МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет
Кафедра теоерии чисел

Дипломная работа

студента 612 группы
Уалиева Даура

Рациональные апроксимации и квадратичные формы

Научный руководитель: доцент
Н. Г. Мощевитин
Рецензент
И. Д. Кан

Москва, 2018 год.

ВВЕДЕНИЕ

В данной статье рассматриваются приближения на окружности. Будет доказан аналог теоремы Гурвица:

Теорема 1. *(Hurwitz's theorem) Для всех $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ существует б.м. дробей $\dfrac{a}{b}$ таких, что:*

$$|\alpha - \frac{a}{b}| < \frac{1}{\sqrt{5}b^2}$$

и при этом, константа $\sqrt{5}$ не может быть улучшено. Т.е. $\forall c > \sqrt{5}$ существует такое α, что неравенство $|\alpha - \dfrac{a}{b}| < \dfrac{1}{cb^2}$ имеет лишь конечно число решений в $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$.

Для чисел эквивалентных $\xi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ данная оценка точна и не может быть улучшенна. Для чисел не эквивалентных ξ константа из Теоремы 1 может быть заменена на другую, равную $\sqrt{8}$. И достигается она на числах эквивалентных $\sqrt{2}$.

Так же нам понадобится утверждение Фату [2,3]:

Утверждение 2. Пусть α иррациональное и дробь p/q, такая что $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$ тогда, либо p/q есть одна из подходящих дробей к α, либо p/q есть вида $\dfrac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}$ или вида $\dfrac{p_n - p_{n-1}}{q_n - q_{n-1}}$

ПРИБЛИЖЕНИЯ НА ОКРУЖНОСТИ

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \notin \mathbb{Q}^2$ и $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$. Точка $x = (a, b, Q) \in \mathbb{Z}^3$ такая, что $a^2 + b^2 = Q^2$ и $x_0 = (a, b)$. Определим

$$D(\alpha, x) = |Q \cdot \alpha - x_0|^2$$

Выведем общую формулу для $D(\alpha, x)$. Пусть прямая, проходящая через точки $(-1, 0)$ и α пересекает линию ординат в точке $(0, \alpha')$. Будем рассматривать подходящие дроби к α'. Пересечением прямой, проходящей через точки $(-1, 0)$ и $(0, p/q)$, с единичной окружностью будет являтся точка вида $(\frac{t_1}{Q}, \frac{t_2}{Q}) = T$. Покажем, что $t_1 = {}_0 \cdot (q^2 - p^2)$, $t_2 = {}_0 \cdot 2qp$ и $Q = c_0 \cdot (p^2 + q^2)$. Где $c_0 = 1$, если p, q имеют разную честность; и $c_0 = 1/2$, если p, q оба нечетные.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ -x + \frac{q}{p} y = 1 \end{cases} \rightarrow$$

$y^2 + (\frac{q}{p} y - 1)^2 = 1$

$y = \frac{2qp}{q^2 + p^2}$

$x = \frac{q}{p} y - 1 = \frac{q^2 - p^2}{q^2 + p^2}$

Теперь вычислим $x' = |(\alpha_1, \alpha_2) - (\frac{t_1}{Q}, \frac{t_2}{Q})|$. Для простоты изложения переобозначим $s = \frac{p}{q}$, $x = |\alpha' - \frac{p}{q}|$ и $(A, B) = (\frac{t_1}{Q}, \frac{t_2}{Q})$. Эквивалентности написанны при стремлении x к нулю.

$$x'^2 = (\alpha_1 - A)^2 + (\alpha_2 - B)^2 = \left(\frac{1 - \alpha'^2}{1 + \alpha'^2} - \frac{1 - s^2}{1 + s^2} \right)^2 + \left(\frac{2\alpha'}{1 + \alpha'^2} - \frac{2s}{1 + s^2} \right)^2 =$$

$$= \frac{4(s^2 - \alpha'^2)^2 + 4(\alpha' - s - \alpha' s(\alpha' - s))^2}{(1 + s^2)^2 (1 + \alpha'^2)^2} \sim \frac{16x^2 \cdot \alpha'^2 + 4(x - \alpha'^2 x)^2}{(1 + \alpha'^2)^4} =$$

$$= 4x^2 \frac{1}{(1 + \alpha'^2)^2}$$

Пусть p/q есть подходящая дробь к α' и $|\alpha' - p/q| < c/q^2$. Тогда

$$|\alpha - T| \sim \frac{2c}{q^2(\alpha'^2+1)}$$

Следовательно

$$D(\alpha, x) \sim \frac{4c^2}{q^4(\alpha'^2+1)^2}(q^2+a^2)^2 c_0^2 \sim \frac{4c^2 c_0^2}{(\alpha'^2+1)^2}\left(1+\frac{a^2}{q^2}\right)^2 \sim 4c^2 c_0^2 \qquad (1)$$

В 1 мы пользовались тем, что $a/q \to \alpha'$ при $x \to 0$

Теорема 3. *$\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, такого, что $\alpha \notin \mathbb{Q}^2$ и $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$, $\forall \epsilon > 0$, существует б.м. $x = (a, b, Q), a, b \in \mathbb{Z}, Q \in \mathbb{N}$ таких, что*

$$D(\alpha, x) < \frac{1}{2} + \epsilon$$

При этом существует такое α что константу $1/2$ в данном неравенстве нельзя улучшить.

$\triangleleft$ i)Пусть $s_n = [0; a_1, a_2, ..., a_n, 1, 1, 1, ...]$ и p_k/q_k -подходящая дробь к s_n. Обозначим $g_k = [1; 1, ..., 1, a_n, ..., a_1]$ и $\Gamma_k = [0; 1, 1, ...] + \gamma_k$. Известно, что

$$|s_n - p_k/q_k| = \frac{1}{q_k^2 \Gamma_k}, \Gamma_k \to \sqrt{5}$$

Если $\gamma_k < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Тогда $\gamma_{k+1} = 1 + \frac{1}{\gamma_k} > \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Следовательно, при $k > n$ каждая вторая $\Gamma_k < \sqrt{5}$.

Рассмторим честность p_k и q_k. Покажем, что каждая третья подходящая дробь (p_k, q_k) имеет четность: (нечет, нечет). С некоторого момента имеем:

$$\begin{cases} \mathrm{p}_{k+2} = p_{k+1} + p_k \\ \mathrm{q}_{k+2} = q_{k+1} + q_k \end{cases}$$

1. p_k, q_k имеют разную четность. Будем считать, что p_k нечетно, тогда из уравнения $q_{k+1}p_k - p_{k+1}q_k = (-1)^{k+1} \quad (2)$ получаем, что q_{k+1} так же нечетно. Следовательно, q_{k+2} нечетное число и тогда одно из чисел p_{k+2}, p_{k+1} нечетно. Получили, что пар p_k, q_k одинаковой четности - бесконечно много.

2. p_k, q_k оба нечетные. Тогда одно из чисел p_{k+1}, q_{k+1} четное, другое не четное, будем считать, что p_{k+1} - четно. Тогда p_{k+2} - нечетно, и q_{k+1} так же нечетно. $q_{k+2} =$ неч $+$ неч, т.е. четно. Тогда p_{k+3} и q_{k+3} оба нечетны. Получили, что нечетных пар - каждая третья дробь.

Из вышесказанного, следует, что константа из (1) равна $\frac{1}{5}$.

ii) Пусть теперь $s_n = [0; a_1, ..., a_n, 2, 2, ...]$. Покажем, что можно получить следующее: подходящих дробей одинаковой четности - конечное число.

$$\begin{cases} \mathrm{p}_n = a_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2} \\ \mathrm{q}_n = a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases}$$

если p_{n-2}, q_{n-2} оба нечетные, то одно из чисел p_{n-1}, q_{n-1} четно (из ур-я (2)), другое нечетно, пусть p_{n-1} - четно. возьмем a_n нечетным, получим требуемое. если p_{n-2}, q_{n-2} разной четности, то положим a_n четным. Далее, т.к. все остальные a_i равны 2, то имеем сохранение четности p_i, q_i.

Т.е. для всех подходящих дробей больших n имеем $c_0 = 1$, следовательно получаем константу в (1) равной 1/2.

Допустим, что дробь $\frac{p}{q}$ не есть подходящая дробь к α'. Тогда рассмотрим два варианта:

1. $\frac{p}{q}$ есть медиана, т.е. выполненно $p = p_k + p_{k-1}$ и $q = q_k + q_{k-1}$. Будем считать k достаточно большим (k»n.) Имеем следующее: $p_{k+1} + p_{k-1} = 2(p_k + p_{k-1}) = 2p$, $2q = q_{k+1} + q_{k-1}$. Тогда:

$$q\alpha' - p = \frac{(q_{k+1}\alpha - p_{k+1}) + (q_{k-1}\alpha - p_{k-1})}{2} \sim \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{1}{q_{k+1}} + \frac{1}{q_{k-1}} \right) \sim \frac{1}{\sqrt{2}q}$$

.

Учитывая, что p и q оба нечетные, т.е. $c_0 = 1/2$, $D(\alpha, x) = 1/2$.

2. Если же дробь $\frac{p}{q}$ не является ни подходящей дробью, ни медианой, то из предложения Фату имеем:

$$|\alpha' - \frac{p}{q}| > \frac{1}{q^2}$$

iii) Для всех остальных α' имеем c меньше чем $1/\sqrt{8}$ и, следовательно, константу в (1) меньше чем 1/2. $\triangleright$

Замечание 1: Как видно из доказательства, все числа α' эквивалентные $\xi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ имеют один и тот же порядок приближения, т.е. сохранилось св-во которое имелось в одномерном случае. С другой стороны, для чисел эквивалентных $\sqrt{2}$ имеется 2 случая, первый $c_0 = 1$ был показан в док-ве теоремы 2. Покажем, что имеет место $c_0 = 1/2$:

$\triangleleft$ 1. При p_{n-2}, q_{n-2} - оба нечетные, достаточно положить a_n четным и тогда будем иметь б.м пар p_i, q_i - нечетных.

2. Пусть p_{n-2} - четно, q_{n-2} - нечетно, тогда p_{n-1} - нечетно. Полоим a_n - нечетным, имеем p_n - неч. И тогда среди чисел q_n, q_{n-1} ровно 1 нечетно. Далее, т.к. $a_i = 2$ то четность будет сохранятся. $\triangleright$

Замечание 2: Из соответствия между $|\alpha' - p/q|$ и $D(\alpha, x)$ некоторые теоремы верные для цепных дробей в одномерном случае, могут быть перенесенны на случай окружности:

Утверждение 4. Какова бы ни была положительная функция $\varphi(q)$ натурального аргумента q, найдется иррациональное число α, для которого неравенство

$$|\alpha - p/q| < \varphi(q)$$

имеет бесчисленное множество решений в целых p, q $(q > 0)$.

Как видно из формулы $D(\alpha, x) = const \cdot xQ$, где x это расстояние между "прообразом- α и дробью $\frac{p}{q}$. Т.е. $D(\alpha, x) < \varphi(q)Q$ и т.к. Q и q связанны соотношением $Q = c_o(q^2 + p^2)$ то имеет место быть

Утверждение 5. Какова бы ни была положительная функция $\varphi(Q)$ натурального аргумента Q, найдется $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \notin \mathbb{Q}^2$ и $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$, для которого неравенство

$$D(\alpha, x) < \varphi(Q)$$

имеет бесчисленное множество решений в $x = (A, B, Q) \in \mathbb{N}^3, A^2 + B^2 = Q^2, .$

Список литературы

[1] А. Я. Хинчин. Цепные дроби. М., Физматлит, 1960 — 112 с.

[2] Grace, J.H.: The classification of rational approximations. Proc. Lond. Math. Soc. 17, 27–258 (1918)

[3] Fatou, P.: Sur l'approximation des incommensurables et les séries trigonométriques. C. R. Acad. Sci. Paris 139, 1019–1021 (1904)