2)_{2m}, 1, 1}\right] + \left[0; (1,2)_m, 1, 1, \overline{(1,2)_{2m}, 1, 1}\right].$$

Неравенство и правда строгое, так как в последовательности b_n по предположению встречается бесконечно много блоков длины $2m+1$ из $b_n = 2$, в то время как абзацем ранее бы огрубили вычисления, предположив, что такой блок ровно один.

С помощью лемм 5 и 6 нетрудно убедиться, что правая часть неравенства из предыдущего абзаца в точности совпадает с величиной R^2_{2m}. Таким образом, неравенство (12) полностью обоснованно в случае $k = 2m$.

Если же $k = 2m + 1$, то обозначив через n_i последовательность, например, левых из двух центральных $b_n = 2$ в каждом блоке длины $2m+2$ и рассуждая после этого абсолютно аналогично, можно показать, что

$$\lambda_{2n_i} > 2 + \left[0; (1,2)_{m+1}, 1, 1, \overline{(1,2)_{2m+1}, 1, 1}\right] + \left[0; (1,2)_{m}, 1, 1, \overline{(1,2)_{2m+1}, 1, 1}\right]$$

и неравенство и вправду строгое.

С помощью лемм 5 и 6 нетрудно убедиться, что правая часть неравенства из предыдущего абзаца в точности совпадает с величиной R^2_{2m+1}. Таким образом, неравенство (12) полностью обоснованно и в случае $k = 2m + 1$.

Итак, вне зависимости от четности k неравенство (12) полностью доказано.

3.10.4 Доказательство неулучшаемости неравенства (12)

Доказательство неулучшаемости неравенства (12) будем проводить в два шага.

На первом, более легком шаге, мы покажем, что в левую часть неравенства (12) нельзя положить $\varepsilon = 0$. Действительно, если бы было можно, то левая часть (12) совпала бы с левой частью (11), а правая часть была бы сильнее, так как при каждом целом $k \geq 1$ верно, что $R^2_k > B^2_k$. А это бы противоречило уже доказанной неулучшаемости неравенства (11).

На втором, более сложном шаге, мы покажем, что ни при каком целом $k \geq 1$ правую часть неравенства (12) нельзя улучшить так, чтобы это улучшение не зависело от ε.

Предположим противное. Пусть при некотором целом $k \geq 1$ существует некоторое $\delta > 0$ такое, что для каждого положительного $\varepsilon < A^2_k$ и каждого иррационального α верно, что найдется бесконечно много $p, q \in \mathbb{Z}$ таких, что

$$\frac{-1}{(A^2_k - \varepsilon)\, q^2} < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{1}{(R^2_k + \delta)\, q^2}. \tag{25}$$

Определим при каждом $r \in \mathbb{N}$ число $\alpha^2_{k,r}$ следующим образом:

$$\alpha^2_{k,r} = [1; \overline{(1,2)_{k+1}, 1, 1, ((1,2)_k, 1, 1)_r}]$$

Исходя из рассуждений в §3.10.3, нетрудно понять, что последовательность $B(\alpha^2_{k,r})$ убывает с ростом r и стремится к R^2_k при $r \to \infty$. В частности, найдется такое m, что $B(\alpha^2_{k,m}) < R^2_k + \delta$. Ясно, что $A(\alpha^2_{k,m}) < A(\alpha^2_k) = A^2_k$. В частности, найдется такое положительное $\varepsilon < A^2_k$, что $A(\alpha^2_{k,m}) < A^2_k - \varepsilon$.

Видим, что для такого выбора параметров неравенство (25) не может быть выполнено для $\alpha^2_{k,m}$, так как $A(\alpha^2_{k,m}) < A^2_k - \varepsilon$ и $B(\alpha^2_{k,m}) < R^2_k + \delta$. Полученное противоречие завершает обоснование неулучшаемости неравенства (12).

3.10.5 Доказательство справедливости неравенства (13)

Итак, пусть фиксировано некоторое целое $k \geq 1$ и некоторое положительное $\varepsilon < B^2_k$. Как уже было упомянуто, достаточно доказать (13) только для тех α, которые имеют вид (24). Для доказательства нам потребуется рассмотреть несколько случаев.

Случай 1. В последовательности b_n существует лишь конечное число единиц, либо существует бесконечно много соседних единиц, разделенных по крайней мере $(k+1)$-ой двойкой.

Этот случай уже разбирался в §3.10.1, где было показано, что для таких α верно, что $B(\alpha) > B_k^2$. Это обосновывает для таких α справедливость неравенства (13), так как, конечно, $B_k^2 > B_k^2 - \varepsilon$.

Если условия случая 1 не верны, то в последовательности b_n бесконечное число единиц и расстояния из $b_n = 2$ между соседними из них начиная с некоторого момента не превосходят k. Априори, возможны две различные ситуации:

Случай 2. Расстояния из двоек между соседними единицами в последовательности b_n начиная с некоторого момента всегда равны k.

В этом случае неполные частные α совпадают с неполными частными α_k^2 начиная с некоторого момента и, возможно, с некоторым сдвигом четной длины, и $B(\alpha) = B_k^2 >$ $> B_k^2 - \varepsilon$, так что для таких α неравенство (13) верно.

Случай 3. В последовательности b_n существует бесконечно много единиц, расстояние из $b_n = 2$ между которыми не превышает $k-1$.

Обозначим через n_i последовательности индексов левых $b_n = 1$ из этих пар "близких" $b_n = 1$. Будем производить разрезы по a_{n_i+1} — той a_n, которая идет сразу после b_{n_i}. Иначе говоря, будем рассматривать величины λ_{2n_i+1}.

Для завершения доказательства нам достаточно показать, что начиная с некоторого момента все λ_{2n_i+1} больше L_k^2.

Нетрудно видеть, что величина λ_{2n_i+1} будет минимальна тогда, когда двойки в последовательности b_n будут встречаться как можно чаще. В нашем случае это будет означать, что соседствующие с разрезом b_n, равные единице, разделены ровно $(k-1)$-ой двойкой, а все остальные пары соседних $b_n = 1$ разделены ровно k двойками. Получаем, что справедливо следующее неравенство:

$$\lambda_{2n_i+1} > 1 + \left[0; (2,1)_{k-1}, 1, \overline{(1,2)_k, 1, 1}\right] + \left[0; 1, \overline{(1,2)_k, 1, 1}\right].$$

Неравенство и правда строгое, так как пар "близких" единиц в последовательности b_n бесконечно много, в то время как для получения этой оценки мы предположили, что она такая одна.

Нетрудно убедиться, что правая часть полученной оценки в точности равна L_k^2, что и завершает доказательство справедливости неравенства (12) для всех α.

3.10.6 Доказательство неулучшаемости неравенства (13)

Доказательство неулучшаемости неравенства (13) будем проводить в два шага.

На первом, более легком шаге, мы покажем, что в правую часть неравенства (13) нельзя положить $\varepsilon = 0$. Действительно, если бы было можно, то правая часть (13) совпала бы с правой частью (11), а левая часть была бы сильнее, так как при каждом целом $k \geq 1$ верно, что $L_k^2 > A_k^2$. А это бы противоречило уже доказанной неулучшаемости неравенства (11).

На втором, более сложном шаге, мы покажем, что ни при каком целом $k \geq 1$ левую часть неравенства (13) нельзя улучшить так, чтобы это улучшение не зависело от ε.

Предположим противное. Пусть при некотором целом $k \geq 1$ существует некоторое $\delta > 0$ такое, что для каждого положительного $\varepsilon < B_k^2$ и каждого иррационального α верно, что найдется бесконечно много $p, q \in \mathbb{Z}$ таких, что

$$\frac{-1}{(L_k^2+\delta)\, q^2} < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{1}{(B_k^2-\varepsilon)\, q^2}. \tag{26}$$

Определим при каждом $l \in \mathbb{N}$ число $\alpha_{k,l}^2$ следующим образом:

$$\alpha_{k,l}^2 = [1; \overline{(1,2)_{k-1}, 1, 1, ((1,2)_k, 1, 1)_l}]$$

Исходя из рассуждений в §3.10.5, нетрудно понять, что последовательность $A(\alpha_{k,l}^2)$ убывает с ростом l и стремится к L_k^2 при $l \to \infty$. В частности, найдется такое m, что $A(\alpha_{k,m}^2) < L_k^2 + \delta$. Ясно, что $B(\alpha_{k,m}^2) < B(\alpha_k^2) = B_k^2$. В частности, найдется такое положительное $\varepsilon < B_k^2$, что $B(\alpha_{k,m}^2) < B_k^2 - \varepsilon$.

Видим, что для такого выбора параметров неравенство (26) не может быть выполнено для $\alpha_{k,m}^2$, так как $A(\alpha_{k,m}^2) < L_k^2+\delta$ и $B(\alpha_{k,m}^2) < B_k^2-\varepsilon$. Полученное противоречие завершает обоснование неулучшаемости неравенства (13).

3.11 Доказательство теоремы 12

Данная теорема является довольно несложным следствием применения теоремы 8 к теоремам 10 и 11.

Действительно, первый пункт этой теоремы получается, если применить теорему 8 к теореме 11 при $k = 0$. Или, что эквивалентно, теорему 8 к теоремам 1 и 4, которые являются "аналогом теоремы Гурвица" и "правым аналогом теоремы Робинсона" с параметрами $A = \sqrt{5}, B = \sqrt{5}, R = 1 + \sqrt{5}$.

Второй пункт этой теоремы получается, если применить теорему 8 к теореме 10 при $k = 0$, так как $A_0^1 = \sqrt{3},\ B_0^1 = 2\sqrt{3},\ L_0^1 = \frac{3+5\sqrt{3}}{6}$

Для доказательства третьего и четвертого пункта теоремы 12 при $i = 1$ нужно применить теорему 8 к теореме 10 при $k \geq 1$, а при $i = 2$ — к теореме 11 при $k \geq 1$.

Отметим, что теорема 8 доказывает оптимальность лишь левых границ отрезков $\left[\frac{A_k^i}{R_k^i}; \frac{A_k^i}{B_k^i}\right]$ и правых границ отрезков $\left[\frac{A_k^i}{B_k^i}; \frac{L_k^i}{B_k^i}\right]$. Но поскольку другие их границы совпадают при фиксированных значениях k и i, то они тоже являются оптимальными.

3.12 Доказательство теоремы 13

Пусть $\varepsilon < \sqrt{5}$ — произвольное положительное число.

Покажем, для начала, что $R(\varepsilon) \geq \frac{\sqrt{5}-\varepsilon}{t(\varepsilon)}$.

Очевидно, что

$$T(\varepsilon) = \Big\{\tau > 0 : \sqrt{5} - \varepsilon \text{ лежит в множестве, супремумом которого является } S(\tau)\Big\}$$

.

Так как множество тех c, супремум по которым берется при определении величины $S(\tau)$, с ростом τ становится только больше и больше, то очевидно, что $T(\varepsilon)$ есть направленный вправо луч, а $t(\varepsilon)$ — его начало.

В частности, верно, что любое $t' > t(\varepsilon)$ принадлежит $T(\varepsilon)$. Это означает, что для каждого $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ $\exists^\infty$ $p, q \in \mathbb{Z}$ таких, что

$$\frac{-1}{\left(\sqrt{5}-\varepsilon\right) q^2} < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{t'}{\left(\sqrt{5}-\varepsilon\right) q^2}.$$

Справедливость этого неравенства мгновенно влечет неравенство $R(\varepsilon) \geq \frac{\sqrt{5}-\varepsilon}{t'}$, так как константа $\frac{\sqrt{5}-\varepsilon}{t'}$ лежит в множестве, супремум по которому берется при определении величины $R(\varepsilon)$.

В силу произвольности выбора $t' > t(\varepsilon)$ мы получаем, что на самом деле справедливо неравенство $R(\varepsilon) \geq \frac{\sqrt{5}-\varepsilon}{t(\varepsilon)}$, хоть $t(\varepsilon)$ может и не лежать в $T(\varepsilon)$.

Покажем теперь, что на самом деле $R(\varepsilon) = \frac{\sqrt{5}-\varepsilon}{t(\varepsilon)}$. Будем действовать от противного и предположим, что при некотором положительном $\varepsilon < \sqrt{5}$ верно, что $R(\varepsilon) > \frac{\sqrt{5}-\varepsilon}{t(\varepsilon)}$. В частности, из этого следует, что при некотором $\delta > 0$ верно, что $R(\varepsilon) > \frac{\sqrt{5}-\varepsilon}{t(\varepsilon)} + \delta$. Это означает, что для каждого $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ $\exists^\infty$ $p, q \in \mathbb{Z}$ таких, что

$$\frac{-1}{\left(\sqrt{5}-\varepsilon\right) q^2} < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}-\varepsilon}{t(\varepsilon)} + \delta\right) q^2}. \tag{27}$$

Положим

$$t' = \frac{\sqrt{5}-\varepsilon}{\frac{\sqrt{5}-\varepsilon}{t(\varepsilon)} + \delta}.$$

Нетрудно видеть, что, во-первых, $t' < t(\varepsilon)$, и во-вторых, из справедливости неравенства (27) следует, что $t' \in T(\varepsilon)$. Это противоречит тому, что $t(\varepsilon)$ является инфимумом множества $T(\varepsilon)$ и полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

3.13 Доказательство теоремы 14

Доказательство теоремы 14 мы начнем с обоснования истинности неравенства (14). Делать это мы будем немного по-разному в зависимости от того, насколько мала величина ε. Конечно, наиболее интересно неравенство (14) только при $\varepsilon \to 0$, так как только при таких ε теорема 14 гарантирует его оптимальность, однако, для полноты изложения мы рассмотрим и случаи “больших” ε.

Случай 1. $\varepsilon \geq \sqrt{5} - 1$

Известно, что для каждого $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ $\exists^\infty$ $p, q \in \mathbb{Z}$ таких, что

$$\frac{-1}{q^2} < \frac{p}{q} - \alpha < 0.$$

В истинности этого факта легко убедиться, например, вспомнив о тождестве (5) и заметив, что каждое λ_n не меньше единицы.

Так как

$$\frac{-1}{\sqrt{5}-\varepsilon} \leq -1,$$

то, конечно, для каждого $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\ \ \exists^\infty\ p, q \in \mathbb{Z}$ таких, что

$$\frac{-1}{\left(\sqrt{5}-\varepsilon\right)q^2} < \frac{p}{q} - \alpha < 0.$$

А значит, в этом случае $R(\varepsilon)$ равняется $+\infty$, так как является, по определению, супремумом положительной числовой полуоси, так что неравенство (14) в обосновании не нуждается.

Случай 2. $\sqrt{5}-1 > \varepsilon > \sqrt{5}-\sqrt{3}$

В этом случае легко видеть, что найдется такое целое $k \geq 2$, что

$$\sqrt{1+\frac{4}{k+1}} \leq \sqrt{5}-\varepsilon < \sqrt{1+\frac{4}{k}}. \tag{28}$$

Благодаря теореме 2 мы знаем, что для каждого $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\ \ \exists^\infty\ p, q \in \mathbb{Z}$ таких, что

$$\frac{-1}{\left(\sqrt{1+\frac{4}{k}}\right)q^2} < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{1}{\left(k\sqrt{1+\frac{4}{k}}\right)q^2}. \tag{29}$$

Так как

$$\frac{-1}{\sqrt{5}-\varepsilon} < \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{4}{k}}},$$

то из (29) следует, что $R(\varepsilon) \geq k\sqrt{1+\frac{4}{k}}$. Теперь, чтобы доказать неравенство (14) для всех ε, удовлетворяющих (28), достаточно проверить, что

$$k\sqrt{1+\frac{4}{k}} > 1+\sqrt{5}+\left(\frac{10+2\sqrt{5}}{45}\right)\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{1+\frac{4}{k+1}}\right)^2. \tag{30}$$

В справедливости неравенства (30) при k равном 2 или 3 легко убедиться прямым вычислением. При $k \geq 4$ для доказательства (30) достаточно заметить, что его левая часть не меньше четырех, а правую оценить сверху следующим образом:

$$1+\sqrt{5}+\left(\frac{10+2\sqrt{5}}{45}\right)\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{1+\frac{4}{k+1}}\right)^2 < 1+\sqrt{5}+\left(\frac{10+2\sqrt{5}}{45}\right)\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)^2 < 4.$$

Таким образом, мы завершили обоснование неравенства (14) при всех ε, относящихся к случаю 2.

Случай 3. $\sqrt{5}-\sqrt{3} \geq \varepsilon > 0$

Разбор этого, самого интересного случая будет идейно очень похож на разбор случая 2, однако теперь мы будем пользоваться не ранее известными результатами Сегре, а нашей новой теоремой 10.

Итак, $\sqrt{5}-\varepsilon$ лежит в отрезке $\left[\sqrt{3}, \sqrt{5}\right]$. Так как благодаря лемме 3 мы знаем, что последовательность $\sqrt{3} = A_0^1, L_0^1, A_1^1, L_1^1, A_2^1, L_2^1,\ \ldots$ возрастает к $\sqrt{5}$, то $\sqrt{5}-\varepsilon$ обязательно попадает в отрезок между какими-то двумя соседними членами этой последовательности. Нам придется разобрать отдельно несколько вариантов.

Подслучай 3.1 При некотором целом $k \geq 0$ верно, что $A_k^1 < \sqrt{5} - \varepsilon \leq L_k^1$.

Благодаря третьему пункту теоремы 10 мы знаем, что для каждого достаточно малого ε' и каждого иррационального α $\exists^\infty$ $p, q \in \mathbb{Z}$ таких, что

$$\frac{-1}{L_k^1 q^2} < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{1}{\left(B_k^1 - \varepsilon'\right) q^2}. \tag{31}$$

Так как

$$\frac{-1}{\sqrt{5} - \varepsilon} \leq \frac{-1}{L_k^1},$$

то из (31) следует, что $R(\varepsilon) \geq B_k^1$. Для доказательства неравенства (14) нам осталось только убедиться, что при каждом целом $k \geq 0$ верно, что

$$B_k^1 \geq 1 + \sqrt{5} + \left(\frac{10 + 2\sqrt{5}}{45}\right) \cdot \left(\sqrt{5} - A_k^1\right)^2. \tag{32}$$

Это нетрудно сделать с помощью стандартных вычислительных методов. Отметим лишь, что последнее неравенство стоит рассматривать отдельно при четных и нечетных k соответственно.

Подслучай 3.2 При некотором целом $k \geq 0$ верно, что $L_k^1 < \sqrt{5} - \varepsilon < A_{k+1}^1$.

Благодаря второму пункту теоремы 10 мы знаем, что для каждого достаточно малого ε' и каждого иррационального α $\exists^\infty$ $p, q \in \mathbb{Z}$ таких, что

$$\frac{-1}{\left(A_{k+1}^1 - \varepsilon'\right) q^2} < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{1}{R_{k+1}^1 q^2}. \tag{33}$$

Так как

$$\frac{-1}{\sqrt{5} - \varepsilon} < \frac{-1}{A_{k+1}^1},$$

для некоторого достаточно малого ε' верно, что

$$\frac{-1}{\sqrt{5} - \varepsilon} < \frac{-1}{A_{k+1}^1 - \varepsilon'}.$$

Теперь из (33) следует, что $R(\varepsilon) \geq R_{k+1}^1$ и для доказательства неравенства (14) нам осталось только убедиться, что при каждом целом $k \geq 0$ верно, что

$$R_{k+1}^1 \geq 1 + \sqrt{5} + \left(\frac{10 + 2\sqrt{5}}{45}\right) \cdot \left(\sqrt{5} - L_k^1\right)^2.$$

Как и при разборе предыдущего подслучая, это нетрудно сделать с помощью стандартных вычислительных методов, рассматривая по отдельности четные и нечетные значения k.

Подслучай 3.3 При некотором целом $k \geq 0$ верно, что $A_k^1 = \sqrt{5} - \varepsilon$.

Благодаря первому пункту теоремы 10 мы знаем, что для каждого иррационального α $\exists^\infty$ $p, q \in \mathbb{Z}$ таких, что

$$\frac{-1}{A_k^1 q^2} < \frac{p}{q} - \alpha < \frac{1}{B_k^1 q^2},$$

причем константа B_k^1 в знаменателе правой части не может быть улучшена при сохранении $A_k^1 = \sqrt{5} - \varepsilon$ в левой части.

Это означает, что B_k^1 является наибольшим числом в множестве, супремум по которому берется при определении величины $R(\varepsilon)$, т.е.

$$R(\sqrt{5} - A_k^1) = B_k^1 \tag{34}$$

Теперь неравенство (14) является следствием уже упомянутого неравенства (32).

Итак, после разбора этих трех случав мы установили справедливость неравенства (14) при всех $\varepsilon < \sqrt{5}$. Осталось только доказать его неулучшаемость для малых ε.

Мы сделаем это с помощью равенства (34) из подслучая 3.3.

Будем действовать от противного. Предположим, что при некотором $c > \frac{10+2\sqrt{5}}{45}$ для всех достаточно малых ε верно, что

$$R(\varepsilon) > 1 + \sqrt{5} + c\varepsilon^2 \tag{35}$$

С помощью несложной вычислительной техники можно проверить, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{B_{2m+1}^1 - 1 - \sqrt{5}}{\left(\sqrt{5} - A_{2m+1}^1\right)^2} = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{45} < c.$$

А значит, найдется такое $M \in \mathbb{N}$, что для всякого $m \geq M$ верно, что

$$B_{2m+1} < 1 + \sqrt{5} + c\left(\sqrt{5} - A_{2m+1}^1\right)^2. \tag{36}$$

Благодаря равенству (34) видно, что для всех $m > M$ неравенства (35) и (36) противоречат друг другу. Так как с ростом m величина $\sqrt{5} - A_{2m+1}^1$ может стать сколь угодно малой, то это завершает доказательство неулучшаемости неравенства (14) при $\varepsilon \to 0$, а вместе с ним — и доказательство всей теоремы 14.

4 Заключение

В заключение мы опишем нашу гипотезу о том, как устроено поведение функции $S(\tau)$ на том оставшемся 1% отрезка $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, на котором мы пока не знаем ее точного значения.

Нам кажется, что на этом множестве функция $S(\tau)$ устроена очень сложно, так что даже для формулировки нашей гипотезы нам потребуется ввести вспомогательные определения.

Рекуррентно определим при каждом целом $n \geq 0$ множество M_n, состоящее из строк, каждые две из которых сравнимы и некоторые из них будут являться “потомками” других.

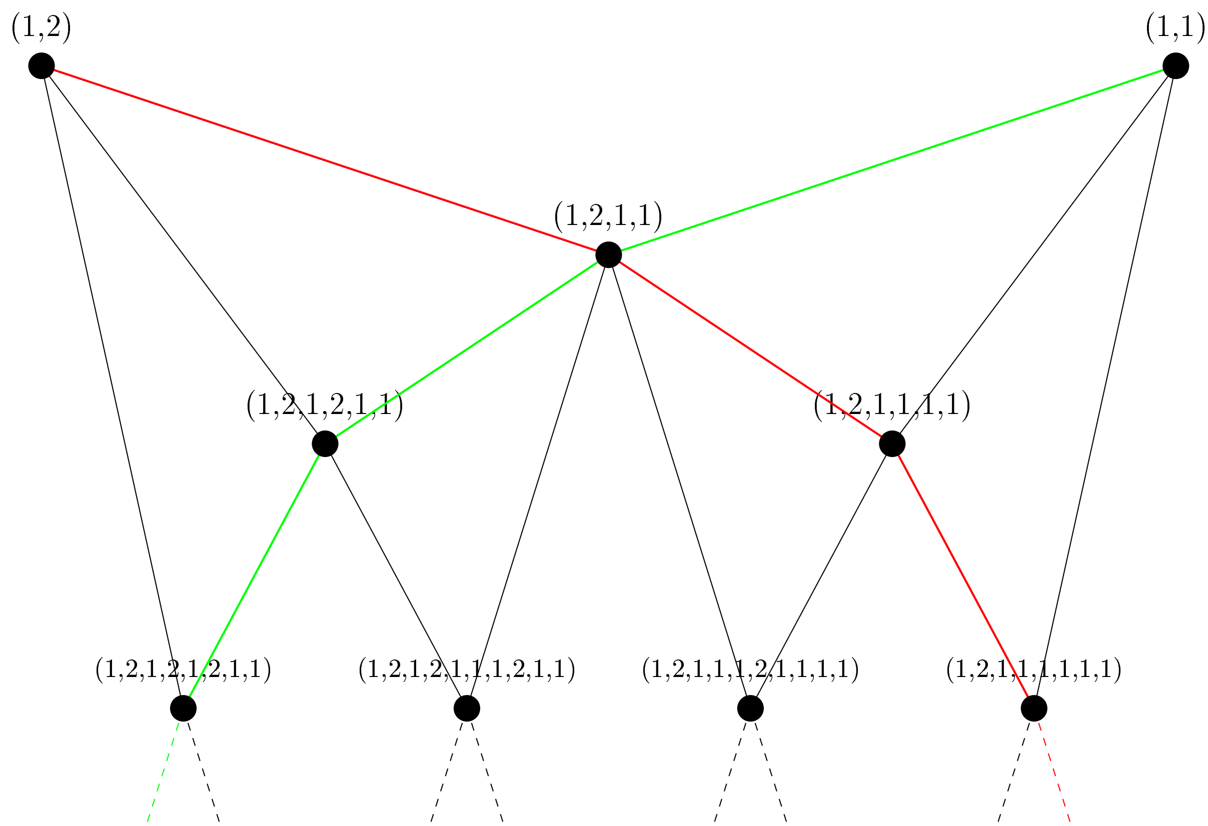
Множество M_0 положим состоящим только из двух строк $(1,2)$ и $(1,1)$, причем будем считать, что $(1,2) < (1,1)$ и никакая из этих двух строк не является потомком другой.

Если множество $M_n = \{\gamma_1 < \ \ldots \ < \gamma_m\}$ уже определено, то положим

$$M_{n+1} = \{\gamma_1 < \gamma_1\gamma_2 < \gamma_2 < \gamma_2\gamma_3 < \ \ldots \ < \gamma_{m-1}\gamma_m < \gamma_m\},$$

где под $\gamma_i\gamma_{i+1}$ подразумевается конкатенация строк γ_i и γ_{i+1}. Будем говорить, что строка $\gamma_i\gamma_{i+1}$ является потомком строк γ_i и γ_{i+1}.

Положим $M = \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$, т.е. M является, в некотором смысле, пределом множеств M_n при $n \to \infty$. На множество M естественно смотреть как на бесконечный граф, ребра в котором соединяют две строки тогда и только тогда, когда одна из них является потомком другой. Некоторое представление о структуре этого графа может дать следующая картинка (позже мы объясним, почему часть ребер мы окрасили в красный и зеленый цвета).



Пусть $\gamma \in M$ — некоторая строка. Положим $\alpha(\gamma) = [0; \overline{\gamma}]$ — число, неполные частные которого периодичны с периодом γ. Например, $\alpha(1,1) = [0; \overline{(1,1)}] = [0; \overline{1}] = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Положим $A(\gamma) = A(\alpha(\gamma))$ и $B(\gamma) = B(\alpha(\gamma))$, где функции $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ уже были определены в §2.

Итак, мы, наконец, готовы сформулировать нашу довольно сильную гипотезу (которую мы, для удобства изложения, решили разбить на две более простые гипотезы), доказать которую, однако, пока не удается.

Гипотеза 1. *Пусть γ — произвольная строка из M. Тогда справедлив несимметричный аналог теоремы Гурвица с параметрами $A(\gamma)$ и $B(\gamma)$. Более того, существуют константы $R(\gamma) > B(\gamma)$ и $L(\gamma) > A(\gamma)$ такие, что справедлив правый аналог теоремы Робинсона с параметрами $A(\gamma)$ и $R(\gamma)$, а также левый аналог теоремы Робинсона с параметрами $L(\gamma)$ и $B(\gamma)$.*

Если гипотеза 1 верна, то применив теорему 8 к набору чисел $A(\gamma), B(\gamma), R(\gamma), L(\gamma)$ мы можем найти точное значение функции $S(\tau)$ на отрезке $\left[\frac{A(\gamma)}{R(\gamma)}; \frac{L(\gamma)}{B(\gamma)}\right]$. Нетрудно видеть, что эти отрезки при разных $\gamma \in M$ не пересекаются (так как функция $S(\tau)$ ведет себя на них по-разному). Однако, мы предполагаем, что верно нечто большее:

Гипотеза 2.

$$\bigsqcup_{\gamma \in M} \left[\frac{A(\gamma)}{R(\gamma)}; \frac{L(\gamma)}{B(\gamma)}\right] \supset \left[\frac{1}{2}; 1\right].$$

То есть если гипотезы 1 и 2 верны, то мы знаем точное значение функции $S(\tau)$ в *каждой* точке отрезка $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$!

И даже более того, в этом случае благодаря теореме 8 мы можем утверждать, что точка $\tau \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ является достижимой тогда и только тогда, когда для некоторого $\gamma \in M$ верно, что $\tau = \frac{A(\gamma)}{B(\gamma)}$. После этого, благодаря теореме 9 мы понимаем, что все достижимые τ рациональны.

Отметим, что доказанные нами теоремы 10 и 11 являются частными случаями сформулированной в настоящем параграфе гипотезы 1.

Действительно, теорема 10 доказывает гипотезу 1 для всех вершин графа M, принадлежащих "красной" ветви — ветви, выходящей из строки $(1, 2)$ и движущийся на каждой "развилке" к самому правому потомку. А теорема 11 доказывает гипотезу 1 для всех вершин графа M, принадлежащих "зеленой" ветви — ветви, выходящей из строки $(1, 1)$ и движущийся на каждой "развилке" к самому левому потомку.

Однако, доказательство гипотезы 1 для произвольной вершины M пока получено не было.

Список литературы

[1] A. Hurwitz, *Über die angenäherte Darstellung der irrationalzahlen durch rationale Brüche*, Math. Ann., 39 (1891), 279 - 284.

[2] B. Segre, *Lattice points in infinite domains and asymmetric Diophantine approximation*, Duke Math. J., 12 (1945), 337 - 365.

[3] W.J. LeVeque, *On Asymmetric Approximations*, Michigan Math. J., 2 (1953), 1 - 6.

[4] J. Tong, *Symmetric and asymmetric Diophantine approximation of continued fractions*, Bulletin de la S. M. F., 117 (1989), N1, 59 - 67.

[5] J. Tong, *A Conjecture of Segre on Diophantine Approximation*, Mh. Math, 112 (1991), 141 - 147.

[6] H. Alzer, *On Segre's Theorem on Asymmetric Diophantine Approximation*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 67 (1997), 195 - 203.

[7] R.M. Robinson, *Unsymmetric approximation of irrational numbers*, Bull. Amer. Math. Soc., 53 (1947), 351 - 361.

[8] J. Tong, *Robinson's Theorem on Asymmetric Diophantine Approximation*, Rocky Mountain J. Math., 26 (1996), N1, 329 - 335.

[9] Ю. Ю. Финкельштейн, *Полигоны Клейна и приведенные регулярные непрерывные дроби*, УМН, 48 (1993), N3, 205–206.

[10] É. Galois, *Démonstration d'un théoréme sur les fractions continues périodiques*, Annales de Mathématiques, 19 (1828), 294–301.