Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет
Кафедра теории чисел

ПОДОЛЬСКИЙ Александр Андреевич
(студент 6 курса)

Интегральные конструкции в теории дзета-значений.

Дипломная работа

Научный руководитель: доцент *УЛАНСКИЙ Е. А.*

Москва
2017

Введение

Дзета-функция Римана $\zeta(s)$ определяется при $\operatorname{Re} s > 1$ следующим рядом:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{1}$$

Суммы такого вида при целых положительных значениях парметра s изучал еще Л. Эйлер. Он, в частности, получил явные формулы для вычисления значений дзета-функции в четных точках:

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{B_{2n}}{2(2n)!} \cdot (2\pi)^{2n}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

где B_{2n} — числа Бернулли, удовлетворяющие рекуррентному соотношению

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0, \qquad n \geqslant 1$$

и начальному условию $B_0 = 1$.

После Эйлера изучение сумм вида (1) продолжил Б. Риман. Он рассмотрел соответствующий ряд как функцию комплексного переменного s. Этот ряд представляет в области $\operatorname{Re} s > 1$ аналитическую функцию, которая может быть продолжена на всю комплексную плоскость до мероморфной функции $\zeta(s)$. Дзета-функция Римана и ее обобщения играют большую роль в аналитической теории чисел (см. [1]).

Значения дзета-функции Римана $\zeta(s)$ в натуральных точках будем называть дзета-значениями, четными или нечетными в зависимости от четности s. В 1882 г. Ф. Линдеман установил трансцендентность числа π, так что из формулы (2) следует трансцендентность четных дзета-значений.

С нечетными дзета-значениями дело обстоит существенно сложнее. В 1978 г. Апери [16] доказал иррациональность $\zeta(3)$. С тех пор возникло множество других доказательств этого факта, многие из которых собраны в статье [10]. Иррациональность какого-либо другого нечетного дзета-значения на данный момент не доказана. Однако продвижения в этом направлении есть. Т. Ривоаль [20] в 2000 г. доказал, что среди нечетных дзета-значений бесконечно много иррациональных. В. Зудилин [9] в 2001 г. доказал, что одно из чисел $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ иррационально.

Доказательство Апери довольно сложное и в некотором смысле неожиданное. Апери выбирает последовательности u_n и v_n, удовлетворяющие рекуррентному соотношению

$$(n+1)^3 x_{n+1} - (2n+1)(17n^2 + 17n + 5)x_n + n^3 x_{n-1} = 0$$

с начальными условиями $u_0 = 1$, $u_1 = 5$ и $v_0 = 0$, $v_1 = 6$. Тогда оказывается, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = \zeta(3)$. Кроме того, что совершенно неожиданно, $u_n \in \mathbb{Z}$ и $d_n^3 v_n \in \mathbb{Z}$, где через

d_n обозначено наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \ldots, n$. Применение теоремы Пуанкаре к рекуррентному соотношению дает равенство

$$\lim_{n\to\infty} |u_n\zeta(3) - v_n|^{1/n} = \left(\sqrt{2}-1\right)^4. \tag{3}$$

Если предположить, что $\zeta(3) = \dfrac{a}{b}$ с целыми a и b, то линейные формы

$$r_n = b \cdot d_n^3 \left(u_n\zeta(3) - v_n\right)$$

являются целыми числами, причем из-за (3) эти формы отличны от нуля, начиная с некоторого n. Из асимптотического закона распределения простых чисел (см., например, [4]) с учетом

$$d_n = \prod_{\substack{p\leqslant n\\ p\text{ – простое}}} p^{\left[\log_p n\right]} \leqslant \prod_{\substack{p\leqslant n\\ p\text{ – простое}}} n \;=\; n^{\pi(n)}$$

следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} (d_n)^{1/n} = e$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} |r_n|^{1/n} = e^3(\sqrt{2}-1)^4 < 1$. Возникло противоречие, так как $r_n \geqslant 1$ при достаточно больших n.

Основная идея докзательства – построение быстро стремящихся к нулю линейных форм, коэффициенты которых обладают хорошими арифметическими свойствами. В 1979 году Ф. Бейкерс [17] придумал короткое и изящное доказательство иррациональности $\zeta(3)$. Он построил те же самые формы, что и Апери, но сделал это с помощью тройного интеграла

$$\int\limits_{[0,1]^3} \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n z^n(1-z)^n}{(1-z(1-xy))^{n+1}}\, dx\, dy\, dz. \tag{4}$$

Это доказательство подтолкнуло к изучению различных интегральных конструкций, связанных с дзета-значениями. Так, в 1998 г. В. Н. Сорокин [13] предложил другое доказательство иррациональности $\zeta(3)$, дающее те же формы, но использующее интегралы

$$\int\limits_{[0,1]^3} \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n z^n(1-z)^n\, dx\, dy\, dz}{(1-xy)^{n+1}(1-xyz)^{n+1}}. \tag{5}$$

В 2002 г. С. Злобин [5] доказал интегральное тождество, из которого следует равенство интегралов (4) и (5) и в том же году обобщил его в работе [6]. Для этого он ввел целый класс новых интегралов, обобщающих (5). В 2005 г. Злобин [7] доказал общую теорему о представлении интегралов этого нового общего класса в виде линейных форм от полилогарифмов и доказал арифметические свойства этих форм в некоторых частных случаях. Таким образом Злобин получил свое доказательство иррациональности $\zeta(3)$.

В данной работе мы подробно рассмотрим интегральные конструкции, связанные с дзета-значениями. В первой главе мы рассмотрим естественное обобщение конструкции Бейкерса. Во второй главе мы приведем доказательство Злобина иррациональности $\zeta(3)$ в самой частной его форме. При этом мы слегка изменим определенную часть доказательства, показав тем самым, как можно его упростить, используя доказанную в 2006 г.

Е. Уланским [14] теорему. Кроме того, косметические изменения коснутся некоторых технических аспектов доказательства. В третьей главе мы дадим обобщение теоремы из [6].

1 Интегралы Бейкерса.

Лемма 1.1. Пусть r, s и n – неотрицательные целые числа.

а) Если $r > s$, то

$$\int\limits_{[0,1]^2} \frac{\ln^n(xy)}{1-xy}\, x^r y^s \,dx\,dy \;=\; \frac{(-1)^n \cdot n!}{r-s} \cdot \left(\frac{1}{(s+1)^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{r^{n+1}} \right).$$

б) Если $r = s$, то

$$\int\limits_{[0,1]^2} \frac{\ln^n(xy)}{1-xy}\, x^r y^r \,dx\,dy \;=\; (-1)^n \cdot (n+1)! \left(\zeta(n+2) - \frac{1}{1^{n+2}} - \ldots - \frac{1}{r^{n+2}} \right).$$

◀ Пусть σ – произвольное неотрицательное число. Для всех $0 < x, y < 1$ имеет место следующее равенство:

$$\frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1-xy} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} x^{r+\sigma+k} y^{s+\sigma+k}. \tag{6}$$

Возьмем произвольное $\varepsilon \in (0, 1/e)$.Покажем, что обе части равенства (6) могут быть проинтегрированы по множеству $[\varepsilon, 1-\varepsilon]^2$.

Заметим, что $|x^{r+\sigma+k} y^{s+\sigma+k}| \leqslant (1-\varepsilon)^{r+s+2\sigma+2k}$ для всех неотрицательных k и для всех $(x, y) \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]^2$. Кроме того, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (1-\varepsilon)^{r+s+2\sigma+2k}$ является геометрической прогрессией со знаменателем $(1-\varepsilon)^2 < 1$, а потому сходится. Значит, по признаку равномерной сходимости Вейерштрасса ряд в (6) сходится абсолютно и равномерно на множестве $[\varepsilon, 1-\varepsilon]^2$ и можно произвести почленное интегрирование этого ряда:

$$\int\limits_{[\varepsilon,1-\varepsilon]^2} \frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1-xy}\,dx\,dy \;= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left((1-\varepsilon)^{r+\sigma+k+1} - \varepsilon^{r+\sigma+k+1}\right)\left((1-\varepsilon)^{s+\sigma+k+1} - \varepsilon^{s+\sigma+k+1}\right)}{(r+\sigma+k+1)(s+\sigma+k+1)}. \tag{7}$$

Продифференцируем теперь обе части получившегося выражения n раз по σ. Легко видеть, что для всех неотрицательных n верно следующее равенство:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)^n \frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1-xy} \;=\; \frac{\ln^n(xy)}{1-xy}\, x^{r+\sigma} y^{s+\sigma},$$

причем все функции являются непрерывными на множестве $(x, y, \sigma) \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]^2 \times [0, \infty)$. Значит, можно проинтегрировать интеграл по параметру σ. Таким образом, равенство

$$\frac{\partial^n}{\partial\sigma^n} \int\limits_{[\varepsilon,1-\varepsilon]^2} \frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1-xy}\,dx\,dy \;=\; \int\limits_{[\varepsilon,1-\varepsilon]^2} \frac{\ln^n(xy)}{1-xy}\, x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}\,dx\,dy \tag{8}$$

верно для всех $\sigma > 0$.

Введем для краткости следующие обозначения:

$$a(\varepsilon, r, s, \sigma, k) = \left((1-\varepsilon)^{r+\sigma+k+1} - \varepsilon^{r+\sigma+k+1}\right)\left((1-\varepsilon)^{s+\sigma+k+1} - \varepsilon^{s+\sigma+k+1}\right),$$

$$b(\varepsilon, r, s, \sigma, k) = \frac{a(\varepsilon, r, s, \sigma, k)}{(r+\sigma+k+1)(s+\sigma+k+1)}.$$

По правилам дифференцирования сложной функции имеем для всех $\sigma > 0$ и для любых неотрицательных целых n и k

$$\frac{\partial^n b}{\partial \sigma^n} \;=\; \sum \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3!} \cdot \frac{\partial^{n_1} a}{\partial \sigma^{n_1}} \cdot \frac{(-1)^{n_2}\; n_2!}{(r+\sigma+k+1)^{n_2+1}} \cdot \frac{(-1)^{n_3}\; n_3!}{(s+\sigma+k+1)^{n_3+1}}, \tag{9}$$

где суммирование ведется по всем таким наборам неотрицательных целых (n_1, n_2, n_3), что $n_1 + n_2 + n_3 = n$. Количество таких наборов обозначим через A, оно зависит только от n. Имеем

$$\left|\frac{\partial^{n_1} a}{\partial \sigma^{n_1}}\right| \;\leqslant\; \sum_{m=0}^{n_1} \binom{n_1}{m} \cdot \left(|\log^m(1-\varepsilon)| + |\log^m(\varepsilon)|\right)\left(\left|\log^{n_1-m}(1-\varepsilon)\right| + \left|\log^{n_1-m}(\varepsilon)\right|\right).$$

Учитывая, что $\varepsilon < 1/e < 1 - 1/e$, получаем

$$\left|\frac{\partial^{n_1} a}{\partial \sigma^{n_1}}\right| \;\leqslant\; n_1\, 2^{n_1} \left(1 + |\log^{n_1}(\varepsilon)|\right)^2.$$

Отсюда имеем

$$\left|\frac{\partial^n b}{\partial \sigma^n}\right| \;\leqslant\; n!\, 2^n A \cdot \left(1 + |\log^n(\varepsilon)|\right)^2 \cdot \frac{1}{(k+1)^2}.$$

По признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\partial^n b}{\partial \sigma^n}$ для всех n сходится абсолютно и равномерно на множестве $\sigma > 0$. Значит, можно внести частное дифференцирование под знак суммы ряда:

$$\frac{\partial^n}{\partial \sigma^n} \sum_{k=0}^{\infty} b(\varepsilon, r, s, \sigma, k) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^n b(\varepsilon, r, s, \sigma, k)}{\partial \sigma^n}.$$

Таким образом, мы продифференцировали равенство (7) n раз по σ и с учетом (8) и последнего равенства мы доказали, что для всех $\sigma > 0$ верно

$$\int\limits_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]^2} \frac{\ln^n(xy)}{1-xy}\, x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}\; dx\, dy \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^n b(\varepsilon, r, s, \sigma, k)}{\partial \sigma^n}. \tag{10}$$

Далее мы перейдем в этом равенстве к пределу при $\varepsilon \to +0$.

Предел левой части, если он существует, равен несобственному интегралу. Докажем сходимость несобственного интеграла. Для этого воспользуемся мажорантным признаком сходимости несобственных интегралов. Очевидно, что для $0 < x, y < 1$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{\ln^n(xy)}{1-xy}\, x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}\right| \leqslant \frac{(-\ln x - \ln y)^n}{1-xy}. \tag{11}$$

Значит, нам достаточно доказать сходимость несобственного интеграла

$$\int\limits_{[0,1]^2} \frac{(-\ln x - \ln y)^n}{1-xy}\; dx\, dy. \tag{12}$$

Для $n = 0$ сходимость этого интеграла можно установить непосредственно, кроме того известно, что он равен $\dfrac{\pi^2}{6}$. Для положительных значений n раскроем скобки по биному Ньютона и получим

$$\int\limits_{[0,1]^2} \frac{(-\ln x - \ln y)^n}{1-xy}\, dx\, dy \;=\; \int\limits_{[0,1]^2} \frac{(-\ln x)^n}{1-xy}\, dx\, dy \;+$$
$$+\;\sum_{m=1}^{n-1} \binom{n}{m} \int\limits_{[0,1]^2} \frac{(-\ln y)^m\,(-\ln x)^{n-m}}{1-xy}\, dx\, dy \;+ \int\limits_{[0,1]^2} \frac{(-\ln y)^n}{1-xy}\, dx\, dy \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n}{m} \int\limits_{[0,1]^2} \frac{(-\ln y)^m\,(-\ln x)^{n-m}}{(1-y)\;\,(1-x)}\, dx\, dy \;+2 \int\limits_{[0,1]} \frac{(-\ln x)^n}{1-x}\, dx.$$

Для последнего перехода использовалось неравенство $(1-x)(1-y) \leqslant 1-xy$, верное при $0 \leqslant x, y \leqslant 1$. Легко видеть, что для сходимости несобственного интеграла из (10) достаточно доказать, что при любом положительном m сходится интеграл

$$\int\limits_{[0,1]} \frac{(-\ln x)^m}{1-x}\, dx. \tag{13}$$

Для исследования этого интеграла разобьем его на две части:

$$\int\limits_{[0,1]} \frac{(-\ln x)^m}{1-x}\, dx \;=\; \int\limits_{0}^{1/2} \frac{(-\ln x)^m}{1-x}\, dx \;+\; \int\limits_{1/2}^{1} \frac{(-\ln x)^m}{1-x}\, dx. \tag{14}$$

Сходимость каждой части будем доказывать по мажорантному признаку.

Так как для любого положительного m верно равенство $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\,(-\ln x)^m \;=\; 0$, то с некоторой постоянной C_1, зависящей только от m, для всех $0 \leqslant x \leqslant 1/2$ выполняется неравенство $(-\ln x)^m < \dfrac{C_1}{\sqrt{x}}$. Получаем, что при каждом положительном m

$$\int\limits_{0}^{1/2} \frac{(-\ln x)^m}{1-x}\, dx < \int\limits_{0}^{1/2} \frac{2C_1}{\sqrt{x}}\, dx \;=\; 2\sqrt{2}\, C_1,$$

то есть этот интеграл сходится.

Легко видеть, что для любого положительного m для всех $1/2 \leqslant x \leqslant 1$ выполняется $(-\ln x)^m \leqslant -\ln x \leqslant \sqrt{2(1-x)}$. Второе неравенство в цепочке справедливо, так как функция $\sqrt{2(1-x)} + \ln x$ выпукла вверх на отрезке $[1/2, 1]$ и ее значения на концах неотрицательны. Получаем, что при каждом положительном m

$$\int\limits_{1/2}^{1} \frac{(-\ln x)^m}{1-x}\, dx \leqslant \int\limits_{1/2}^{1} \frac{\sqrt{2}\, dx}{\sqrt{1-x}} \;=\; 2,$$

то есть сходится и второе слагаемое в (14), а значит сходится и несобственный интеграл (13). Тем самым доказана законность предельного перехода в левой части формулы (10).

Теперь перейдем к пределу в правой части формулы (10). Заметим, что при любом положительном n_1
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial^{n_1}a(\varepsilon,r,s,\sigma,k)}{\partial\sigma^{n_1}}=0.$$
Кроме того, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}a(\varepsilon,r,s,\sigma,k)=1$. Из этого следует, что
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial^{n}b(\varepsilon,r,s,\sigma,k)}{\partial\sigma^{n}}=\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^n\cdot n!}{(r+\sigma+k+1)^{m+1}(s+\sigma+k+1)^{n-m+1}}. \qquad (15)$$
Покажем теперь, что предельный переход можно внести под знак бесконечной суммы. Легко видеть, что $|a(\varepsilon,r,s,\sigma,k)|\leqslant 1$ для всех $\varepsilon\in(0,1/e)$. Кроме того, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln^{n_1}\varepsilon=0$ для всех положительных $n_1\leqslant n$ и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(1-\varepsilon)\ln^{n_1}(1-\varepsilon)=0$ для любых положительных n_1. Из двух последних равенств имеем, что существует такая постоянная $C_2>1$, зависящая только от n, что
$$\left|\frac{\partial^{n_1}a(\varepsilon,r,s,\sigma,k)}{\partial\sigma^{n_1}}\right|\leqslant C_2$$
для всех $n_1\leqslant n$, $\sigma>0$ и неотрицательных k. Значит, вспоминая (9), заключаем, что
$$\left|\frac{\partial^{n}b(\varepsilon,r,s,\sigma,k)}{\partial\sigma^{n}}\right|\leqslant\frac{n!A\,C_2}{(k+1)^2}.$$
Таким образом ряд из частных производных для всех n сходится абсолютно и равномерно на множестве $\varepsilon\in(0,1/e)$ по признаку Вейерштрасса. Значит, можно внести предел под знак суммы, и, вспоминая (15), получим
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial^{n}b(\varepsilon,r,s,\sigma,k)}{\partial\sigma^{n}} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^n\cdot n!}{(r+\sigma+k+1)^{m+1}(s+\sigma+k+1)^{n-m+1}}.$$
Таким образом, равенство (10) после перехода к пределу при $\varepsilon\to +0$ превратилось в
$$\int\limits_{[0,1]^2}\frac{\ln^n(xy)}{1-xy}\,x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}\;dx\,dy \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^n\cdot n!}{(r+\sigma+k+1)^{m+1}(s+\sigma+k+1)^{n-m+1}}. \qquad (16)$$
Теперь перейдем в этом равенстве к пределу при $\sigma\to +0$.

Чтобы внести предельный переход под знак двойного несобственного интеграла в левой части последнего равенства, необходимо проверить равномерную сходимость несобственного интеграла на множестве $\sigma>0$ и равномерную сходимость подынтегральной функции для любого $[\varepsilon,1-\varepsilon]^2\in[0,1]^2$ при $\sigma\to +0$. Равномерная сходимость несобственного интеграла следует из оценки (11), сходимости несобственного интеграла (12) и признака Вейерштрасса. Равномерная сходимость подынтегральной функции очевидна, таким образом, можно перейти к пределу под знаком интеграла:
$$\lim_{\sigma\to +0}\int\limits_{[0,1]^2}\frac{\ln^n(xy)}{1-xy}\,x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}\;dx\,dy \;=\; \int\limits_{[0,1]^2}\frac{\ln^n(xy)}{1-xy}\,x^{r}y^{s}\;dx\,dy.$$

Чтобы внести предельный переход под знак бесконечной суммы, нужно проверить равномерную сходимость ряда. В нашем случае это следует из оценки

$$\left|\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^n \cdot n!}{(r+\sigma+k+1)^{m+1}(s+\sigma+k+1)^{n-m+1}}\right| \leqslant \frac{(n+1)!}{(k+1)^{n+2}}$$

и сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{n+2}}$ для всех неотрицательных n, а также признака Вейерштрасса.

Таким образом, можно осуществить переход к пределу при $\sigma \to +0$ в равенстве (16), получая равенство

$$\int\limits_{[0,1]^2} \frac{\ln^n(xy)}{1-xy}\, x^r y^s\, dx\, dy \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^n \cdot n!}{(r+k+1)^{m+1}(s+k+1)^{n-m+1}}.$$

Заметим, что при $r = s$ полученное равенство в точности дает второе утверждение леммы, так как

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^n \cdot n!}{(r+k+1)^{m+1}(r+k+1)^{n-m+1}} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n+1)!}{(r+k+1)^{n+2}} \;=$$
$$=\; (-1)^n \cdot (n+1)! \left(\zeta(n+2) - \frac{1}{1^{n+2}} - \ldots - \frac{1}{r^{n+2}}\right).$$

При $r > s$ преобразуем двойную сумму следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^n \cdot n!}{(r+k+1)^{m+1}(s+k+1)^{n-m+1}} \;=$$
$$=\; \frac{(-1)^n \cdot n!}{r-s} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{s+k+1} - \frac{1}{r+k+1}\right) \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{(r+k+1)^m (s+k+1)^{n-m}} \;=$$
$$\frac{(-1)^n \cdot n!}{r-s} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(s+k+1)^{n+1}} - \frac{1}{(r+k+1)^{n+1}}\right) \;=\; \frac{(-1)^n \cdot n!}{r-s} \sum_{k=s+1}^{r} \frac{1}{k^{n+1}}.$$

Таким образом лемма 1.1 полностью доказана. ►

Доказательство этой леммы практически полностью повторяет доказательство теоремы 2.1 в статье [18].

Следствие 1.1. Пусть k – неотрицательное целое число, $P(x,y)$ – многочлен с целыми коэффициентами, $\deg_x P(x,y) \leqslant n$ и $\deg_y P(x,y) \leqslant n$. Тогда с некоторыми целыми числами A и B выполняется равенство

$$\int\limits_{[0,1]^2} \frac{\ln^k(xy)}{1-xy}\, P(x,y)\, dx\, dy \;=\; d_n^{-k-2}\bigl(A + B \cdot \zeta(k+2)\bigr).$$

Для доказательства иррациональности $\zeta(3)$ Бейкерс использовал равенство

$$\frac{\ln(xy)}{1-xy} \;=\; \int\limits_{[0,1]} \frac{-1}{1-(1-xy)z}\,dz, \tag{17}$$

которое мы докажем в несколько более общем случае. В формулировке следующего утверждения встречается символ Похгаммера $(t)_k$. Он определяется при целых неотрицательных k следующим образом: $(t)_k = \prod\limits_{i=0}^{k-1}(t+i)$, причем пустое произведение по определению полагается равным 1.

Утверждение 1.1. Пусть $k>0$ и $t \geqslant 0$ – целые числа. Тогда для всех v

$$\frac{(\ln v)^{k+t}}{(1-v)^k} \;=\; (-1)^k\cdot(t+1)_k\cdot\int\limits_{[0,1]^k}\frac{z_1^{k-1}\,z_2^{k-2}\ldots z_{k-1}}{\prod\limits_{j=1}^{k}\bigl(1-(1-v)z_1\ldots z_j\bigr)}\ln^t\bigl(1-(1-v)z_1\ldots z_k\bigr)\,dz_1\ldots dz_k.$$

◀ Будем доказывать утверждение индукцией по k. Простым взятием интеграла по переменной z получаем

$$\int\limits_{[0,1]}\frac{\ln^t\bigl(1-(1-v)z\bigr)}{\bigl(1-(1-v)z\bigr)}\,dz \;=\; \frac{-1}{1-v}\cdot\int\limits_{[0,1]}\frac{\ln^t\bigl(1-(1-v)z\bigr)}{\bigl(1-(1-v)z\bigr)}\,d\bigl(1-(1-v)z\bigr) \;=$$

$$=\;\frac{-1}{1-v}\cdot\int\limits_{[0,1]}\ln^t\bigl(1-(1-v)z\bigr)\,d\ln\bigl(1-(1-v)z\bigr)\;=\;\frac{-1}{t+1}\cdot\frac{(\ln v)^{t+1}}{1-v}.$$

Тем самым установлена база индукции.

Предположим теперь, что утверждение верно для некоторого натурального k и докажем, что оно верно для $k+1$. Простым взятием интеграла по переменной z_{k+1} устанавливается равенство

$$-(t+1)\cdot\int\limits_{[0,1]^{k+1}}\frac{z_1^{k}\,z_2^{k-1}\ldots z_k}{\prod\limits_{j=1}^{k+1}\bigl(1-(1-v)z_1\ldots z_j\bigr)}\ln^t\bigl(1-(1-v)z_1\ldots z_{k+1}\bigr)\,dz_1\ldots dz_{k+1} \;=$$

$$=\;\frac{1}{1-v}\cdot\int\limits_{[0,1]^k}\frac{z_1^{k-1}\,z_2^{k-2}\ldots z_{k-1}}{\prod\limits_{j=1}^{k}\bigl(1-(1-v)z_1\ldots z_j\bigr)}\ln^{t+1}\bigl(1-(1-v)z_1\ldots z_k\bigr)\,dz_1\ldots dz_k.$$

Тем самым доказан индукционный переход. Утверждение 1.1 доказано. ▶

Легко видеть, что если положить в последнем утверждении $k=1$ и $t=0$, а также $v=xy$, то получится в точности равенство (17).

Следствие 1.2. Пусть k – положительное целое число, $P(x,y)$ – многочлен с целыми коэффициентами, $\deg_x P(x,y)\leqslant n$ и $\deg_y P(x,y)\leqslant n$. Тогда с некоторыми целыми числами A и B выполняется равенство

$$\int\limits_{[0,1]^{k+2}}\frac{P(x,y)\cdot(1-xy)^{k-1}\,z_1^{k-1}\,z_2^{k-2}\ldots z_{k-1}}{\prod\limits_{j=1}^{k}\bigl(1-(1-xy)z_1\ldots z_j\bigr)}\,dx\,dy\,dz_1\ldots dz_k \;=\; d_n^{-k-2}\bigl(A+B\cdot\zeta(k+2)\bigr).$$

Бейкерс в своем доказательстве в качестве $P(x,y)$ брал произведение $P_n(x)P_n(y)$, где $P_n(x) = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n \Big(x^n(1-x)^n\Big)$. Это частный случай многочленов Лежандра

$$L_n(z) = \frac{1}{2^n\, n!}\left(\frac{d}{dz}\right)^n \Big(z^2-1\Big)^n, \qquad P_n(x) = L_n(1-2x).$$

Утверждение 1.2.

$$P_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}x^k$$

◀ В определении $P_n(x)$ раскроем скобки по биному Ньютона:

$$P_n(x) \;=\; \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \Big(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{n+k}\Big).$$

Дифференцируя n раз по x, получим

$$P_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\cdot\frac{(n+k)\ldots(k+1)}{n!}\cdot x^k.$$

Как легко видеть, утверждение 1.2 доказано. ▶

Эти многочлены оказались удобными в интегральных конструкциях.

Утверждение 1.3. Для всех неотрицательных целых n и для любой функции $f \in \mathcal{C}^n[0,1]$ верно равенство:

$$\int\limits_{[0,1]} P_n(x)f(x)\,dx \;=\; \frac{(-1)^n}{n!}\int\limits_{[0,1]} x^n(1-x)^n\frac{d^nf}{dx^n}\,dx.$$

◀ Вспоминая определение $P_n(x)$, получим, что

$$n!\int\limits_{[0,1]} P_n(x)f(x)\;dx \;=\; n!\int\limits_{[0,1]} f(x)\cdot\left(\frac{d}{dx}\right)^n\Big(x^n(1-x)^n\Big)\,dx.$$

Теперь будем интегрировать полученное выражение по частям:

$$n!\int\limits_{[0,1]} f(x)\cdot\left(\frac{d}{dx}\right)^n\Big(x^n(1-x)^n\Big)\,dx \;=\; n!\int\limits_{[0,1]} f(x)d\left\{\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}\Big(x^n(1-x)^n\Big)\right\} =$$

$$= f(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}\Big(x^n(1-x)^n\Big)\Bigg|_0^1 - n!\int\limits_{[0,1]} f'(x)\cdot\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}\Big(x^n(1-x)^n\Big)\,dx$$

Заметим, что первое слагаемое равно нулю, а со вторым слагаемым можно проделать аналогичную процедуру. Оба замечания следуют из того, что при всех целых k, таких, что $0 \leqslant k < n$ выполняется

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k\Big(x^n(1-x)^n\Big)\Bigg|_0^1 \;=\; 0.$$

Этот факт тривиально следует из формулы Ньютона-Лейбница.

Тем самым утверждение 1.3 доказано. ►

Самой важной частью доказательства Бейкерса было интегральное тождество, связывающее два типа интегралов. Один тип интегралов позволяет получить формы от $\zeta(3)$, а другой тип интегралов позволяет эти формы оценить.

Лемма 1.2. Справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_{[0,1]^2} \frac{-\ln(xy)}{1-xy} P_n(x)P_n(y)\, dx\, dy \;=\; \int\limits_{[0,1]^3} \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n z^n(1-z)^n}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}\, dxdydz.$$

◄ Как следует из (17), справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_{[0,1]^2} \frac{-\ln(xy)}{1-xy} P_n(x)P_n(y)\, dx\, dy \;=\; \int\limits_{[0,1]^3} \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-xy)z}\, dxdydz.$$

Применяя утверждение 1.3 к интегрированию по переменной x и к функции $f(x) = \dfrac{1}{1-(1-xy)z}$, получим следующее равенство:

$$\int\limits_{[0,1]^3} \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-xy)z}\, dxdydz \;=\; \int\limits_{[0,1]^3} \frac{(xyz)^n(1-x)^n P_n(y)}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}\, dxdydz.$$

Чтобы применить утверждение 1.3 к интегрированию по переменной y, совершим замену переменной. Переменные x и y оставим без изменений, а вместо переменной z рассмотрим $w = \dfrac{1-z}{1-(1-xy)z}$. Такая замена, как легко проверить, является взаимно однозначной и дифференцируемой. Тогда

$$z = \frac{1-w}{1-(1-xy)w}, \qquad 1-(1-xy)z = \frac{xy}{1-(1-xy)w}$$

и в результате получим, что подынтегральная функция изменится следующим образом:

$$\frac{(xyz)^n(1-x)^n P_n(y)}{(1-(1-xy)z)^{n+1}} \;=\; \frac{(1-x)^n(1-w)^n P_n(y)\,(1-(1-xy)w)}{xy}.$$

Еще необходимо учесть якобиан, который в нашем случае устроен крайне просто:

$$J \;=\; \frac{-xy}{(1-(1-xy)w)^2}.$$

Теперь соберем вместе все полученное:

$$\int\limits_{[0,1]^3} \frac{(xyz)^n(1-x)^n P_n(y)}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}\, dxdydz \;=\; \int\limits_{[0,1]^3} \frac{(1-x)^n(1-w)^n P_n(y)}{(1-(1-xy)w)}\, dxdydw.$$

Теперь применим утверждение 1.3 к интегрированию по переменной y и к функции $f(y) = \dfrac{1}{1-(1-xy)w}$, получая

$$\int\limits_{[0,1]^3} \frac{(1-x)^n(1-w)^n P_n(y)}{(1-(1-xy)w)}\, dxdydw \;=\; \int\limits_{[0,1]^3} \frac{(xyw)^n(1-y)^n(1-x)^n(1-w)^n}{(1-(1-xy)w)^{n+1}}\, dxdydw.$$

Как легко видеть, лемма 1.2 доказана. ►

Попытки обобщить интегралы

$$\int\limits_{[0,1]^3} \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n z^n(1-z)^n}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}\, dxdydz$$

на случай большего числа переменных приводят к появлению лишних дзета-значений одной четности ([2], [3]).

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{[0,1]^2} \frac{P_n(x)P_n(y)\ln^2(xy)}{1-xy}\, dx\, dy,$$

где $P_n(x) = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n \Big(x^n(1-x)^n\Big)$ — уже использовавшиеся нами многочлены Лежандра. По следствию 1.1 с некоторыми целыми числами A и B выполняется равенство

$$\int\limits_{[0,1]^2} \frac{P_n(x)P_n(y)\ln^2(xy)}{1-xy}\, dx\, dy \;=\; d_n^{-4}\big(A + B\cdot\zeta(4)\big).$$

Утверждение 1.4. Для всех неотрицательных целых n выполняется равенство

$$\int\limits_{[0,1]^2} \frac{P_n(x)P_n(y)\ln^2(xy)}{1-xy}\, dx\, dy \;=\; 2\int\limits_{[0,1]^4} \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n w_1^n}{1-w_2}\times$$
$$\times\left(\frac{(1-w_1w_2)^n}{\big(1-(1-xy)(1-w_1w_2)\big)^{n+1}} - \frac{w_2^n(1-w_1)^n}{\big(1-(1-xy)(1-w_1)\big)^{n+1}}\right) dx\, dy\, dw_1\, dw_2.$$

◄ По утверждению 1.1 имеем

$$\frac{\ln^2(xy)}{1-xy} \;=\; 2\cdot\int\limits_{[0,1]} \frac{1-(1-xy)z_1}{\big(1-(1-xy)z_1\big)\big(1-(1-xy)z_1z_2\big)}\, dz_1\, dz_2,$$

а значит наш интеграл преобразуется следующим образом:

$$\int\limits_{[0,1]^2} \frac{P_n(x)P_n(y)\ln^2(xy)}{1-xy}\, dx\, dy \;=\; 2\int\limits_{[0,1]^4} \frac{P_n(x)P_n(y)\,(1-xy)z_1}{\big(1-(1-xy)z_1\big)\big(1-(1-xy)z_1z_2\big)}\, dx\, dy\, dz_1\, dz_2.$$

Используя равенство

$$\frac{(1-xy)z_1}{\big(1-(1-xy)z_1\big)\big(1-(1-xy)z_1z_2\big)} \;=\; \frac{1}{1-z_2}\cdot\left(\frac{1}{1-(1-xy)z_1} - \frac{1}{1-(1-xy)z_1z_2}\right),$$

преобразуем наш интеграл:

$$2\int\limits_{[0,1]^4} \frac{P_n(x)P_n(y)\,(1-xy)z_1}{\big(1-(1-xy)z_1\big)\big(1-(1-xy)z_1z_2\big)}\,dx\,dy\,dz_1\,dz_2 \ = $$
$$= \ 2\int\limits_{[0,1]^4} \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-z_2}\cdot\left(\frac{1}{1-(1-xy)z_1}-\frac{1}{1-(1-xy)z_1z_2}\right)\,dx\,dy\,dz_1\,dz_2.$$

В полученном интеграле совершим n раз интегрирование по частям относительно переменной x. Согласно утверждению 1.3 будем иметь

$$2\int\limits_{[0,1]^4} \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-z_2}\cdot\left(\frac{1}{1-(1-xy)z_1}-\frac{1}{1-(1-xy)z_1z_2}\right)\,dx\,dy\,dz_1\,dz_2 \ = $$
$$= \ 2\int\limits_{[0,1]^4} \frac{x^n(1-x)^ny^nz_1^nP_n(y)}{1-z_2}\cdot\left(\frac{1}{\big(1-(1-xy)z_1\big)^{n+1}}-\frac{z_2^n}{\big(1-(1-xy)z_1z_2\big)^{n+1}}\right)\,dx\,dy\,dz_1\,dz_2.$$

В полученном интеграле совершим следующую замену переменных. Переменные x и y оставим без изменений, а вместо переменных z_1 и z_2 рассмотрим переменные

$$w_1=\frac{1-z_1}{1-(1-xy)z_1} \qquad \text{и} \qquad w_2=\frac{1-z_2}{1-(1-xy)z_1z_2}.$$

Легко видеть, что эта замена взаимно однозначна

$$z_1=\frac{1-w_1}{1-(1-xy)w_1}\,, \qquad z_2=\frac{(1-(1-xy)w_1)(1-w_2)}{1-(1-xy)\big(1-(1-w_1)(1-w_2)\big)}$$

и дифференцируема

$$\frac{\partial z_1}{\partial w_1}=\frac{-xy}{\big(1-(1-xy)w_1\big)^2}\,, \qquad \frac{\partial z_2}{\partial w_2}=\frac{-xy\big(1-(1-xy)w_1\big)}{\Big(1-(1-xy)\big(1-(1-w_1)(1-w_2)\big)\Big)^2}.$$

Легко также выразить все входящие в интеграл выражения:

$$\begin{aligned}
1-(1-xy)z_1 &= \frac{xy}{1-(1-xy)w_1}\,,\\
1-(1-xy)z_1z_2 &= \frac{xy}{1-(1-xy)\big(1-(1-w_1)(1-w_2)\big)}\,,\\
1-z_2 &= \frac{xyw_2}{1-(1-xy)\big(1-(1-w_1)(1-w_2)\big)}\,.
\end{aligned}$$

Из вида нашей замены легко понять, что якобиан замены равен просто произведению частных производных, которые мы вычислили. Подставим все полученное в интеграл и упростим, в итоге получая

$$2\int\limits_{[0,1]^4} \frac{x^n(1-x)^n y^n z_1^n P_n(y)}{1-z_2}\cdot\left(\frac{1}{\big(1-(1-xy)z_1\big)^{n+1}}-\frac{z_2^n}{\big(1-(1-xy)z_1z_2\big)^{n+1}}\right)dx\,dy\,dz_1\,dz_2 =$$

$$= 2\int\limits_{[0,1]^4} \frac{(1-x)^n(1-w_1)^n P_n(y)}{w_2}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{1-(1-xy)\big(1-(1-w_1)(1-w_2)\big)}-\frac{(1-w_2)^n}{1-(1-xy)w_1}\right)dx\,dy\,dw_1\,dw_2.$$

Для некоторого упрощения записи произведем замену переменных. Переменные x и y оставим без изменений, а переменные w_1 и w_2 заменим на $1-w_1$ и $1-w_2$:

$$2\int\limits_{[0,1]^4} \frac{(1-x)^n(1-w_1)^n P_n(y)}{w_2}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{1-(1-xy)\big(1-(1-w_1)(1-w_2)\big)}-\frac{(1-w_2)^n}{1-(1-xy)w_1}\right)dx\,dy\,dw_1\,dw_2 =$$

$$= 2\int\limits_{[0,1]^4} \frac{(1-x)^n\, w_1^n\, P_n(y)}{1-w_2}\left(\frac{1}{1-(1-xy)(1-w_1w_2)}-\frac{w_2^n}{1-(1-xy)(1-w_1)}\right)dx\,dy\,dw_1\,dw_2.$$

В полученном интеграле совершим n раз интегрирование по частям относительно переменной y. Согласно утверждению 1.3 будем иметь

$$2\int\limits_{[0,1]^4} \frac{(1-x)^n\, w_1^n\, P_n(y)}{1-w_2}\left(\frac{1}{1-(1-xy)(1-w_1w_2)}-\frac{w_2^n}{1-(1-xy)(1-w_1)}\right)dx\,dy\,dw_1\,dw_2 =$$

$$= 2\int\limits_{[0,1]^4} \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n w_1^n}{1-w_2}\times$$

$$\times\left(\frac{(1-w_1w_2)^n}{\big(1-(1-xy)(1-w_1w_2)\big)^{n+1}}-\frac{w_2^n(1-w_1)^n}{\big(1-(1-xy)(1-w_1)\big)^{n+1}}\right)dx\,dy\,dw_1\,dw_2.$$

Тем самым утверждение 1.4 доказано. ▶

Полученный интеграл имеет форму, отличную от тех, что мы уже рассматривали. Более того, нам неизвестно, рассматривались ли такие интегралы ранее. Скорость стремления к нулю у таких интегралов, как показывают численные эксперименты, недостаточная для получения иррациональности. Однако мы питаем надежды, что новый внешний вид полученного интеграла позволит в дальнейшем получить новые интегральные конструкции, которые могут помочь в арифметических приложениях. На текущий момент извлечь практическую пользу из новых интегралов не удалось.

2 Доказательство Злобина.

Чтобы провести доказательство, нам потребуется ввести в рассмотрение обобщенные полилогарифмы. Рассмотрим вектор $\bar{s} = (s_1, \ldots, s_l)$, компоненты которого — целые положительные числа. Число l будем называть длиной набора $\bar{s}$, а величину $s_1 + \ldots + s_l$ — весом этого набора. Обобщенные полилогарифмы определяются следующими равенствами:

$$\mathrm{Li}_{\bar{s}}(z) = \sum_{n_1 > n_2 > \ldots > n_l \geqslant 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \ldots n_l^{s_l}},$$

$$\mathrm{Le}_{\bar{s}}(z) = \sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_l \geqslant 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \ldots n_l^{s_l}},$$

для удобства полагается $\mathrm{Li}_{\varnothing}(z) = \mathrm{Le}_{\varnothing}(z) = 1$. Аргумент z этих функций — комплексное число. Соответствующие ряды сходятся при $|z| < 1$. При подстановке $z = 1$ в обобщенные полилогарифмы получаются так называемые кратные дзета-значения:

$$\zeta(\bar{s}) = \sum_{n_1 > n_2 > \ldots > n_l \geqslant 1} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \ldots n_l^{s_l}},$$

$$\zeta^*(\bar{s}) = \sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_l \geqslant 1} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \ldots n_l^{s_l}}.$$

Эти ряды сходятся при $s_1 > 1$, при $s_1 = 1$ эти ряды расходятся. Подробный обзор кратных дзета-значений на русском языке можно найти в статье [8].

Утверждение 2.1. При комплексных $|z| < 1$ и при всех целых неотрицательных n справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_{[0,1]^3} \frac{x_1^n (1-x_1)^n x_2^n (1-x_2)^n x_3^n (1-x_3)^n \; dx_1 \; dx_2 \; dx_3}{(1 - z x_1 x_2)^{n+1} (1 - z x_1 x_2 x_3)^{n+1}} =$$

$$= n! \sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant 1} z^{n_1 - 1} \cdot \frac{(n_1 - n_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (n_1 - n_2 + n) \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot (n_2 + n - 1)}{(n_1 + n)^2 \cdot \ldots \cdot (n_1 + 2n)^2 \cdot (n_2 + n) \cdot \ldots \cdot (n_2 + 2n)}.$$

◀ При каждом $|z| < 1$ и при всех $0 \leqslant x_1, x_2, x_3 \leqslant 1$ справедливы следующие разложения:

$$\frac{1}{(1 - z x_1 x_2)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n}{k} (z x_1 x_2)^k,$$

$$\frac{1}{(1 - z x_1 x_2 x_3)^{n+1}} = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{l+n}{l} (z x_1 x_2 x_3)^l.$$

Преобразуем интеграл, заменяя подынтегральную функцию на ряд:

$$\int\limits_{[0,1]^3} \frac{x_1^n (1-x_1)^n x_2^n (1-x_2)^n x_3^n (1-x_3)^n \; dx_1 \; dx_2 \; dx_3}{(1 - z x_1 x_2)^{n+1} (1 - z x_1 x_2 x_3)^{n+1}} =$$

$$= \int\limits_{[0,1]^3} \sum_{k,l \geqslant 0} \binom{k+n}{k} \binom{l+n}{l} z^{k+l} x_1^{n+k+l} (1-x_1)^n x_2^{n+k+l} (1-x_2)^n x_3^{n+l} (1-x_3)^n \; dx_1 \; dx_2 \; dx_3.$$

При всех целых неотрицательных n функция $x_1^n(1-x_1)^n x_2^n(1-x_2)^n x_3^n(1-x_3)^n$ непрерывна, а потому ограничена на множестве $[0,1]^3$. Кроме того, для каждого $|z|<1$ при всех $0 \leqslant x_1, x_2, x_3 \leqslant 1$ справедливы оценки

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n}{k}(zx_1x_2)^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n}{k}|z|^k \;=\; \frac{1}{(1-|z|)^{n+1}},$$
$$\left|\sum_{l=0}^{\infty}\binom{l+n}{l}(zx_1x_2x_3)^l\right| \leqslant \sum_{l=0}^{\infty}\binom{l+n}{l}|z|^l \;=\; \frac{1}{(1-|z|)^{n+1}}.$$

Из всего сказанного следует равномерная сходимость подынтегрального ряда при всех неотрицательных целых n и при каждом комплексном z с условием $|z|<1$. Значит, ряд можно проинтегрировать почленно:

$$\int\limits_{[0,1]^3}\sum_{k,l\geqslant 0}\binom{k+n}{k}\binom{l+n}{l} z^{k+l}x_1^{n+k+l}(1-x_1)^n x_2^{n+k+l}(1-x_2)^n x_3^{n+l}(1-x_3)^n\,dx_1\,dx_2\,dx_3 \;=$$
$$=\;\sum_{k,l\geqslant 0}\frac{(k+n)!}{k!\,n!}\cdot\frac{(l+n)!}{l!\,n!}\cdot z^{k+l}\cdot\frac{(n+k+l)!\,n!}{(k+l+2n+1)!}\cdot\frac{(n+k+l)!\,n!}{(k+l+2n+1)!}\cdot\frac{(n+l)!\,n!}{(l+2n+1)!} \;=$$
$$=\; n!\sum_{k,l\geqslant 0} z^{k+l}\cdot\frac{(k+1)\cdot\ldots\cdot(k+n)\cdot(l+1)\cdot\ldots\cdot(l+n)}{(k+l+n+1)^2\cdot\ldots\cdot(k+l+2n+1)^2\cdot(l+n+1)\cdot\ldots\cdot(l+2n+1)}.$$

Легко видеть, что после замен $l=n_2-1,\ k=n_1-n_2$ получится в точности требуемый ряд. Утверждение 2.1 доказано. ▶

Отметим, что суммировать по n_2 можно не до n_1, а до n_1+n, потому что все добавленные слагаемые будут равны нулю. Таким образом мы получили представление нашего интеграла в виде

$$\int\limits_{[0,1]^3}\frac{x_1^n(1-x_1)^n x_2^n(1-x_2)^n x_3^n(1-x_3)^n\,dx_1\,dx_2\,dx_3}{(1-zx_1x_2)^{n+1}(1-zx_1x_2x_3)^{n+1}} \;=$$
$$=\; n!\sum_{n_1\geqslant 1}\sum_{n_2=1}^{n_1+n} z^{n_1-1}\cdot\frac{(n_1-n_2+1)\cdot\ldots\cdot(n_1-n_2+n)\cdot n_2\cdot\ldots\cdot(n_2+n-1)}{(n_1+n)^2\cdot\ldots\cdot(n_1+2n)^2\cdot(n_2+n)\cdot\ldots\cdot(n_2+2n)}.$$

Наша цель — представить эту сумму в виде суммы полилогарифмов, домноженных на некоторые многочлены с рациональными коэффициентами. Полученная сумма на самом деле довольно сложно устроена. Впоследствии мы представим ее в виде суммы более простых сумм. А пока докажем несколько утверждений, которые помогают представить более простые суммы в нужном виде. Потом легко будет скомпилировать эти утверждения в лемму.

Утверждение 2.2. При неотрицательных целых α и при положительных u справедливы следующие равенства:

$$\sum_{n_1\geqslant 1} z^{n_1-1}\cdot\frac{1}{(n_1+\alpha)^u} \;=\; z^{-\alpha-1}\,\mathrm{Le}_u(z)+\tilde{P}_0(z^{-1}),$$

где $\tilde{P}_0(z^{-1}) = -z^{-\alpha}\sum\limits_{m=1}^{\alpha}\dfrac{z^{m-1}}{m^u}$ — многочлен с рациональными коэффициентами.

◀ Введем новую переменную суммирования $m = n_1 + \alpha$:

$$\sum_{n_1\geqslant 1} z^{n_1-1}\cdot\frac{1}{(n_1+\alpha)^u} \;=\; z^{-\alpha}\sum_{m\geqslant\alpha+1} z^{m-1}\cdot\frac{1}{m^u}.$$

Эта сумма отличается от полилогарифма лишь конечным количеством слагаемых, добавляя и вычитая которые, получим требуемое. Утверждение 2.2 доказано. ▶

Отметим следующие свойства: $\deg\tilde{P}_0(x) = \alpha$ и $d_\alpha^u\,\tilde{P}_0(x)\in\mathbb{Z}[x]$. Как и в предыдущей главе, d_α обозначает НОК$(1,\ldots,\alpha)$. Арифметические свойства этого многочлена и многочлена из следующего утверждения нам понадобятся несколько позднее, однако доказательство этих свойств наиболее целесообразно именно сейчас.

Утверждение 2.3. При неотрицательных целых α и положительных целых u_1 и u_2 справедливо следующее равенство:

$$\sum_{n_1\geqslant 1}\sum_{n_2=1}^{n_1+\alpha} z^{n_1-1}\cdot\frac{1}{(n_1+\alpha)^{u_1}\,n_2^{u_2}} \;=\; z^{-\alpha-1}\,\mathrm{Le}_{u_1,u_2}(z)+\tilde{Q}_0(z^{-1}),$$

где $\tilde{Q}_0(z^{-1}) = -z^{-\alpha}\sum\limits_{\alpha\geqslant m_1\geqslant m_2\geqslant 1} z^{m_1-1}\dfrac{1}{m_1^{u_1}m_2^{u_2}}$.

◀ Введем новые переменные суммирования: $m_1 = n_1+\alpha$ и $m_2 = n_2$. Тогда имеем:

$$\sum_{n_1\geqslant 1}\sum_{n_2=1}^{n_1+\alpha} z^{n_1-1}\cdot\frac{1}{(n_1+\alpha)^{u_1}\,n_2^{u_2}} \;=\; z^{-\alpha}\sum_{m_1\geqslant m_2\geqslant 1} z^{m_1-1}\cdot\frac{1}{m_1^{u_1}\,m_2^{u_2}} - z^{-\alpha}\sum_{\alpha\geqslant m_1\geqslant m_2\geqslant 1} z^{m_1-1}\cdot\frac{1}{m_1^{u_1}\,m_2^{u_2}}.$$

Легко видеть, что это в точности совпадает с доказываемым утверждением. ▶

Отметим следующие свойства: $\deg\tilde{Q}_0(x) = \alpha$ и $d_\alpha^{u_1+u_2}\,\tilde{Q}_0(x)\in\mathbb{Z}[x]$, где d_α обозначает НОК$(1,\ldots,\alpha)$. Арифметические свойства этого многочлена понадобятся несколько позднее.

Утверждение 2.4. Пусть $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ — неотрицательные целые числа, причем $\alpha_2+\beta_1\geqslant\alpha_1$. Тогда при положительных целых u_1 и u_2 справедливо следующее равенство:

$$\sum_{n_1\geqslant 1}\sum_{n_2=1}^{n_1+\beta_1} z^{n_1-1}\cdot\frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{u_1}\,(n_2+\alpha_2)^{u_2}} \;=\; z^{-\alpha_1-1}\,\mathrm{Le}_{u_1,u_2}(z)+\sum_{t=1}^{u}\tilde{R}_t(z^{-1})\mathrm{Le}_t(z)+\tilde{R}_0(z^{-1}),$$

где $\tilde{R}_t(x)$ — многочлены с рациональными коэффициентами при $t = 0,1,\ldots,u$, причем $d_\alpha^{u_1+u_2-t}\,\tilde{R}_t(x)\in\mathbb{Z}[x]$. Здесь использовались обозначения $\alpha = \alpha_2+\beta_1$ и $u = \max(u_1,u_2)$.

Кроме того, $\tilde{R}_1(1) = 0$ при $u_1 > 1$ и $\tilde{R}_1(1) = -\sum\limits_{m=1}^{\alpha_2}\dfrac{1}{m^{u_2}}$ при $u_1 = 1$.

◀ Имеем:

$$\sum_{n_1\geqslant 1}\sum_{n_2=1}^{n_1+\beta_1} z^{n_1-1}\cdot\frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{u_1}\,(n_2+\alpha_2)^{u_2}} = \sum_{n_1\geqslant 1}\sum_{n_2=\alpha_2+1}^{n_1+\alpha_2+\beta_1} z^{n_1-1}\cdot\frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{u_1}n_2^{u_2}} =$$

$$= \sum_{n_1\geqslant 1}\sum_{n_2=1}^{n_1+\alpha_1} z^{n_1-1}\cdot\frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{u_1}n_2^{u_2}} + \sum_{n_1\geqslant 1}\sum_{n_2=n_1+\alpha_1+1}^{n_1+\alpha_2+\beta_1} z^{n_1-1}\cdot\frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{u_1}n_2^{u_2}} -$$

$$- \sum_{n_1\geqslant 1}\sum_{n_2=1}^{\alpha_2} z^{n_1-1}\cdot\frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{u_1}n_2^{u_2}}.$$

Сначала мы докажем справедливость заявленного представления, а потом докажем дополнительное утверждение.

Получилось три суммы, с каждой из которых мы сейчас разберемся. К первой сумме просто применяем предыдущее утверждение 2.3, тут комментарии излишни.

Рассмотрим вторую сумму. Если $\alpha_2+\beta_1=\alpha_1$, то эта сумма отсутствует, иначе ее можно представить в следующем виде:

$$\sum_{n_1\geqslant 1}\sum_{n_2=n_1+\alpha_1+1}^{n_1+\alpha_2+\beta_1} z^{n_1-1}\cdot\frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{u_1}n_2^{u_2}} = \sum_{k=1}^{\alpha_2+\beta_1-\alpha_1}\sum_{n_1\geqslant 1} z^{n_1-1}\cdot\frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{u_1}(n_1+\alpha_1+k)^{u_2}}.$$

Теперь для каждого k разложим дробь внутри суммы на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{u_1}(n_1+\alpha_1+k)^{u_2}} = \sum_{t=1}^{u_1}\frac{A_t}{(n_1+\alpha_1)^t} + \sum_{t=1}^{u_2}\frac{B_t}{(n_1+\alpha_1+k)^t},$$

где коэффициенты A_t и B_t могут быть вычислены по формулам

$$A_t = (-1)^{u_1-t}\cdot\binom{u_1+u_2-t-1}{u_1-t}\cdot\frac{1}{k^{u_1+u_2-t}},$$

$$B_t = (-1)^{u_2-t}\cdot\binom{u_1+u_2-t-1}{u_2-t}\cdot\frac{1}{(-k)^{u_1+u_2-t}}.$$

Эти формулы получены стандартными методами — домножением на нужную степень знаменателя и дифференцированием нужное число раз. Из этих явных формул легко видеть, что $d_\alpha^{u_1+u_2-t}\,A_t\in\mathbb{Z}$ и $d_\alpha^{u_1+u_2-t}\,B_t\in\mathbb{Z}$. Теперь к каждому выражению, полученному после разложения на простейшие дроби, можно применить утверждение 2.2. Например, для выражения

$$\sum_{n_1\geqslant 1} z^{n_1-1}\cdot\frac{A_t}{(n_1+\alpha_1)^t}$$

получим, что оно равно

$$A_t\left(z^{-\alpha_1-1}\,\mathrm{Le}_t(z)+\tilde{P}_0(z^{-1})\right),$$

где $d_{\alpha_1}^t\,\tilde{P}_0(x)\in\mathbb{Z}[x]$. С учетом $d_\alpha^{u_1+u_2-t}\,A_t\in\mathbb{Z}$, получаем, что все многочлены удовлетворяют заявленным свойствам. Аналогичные рассуждения справедливы и для тех выражений, в которых вместо A_t фигурирует B_t.

Из явных формул легко видеть, что $A_1 + B_1 = 0$, откуда с учетом явного вида многочленов при полилогарифмах следует $\tilde{R}_1(1) = 0$. Это верно для любого u_1.

Третья сумма содержит конечное суммирование по n_2, которое не зависит от n_1. Так что к третьей сумме тоже можно применить утверждение 2.2, легко видеть, что полученные многочлены удовлетворяют всем заявленным требованиям.

Утверждение 2.4 полностью доказано. ►

Далее докажем весьма известное и простое утверждение, которое понадобится в дальнейшем. Его формулировка известна даже школьникам, однако доказательство не входит в стандартную школьную или университетскую программу. Поэтому приведем весьма изящное доказательство, которое принадлежит Паскалю.

Утверждение 2.5. Сумма $\sum\limits_{k=1}^{N} k^n$ при целых неотрицательных n является многочленом с рациональными коэффициентами $P(N)$ степени $n+1$.

◄ Доказывать утверждение будем методом математической индукции. Базу составит тривиальное равенство $\sum\limits_{k=1}^{N} k^0 = N$, то есть утверждение при $n = 0$.

Предположим теперь, что мы доказали утверждение при всех $0 \leqslant n < m$ с некоторым положительным целым m. Докажем утверждение для $n = m$. Для этого запишем бином Ньютона:

$$(k+1)^{m+1} = \binom{m+1}{0} \cdot k^{m+1} + \binom{m+1}{1} \cdot k^m + \ldots + \binom{m+1}{m+1} \cdot k^0.$$

Просуммируем это равенство по $k = 1, \ldots, N$, сокращая одинаковые слагаемые:

$$(N+1)^{m+1} = 1 + \binom{m+1}{1} \cdot \sum_{k=1}^{N} k^m + \ldots + \binom{m+1}{m+1} \cdot \sum_{k=1}^{N} k^0.$$

Отсюда имеем выражение интересующей нас суммы:

$$\sum_{k=1}^{N} k^m = \frac{1}{m+1} \left((N+1)^{m+1} - 1 - \binom{m+1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{N} k^{m-1} - \ldots - \binom{m+1}{m+1} \cdot \sum_{k=1}^{N} k^0 \right).$$

Заметим, что по предположению индукции суммы в правой части являются многочленами от N степени не выше m, а выражение $(N+1)^{m+1} - 1$ есть многочлен от N степени $m+1$. Таким образом, утверждение 2.5 доказано. ►

Следствие 2.1. Если $P(k)$ — многочлен с рациональными коэффициентами степени n, m — некоторое постоянное натуральное число, то

$$\sum_{k=1}^{N+m} P(k) = \tilde{P}(N),$$

где $\tilde{P}(N)$ — многочлен с рациональными коэффициентами степени $n+1$.

◀ Пусть $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$. Применим предыдущее утверждение, учитывая, что добавилось еще по m слагаемых для каждого монома:

$$\sum_{k=1}^{N+m} P(k) = a_n \sum_{k=1}^{N+m} k^n + \ldots + a_1 \sum_{k=1}^{N+m} k^1 + a_0 \sum_{k=1}^{N+m} k^0 =$$
$$= a_n \left(\sum_{k=1}^{N} k^n + (N+1)^n + \ldots + (N+m)^n \right) + \ldots$$
$$\ldots + a_1 \left(\sum_{k=1}^{N} k^1 + (N+1)^1 + \ldots + (N+m)^1 \right) + a_0 \left(\sum_{k=1}^{N} k^0 + m \right).$$

К суммам до N применим предыдущее утверждение, а оставшиеся выражения очевидно являются многочленами от N степени не выше n.

Следствие 2.1 доказано. ▶

Теперь нашей целью будет скомпилировать из доказанных утверждений лемму, дающую представление интеграла в виде линейных форм от полилогарифмов с коэффициентами из $\mathbb{Q}[z^{-1}]$. Эта лемма не будет окончательным результатом, она будет неоднократно улучшаться и уточняться. Такой вариант изложениия выбран и для удобства читателя, и для удобства изложения материала. Если собрать все утверждения сразу в одной конечной лемме, она выйдет очень громоздкой. Все наши рассуждения суть частные случаи некоторых лемм Злобина, он доказал более общие результаты, однако по приведенным нами частным случаям можно увидеть некоторые закономерности и понять основную идею. Собственно, это и было основной целью написания данной главы.

Лемма 2.1. При всех неотрицательных целых n и при всех $|z| < 1$ с некоторыми многочленами $P_{2,1},\ P_{1,1},\ P_2,\ P_1$ и P_0 с рациональными коэффициентами справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_{[0,1]^3} \frac{x_1^n(1-x_1)^n x_2^n(1-x_2)^n x_3^n(1-x_3)^n \; dx_1\, dx_2\, dx_3}{(1-zx_1x_2)^{n+1}(1-zx_1x_2x_3)^{n+1}} \ =$$
$$= \ P_{2,1}(z^{-1})\,\mathrm{Le}_{2,1}(z) + P_{1,1}(z^{-1})\,\mathrm{Le}_{1,1}(z) + P_2(z^{-1})\,\mathrm{Le}_2(z) + P_1(z^{-1})\,\mathrm{Le}_1(z) + P_0(z^{-1}),$$

причем $P_{1,1}(1) = P_1(1) = 0$.

◀ По утверждению 2.1 при всех неотрицательных целых n и при всех $|z| < 1$

$$\int\limits_{[0,1]^3} \frac{x_1^n(1-x_1)^n x_2^n(1-x_2)^n x_3^n(1-x_3)^n \; dx_1\, dx_2\, dx_3}{(1-zx_1x_2)^{n+1}(1-zx_1x_2x_3)^{n+1}} \ =$$
$$= \ n! \sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant 1} z^{n_1-1} \cdot \frac{(n_1-n_2+1)\cdot\ldots\cdot(n_1-n_2+n)\cdot n_2\cdot\ldots\cdot(n_2+n-1)}{(n_1+n)^2\cdot\ldots\cdot(n_1+2n)^2\cdot(n_2+n)\cdot\ldots\cdot(n_2+2n)}.$$

Заметим, что по n_2 можно суммировать не до n_1, а до n_1+n. Это возможно потому, что выражение при добавленных n_2 обращается в нуль. Таким образом,

$$\int\limits_{[0,1]^3} \frac{x_1^n(1-x_1)^n x_2^n(1-x_2)^n x_3^n(1-x_3)^n\ dx_1\ dx_2\ dx_3}{(1-zx_1x_2)^{n+1}(1-zx_1x_2x_3)^{n+1}} =$$

$$= n!\sum_{n_1\geqslant 1}\sum_{n_2=1}^{n_1+n} z^{n_1-1}\cdot\frac{(n_1-n_2+1)\cdot\ldots\cdot(n_1-n_2+n)\cdot n_2\cdot\ldots\cdot(n_2+n-1)}{(n_1+n)^2\cdot\ldots\cdot(n_1+2n)^2\cdot(n_2+n)\cdot\ldots\cdot(n_2+2n)}.$$

Далее покажем, что получившаяся сумма представляется в требуемом виде.

Для начала проведем следующие преобразования. Рассмотрим рациональную функцию

$$\frac{(n_1-n_2+1)\cdot\ldots\cdot(n_1-n_2+n)\cdot n_2\cdot\ldots\cdot(n_2+n-1)}{(n_1+n)^2\cdot\ldots\cdot(n_1+2n)^2\cdot(n_2+n)\cdot\ldots\cdot(n_2+2n)}.$$

Раскроем скобки в числителе этой рациональной функции. В результате в числителе получится сумма мономов вида $Cn_1^{a_1}n_2^{a_2+b}$, где $a_1+a_2\leqslant n$ и $b\leqslant n$, а C — некоторое целое число, зависящее от a_1, a_2 и b. Действительно, если интерпретировать a_1 и a_2 как количество n_1 и n_2 соответственно, взятых из первых n скобок, а b — как количество n_2, взятых из второй группы из n скобок, то выписанные оценки на степени переменных очевидны. Очевидно также, что C является целым числом.

Рассмотрим подробнее рациональные функции, соответствующие каждому моному:

$$\frac{n_1^{a_1}\cdot n_2^{a_2+b}}{(n_1+n)^2\cdot\ldots\cdot(n_1+2n)^2\cdot(n_2+n)\cdot\ldots\cdot(n_2+2n)}. \tag{18}$$

Эти рациональные функции устроены проще исходной, они являются произведением двух рациональных функций, каждая из которых зависит только от одной переменной. Разложим в сумму простейших дробей функцию из (18), зависящую только от n_2 и n, но не зависящую от n_1. В результате разложения получится

$$\frac{n_2^{a_2+b}}{(n_2+n)\cdot\ldots\cdot(n_2+2n)} = \sum_{p_2=n}^{2n}\frac{\tilde{C}_{p_2}(a_2,b)}{n_2+p_2}+P_{a_2,b}(n_2), \tag{19}$$

где $\tilde{C}_{p_2}$ – некоторое рациональное число, зависящее от a_2 и b, и $P_{a_2,b}(n_2)$ — многочлен с рациональными коэффициентами, зависящий от a_2 и b. Многочлен в разложении на простейшие дроби будет возникать, если $a_2+b>n$. Как легко понять, эта ситуация возможна. Заметим также, что из-за возникающей полиномиальной части разложения вычисление чисел $\tilde{C}_{p_2}$ становится сложной задачей, которую мы не будем решать. Отметим лишь, что эти числа рациональны и что возникающий многочлен тоже имеет рациональные коэффициенты.

Далее будем действовать следующим образом. Возникающие многочлены будем суммировать по n_2 от 1 до n_1+n, согласно следствию 2.1 в результате суммирования будут получаться многочлены от n_1 с рациональными коэффициентами, имеющие степень на 1 выше. Эти многочлены $\tilde{P}_{a_2,b}(n_1)$ будем умножать на рациональные функции из выражения (18), соответствующие только n_1. Полученное в результате перемножения выражение будем раскладывать на простейшие дроби:

$$\frac{\tilde{P}_{a_2,b}(n_1)\cdot n_1^{a_1}}{(n_1+n)^2\cdot\ldots\cdot(n_1+2n)^2} = \sum_{p_1=n}^{2n}\left(\frac{\tilde{D}_{p_1}(a_1,a_2,b)}{(n_1+p_1)^2}+\frac{\tilde{E}_{p_1}(a_1,a_2,b)}{n_1+p_1}\right),$$

где $\tilde{D}_{p_1}$ и $\tilde{E}_{p_1}$ — некоторые рациональные числа, зависящие от a_1, a_2 и b. Отметим очень важное для дальнейшего рассуждение. Суммарная степень $\tilde{P}_{a_2,b}(n_1)\cdot n_1^{a_1}$ точно строго меньше степени знаменателя последнего выражения, а из этого следует, что $\sum\limits_{p_1=n}^{2n}\tilde{E}_{p_1}=0$.

Часть выражения (19), не являющуюся многочленом, будем просто умножать на ту часть выражения (18), которая соответствует n_1, предварительно разложив ее на простейшие дроби:

$$\frac{n_1^{a_1}}{(n_1+n)^2\cdot\ldots\cdot(n_1+2n)^2} = \sum_{p_1=n}^{2n}\left(\frac{\tilde{A}_{p_1}(a_1)}{(n_1+p_1)^2}+\frac{\tilde{B}_{p_1}(a_1)}{n_1+p_1}\right),$$

где $\tilde{A}_{p_1}$ и $\tilde{B}_{p_1}$ – некоторые рациональные числа, зависящие от a_1. Очевидно, что $\sum\limits_{p_1=n}^{2n}\tilde{B}_{p_1}=0$.

Теперь соберем все сказанное в одном равенстве.

$$\begin{aligned}\sum_{n_1\geqslant 1}\sum_{n_2=1}^{n_1+n} z^{n_1-1}\cdot\frac{(n_1-n_2+1)\cdot\ldots\cdot(n_1-n_2+n)\cdot n_2\cdot\ldots\cdot(n_2+n-1)}{(n_1+n)^2\cdot\ldots\cdot(n_1+2n)^2\cdot(n_2+n)\cdot\ldots\cdot(n_2+2n)} =\\ = \sum_{a_1,a_2,b} C\left[\sum_{n_1\geqslant 1} z^{n_1-1}\cdot\sum_{p_1=n}^{2n}\left(\frac{\tilde{D}_{p_1}(a_1,a_2,b)}{(n_1+p_1)^2}+\frac{\tilde{E}_{p_1}(a_1,a_2,b)}{n_1+p_1}\right)+\right.\\ \left.+\sum_{n_1\geqslant 1}\sum_{n_2=1}^{n_1+n} z^{n_1-1}\cdot\sum_{p_1=n}^{2n}\left(\frac{\tilde{A}_{p_1}(a_1)}{(n_1+p_1)^2}+\frac{\tilde{B}_{p_1}(a_1)}{n_1+p_1}\right)\times\sum_{p_2=n}^{2n}\frac{\tilde{C}_{p_2}(a_2,b)}{n_2+p_2}\right].\end{aligned}$$

Здесь C — некоторое целое число, коэффициент при мономе, оно фигурировало ранее и несущественно для результатов и методов доказательства данного утверждения. Внешнее суммирование идет по всем мономам. Как получаются внутренние суммы, написано выше.

Далее мы будем рассматривать сумму, соответствующую некоторому конкретному моному, и докажем для нее утверждение леммы. Поскольку это будет верно для любого монома, лемма будет доказана.

Рассмотрим сумму

$$\sum_{n_1\geqslant 1} z^{n_1-1}\cdot\sum_{p_1=n}^{2n}\left(\frac{\tilde{D}_{p_1}}{(n_1+p_1)^2}+\frac{\tilde{E}_{p_1}}{n_1+p_1}\right),$$

соответствующую некоторому произвольному моному. Для каждого p_1 по утверждению 2.2

$$\begin{aligned}\sum_{n_1\geqslant 1} z^{n_1-1}\cdot\frac{\tilde{D}_{p_1}}{(n_1+p_1)^2} &= z^{-p_1-1}\cdot\tilde{D}_{p_1}\cdot\mathrm{Le}_2(z)+\tilde{D}_{p_1}\cdot\tilde{P}_{p_1}(z^{-1}),\\ \sum_{n_1\geqslant 1} z^{n_1-1}\cdot\frac{\tilde{E}_{p_1}}{n_1+p_1} &= z^{-p_1-1}\cdot\tilde{E}_{p_1}\cdot\mathrm{Le}_1(z)+\tilde{E}_{p_1}\cdot\tilde{Q}_{p_1}(z^{-1}),\end{aligned}$$

где $\tilde{P}_{p_1},\tilde{Q}_{p_1}$ — многочлены с рациональными коэффициентами. Учитывая, что $\sum\limits_{p_1=n}^{2n}\tilde{E}_{p_1}=0$, получаем, что многочлен при $\mathrm{Le}_1(z)$, получающийся из этой суммы, обращается в нуль в $z=1$.

Рассмотрим теперь сумму

$$\sum_{n_1\geqslant 1}\sum_{n_2=1}^{n_1+n} z^{n_1-1}\cdot\sum_{p_1=n}^{2n}\left(\frac{\tilde{A}_{p_1}}{(n_1+p_1)^2}+\frac{\tilde{B}_{p_1}}{n_1+p_1}\right)\times\sum_{p_2=n}^{2n}\frac{\tilde{C}_{p_2}}{n_2+p_2},$$

соответствующую тому же моному. Суммы по p_1 и по p_2 мы перемножим почленно, и будем применять утверждение 2.4. Проверим лишь неочевидную часть леммы — то, что многочлены при $\mathrm{Le}_{1,1}(z)$ и $\mathrm{Le}_1(z)$ обращаются в нуль при $z=1$.

Понятно, что $\mathrm{Le}_{1,1}(z)$ будет возникать только из

$$\sum_{n_1\geqslant 1}\sum_{n_2=1}^{n_1+n} z^{n_1-1}\cdot\frac{\tilde{B}_{p_1}}{n_1+p_1}\cdot\frac{\tilde{C}_{p_2}}{n_2+p_2}$$

со всевозможными p_1 и p_2. Таким образом, из утверждения 2.4 следует, что значение многочлена при $\mathrm{Le}_{1,1}(z)$ в 1 равно $\sum\limits_{p_1,p_2=n}^{2n}\tilde{B}_{p_1}\tilde{C}_{p_2}$. Но если в этой сумме просуммировать сначала по p_1, то получится нуль, а значит вся сумма также равна нулю.

Многочлены при $\mathrm{Le}_1(z)$ из последнего выражения тоже будут возникать. Согласно все тому же утверждению 2.4 заключаем, что значение этого многочлена в 1 равно

$$\sum_{p_1,p_2=n}^{2n}\tilde{B}_{p_1}\tilde{C}_{p_2}\cdot\left(-\sum_{m=1}^{p_2}\frac{1}{m}\right).$$

Если это выражение просуммировать сперва по p_1, то получится нуль, а значит и вся сумма равна нулю.

Таким образом лемма 2.1 полностью доказана. ►

Первое усовершенствование, которому мы подвергнем результат этой леммы, состоит в том, что мы "изгоним" $\mathrm{Le}_2(z)$. Сделаем это мы с использованием дополнительного интеграла

$$\int\limits_{[0,1]^3}\frac{x_1^n(1-x_1)^n x_2^n(1-x_2)^n x_3^n(1-x_3)^n\ dx_1\ dx_2\ dx_3}{(1-zx_1)^{n+1}(1-zx_1x_2x_3)^{n+1}}. \tag{20}$$

Этот интеграл отличается от нашего лишь одной скобкой в знаменателе.

Утверждение 2.6. При всех неотрицательных целых n и при всех $|z| < 1$ с некоторыми многочленами $P_{1,2}$, P_2, P_1 и P_0 с рациональными коэффициентами справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_{[0,1]^3} \frac{x_1^n(1-x_1)^n x_2^n(1-x_2)^n x_3^n(1-x_3)^n \; dx_1\; dx_2\; dx_3}{(1-zx_1)^{n+1}(1-zx_1x_2x_3)^{n+1}} =$$
$$= P_{1,2}(z^{-1})\operatorname{Le}_{1,2}(z) + P_2(z^{-1})\operatorname{Le}_2(z) + P_1(z^{-1})\operatorname{Le}_1(z) + P_0(z^{-1}).$$

◄ Легко понять, глядя на утверждение 2.1, что для интеграла (20) справедливо следующее разложение в ряд:

$$\int\limits_{[0,1]^3} \frac{x_1^n(1-x_1)^n x_2^n(1-x_2)^n x_3^n(1-x_3)^n \; dx_1\; dx_2\; dx_3}{(1-zx_1)^{n+1}(1-zx_1x_2x_3)^{n+1}} =$$
$$= n! \sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant 1} z^{n_1-1} \cdot \frac{(n_1-n_2+1)\cdot \ldots \cdot (n_1-n_2+n)\cdot n_2 \cdot \ldots \cdot (n_2+n-1)}{(n_1+n)\cdot \ldots \cdot (n_1+2n)\cdot (n_2+n)^2 \cdot \ldots \cdot (n_2+2n)^2}.$$

Это разложение справедливо при всех неотрицательных целых n и при всех $|z| < 1$, доказательство этого разложения ничуть не отличается от доказательства утверждения 2.1.

Далее, как и в лемме 2.1, разложим числитель получившейся рациональной функции

$$\frac{(n_1-n_2+1)\cdot \ldots \cdot (n_1-n_2+n)\cdot n_2 \cdot \ldots \cdot (n_2+n-1)}{(n_1+n)\cdot \ldots \cdot (n_1+2n)\cdot (n_2+n)^2 \cdot \ldots \cdot (n_2+2n)^2}$$

в сумму мономов вида $n_1^{a_1} n_2^{a_2+b}$, где $a_1 + a_2 \leqslant n$ и $b \leqslant n$. Если мы докажем справедливость утверждения для произвольного монома, то тем самым мы докажем утверждение полностью.

Для каждого монома рациональная функция разделилась на две части, каждую из которых мы разложим в сумму простейших дробей:

$$\frac{n_1^{a_1}}{(n_1+n)\cdot \ldots \cdot (n_1+2n)} = \sum_{p_1=n}^{2n} \left(\frac{\tilde{A}_{p_1}(a_1)}{n_1+p_1} \right),$$
$$\frac{n_2^{a_2+b}}{(n_2+n)^2\cdot \ldots \cdot (n_2+2n)^2} = \sum_{p_2=n}^{2n} \left(\frac{\tilde{B}_{p_2}(a_2,b)}{(n_2+p_2)^2} + \frac{\tilde{C}_{p_2}(a_2,b)}{n_2+p_2} \right),$$

где $\tilde{A}_{p_1}(a_1), \tilde{B}_{p_2}(a_2,b)$ и $\tilde{C}_{p_2}(a_2,b)$ — зависящие от аргументов в скобках некоторые рациональные числа. Аргументы в скобках показывают зависимость чисел от монома. Так как мы доказываем утверждение для произвольного монома, эту зависимость мы в дальнейшем будем опускать, оставляя лишь нижние индексы у этих рациональных чисел.

Заметим, что можно легко написать формулы для вычисления этих чисел, однако нам достаточно того, что $\sum\limits_{p_2=n}^{2n} \tilde{C}_{p_2} = 0$. Это очевидно следует из того, что $a_2 + b \leqslant 2n$, а степень знаменателя равна $2n+2$. Как легко видеть, сумма $\tilde{C}_{p_2}$ равна коэффициенту при отсутствующей степени n_2^{2n+1}.

Соберем все сказанное в отдельном равенстве:

$$\sum_{n_1\geqslant 1}\sum_{n_2=1}^{n_1+n} z^{n_1-1}\cdot\frac{(n_1-n_2+1)\cdot\ldots\cdot(n_1-n_2+n)\cdot n_2\cdot\ldots\cdot(n_2+n-1)}{(n_1+n)\cdot\ldots\cdot(n_1+2n)\cdot(n_2+n)^2\cdot\ldots\cdot(n_2+2n)^2} =$$

$$= \sum_{a_1,a_2,b} C\left[\sum_{n_1\geqslant 1}\sum_{n_2=1}^{n_1+n} z^{n_1-1}\cdot\sum_{p_1=n}^{2n}\left(\frac{\tilde{A}_{p_1}(a_1)}{n_1+p_1}\right)\times\sum_{p_2=n}^{2n}\left(\frac{\tilde{B}_{p_2}(a_2,b)}{(n_2+p_2)^2}+\frac{\tilde{C}_{p_2}(a_2,b)}{n_2+p_2}\right)\right].$$

Здесь C — некоторое целое число, коэффициент при мономе, оно несущественно для дальнейших рассуждений.

Используя утверждение 2.4, каждый теперь без труда увидит, что для справедливости доказываемого утверждения осталось лишь понять, почему пропадут $\mathrm{Le}_{1,1}(z)$. Покажем, что многочлен при $\mathrm{Le}_{1,1}(z)$ тождественно нулевой для каждого монома в отдельности. Для этого рассмотрим выражение

$$\sum_{n_1\geqslant 1}\sum_{n_2=1}^{n_1+n} z^{n_1-1}\cdot\sum_{p_1=n}^{2n}\left(\frac{\tilde{A}_{p_1}}{n_1+p_1}\right)\times\sum_{p_2=n}^{2n}\left(\frac{\tilde{C}_{p_2}}{n_2+p_2}\right),$$

соответствующее какому-то моному. По утверждению 2.4, многочлен при $\mathrm{Le}_{1,1}(z)$ будет равен

$$\sum_{p_1,p_2=n}^{2n}\tilde{A}_{p_1}\tilde{C}_{p_2}\cdot z^{-p_1-1}.$$

Учитывая, что $\sum\limits_{p_2=n}^{2n}\tilde{C}_{p_2}=0$, получаем, что при каждой степени z коэффициент равен нулю. Значит, это тождественно нулевой многочлен.

Утверждение 2.6 доказано. ▶

Теперь покажем, как этот интеграл помогает нам в нашей исходной задаче усовершенствования леммы 2.1.

Введем обозначения для наборов чисел

$$\bar{a}=(a_1,\ldots,a_m),\quad \bar{b}=(b_1,\ldots,b_m),\quad \bar{c}=(c_1,\ldots,c_m),$$

где m — целое неотрицательное число, а компоненты векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ — комплексные числа. Рассмотрим следующий интеграл:

$$\mathrm{J}_m(\bar{a};\bar{b};\bar{c}\,|z) = \prod_{i=1}^{m}\frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)\Gamma(b_i-a_i)}\int\limits_{[0,1]^m}\prod_{i=1}^{m}\frac{x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1-zx_1\ldots x_i)^{c_i}}\,dx_1\ldots dx_m, \tag{21}$$

полагая $\mathrm{J}_0(\varnothing;\varnothing;\varnothing\,|z)=1$.

В статье [14] Е. А. Уланский доказал следующее утверждение:

Теорема 2.1. *Пусть m — неотрицательное целое число, $z,a_i,b_i,c_i\in\mathbb{C}$, $|arg(1-z)|<\pi$ и $\mathrm{Re}\,(b_i)>\mathrm{Re}\,(a_i)>0$ при $i=1,\ldots,m$. Тогда*

$$(1-z)^{-a_1}\cdot\mathrm{J}_m\left(\bar{a};\bar{b};\bar{c}\,\middle|\,\frac{-z}{1-z}\right) = \mathrm{J}_m\left(\bar{a};\bar{b};b_1-a_2-c_1,\ldots,b_{m-1}-a_m-c_{m-1},b_m-c_m\,|z\right).$$

◄ ►

Введем дополнительно следующие обозначения. Пусть $c_{r_1}, \ldots, c_{r_l}$ — все ненулевые компоненты вектора $\bar{c}$, причем $0 < r_1 < \ldots < r_{l-1} < r_l = m$. Мы потребовали здесь особенно, чтобы $c_m \neq 0$, в контексте рассматриваемых интегралов это требование абсолютно естественно — иначе можно было бы просто проинтегрировать по x_m, так как в знаменатель эта переменная не вошла бы. Кроме того, введем обозначение $r_0 = 0$. Введем также обозначение $q_j = \sum\limits_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} (b_i - a_i)$ при $j = 1, \ldots, l$.

Будем обозначать через $\{a\}_k$ повторенное k раз через запятую число a. Имеет место известное представление полилогарифмов интегралами:

$$\mathrm{Le}_{(s_1,\ldots,s_l)} = \mathrm{J}_m\left((1,\ldots,1);(2,\ldots,2);(\{0\}_{s_1-1},1,\ldots,\{0\}_{s_l-1},1)\;|z\right).$$

Применяя теорему 2.1 к этому интегралу, получим известное тождество

$$\mathrm{Le}_{\bar{s}}\left(\frac{-z}{1-z}\right) \;=\; -\mathrm{Le}_{\sigma(\bar{s})}\left(z\right), \tag{22}$$

где вектор $\sigma(\bar{s})$ называется двойственным к вектору $\bar{s}$. Например, двойственным к вектору $(2,1)$ будет вектор $(1,2)$, а к вектору (2) — вектор $(1,1)$. Легко проверить, что $\sigma(\sigma(\bar{s})) = \bar{s}$.

Чтобы усовершенствовать лемму 2.1, заметим, что по теореме 2.1 два рассмотренных нами интеграла связаны следующим образом:

$$\int\limits_{[0,1]^3} \frac{x_1^n(1-x_1)^n x_2^n(1-x_2)^n x_3^n(1-x_3)^n\; dx_1\; dx_2\; dx_3}{(1-zx_1x_2)^{n+1}(1-zx_1x_2x_3)^{n+1}} \;=$$

$$= \frac{1}{(1-z)^{n+1}} \cdot \int\limits_{[0,1]^3} \frac{x_1^n(1-x_1)^n x_2^n(1-x_2)^n x_3^n(1-x_3)^n\; dx_1\; dx_2\; dx_3}{\left(1-\left(\frac{-z}{1-z}\right)x_1\right)^{n+1}\left(1-\left(\frac{-z}{1-z}\right)x_1x_2x_3\right)^{n+1}}.$$

Применяя уже доказанные разложения для этих интегралов в линейные формы, получаем равенство

$$P_{2,1}(z^{-1})\,\mathrm{Le}_{2,1}(z) + P_{1,1}(z^{-1})\,\mathrm{Le}_{1,1}(z) + P_2(z^{-1})\,\mathrm{Le}_2(z) + P_1(z^{-1})\,\mathrm{Le}_1(z) + P_0(z^{-1}) =$$
$$= Q_{1,2}(z^{-1})\mathrm{Le}_{1,2}\left(\frac{-z}{1-z}\right) + Q_2(z^{-1})\mathrm{Le}_2\left(\frac{-z}{1-z}\right) + Q_1(z^{-1})\mathrm{Le}_1\left(\frac{-z}{1-z}\right) + Q_0(z^{-1}),$$

где Q с различными индексами — рациональные функции с рациональными коэффициентами. Используя теорему о двойственности для полилогарифмов (22), получим, что последнее равенство эквивалентно следующему:

$$P_{2,1}(z^{-1})\,\mathrm{Le}_{2,1}(z) + P_{1,1}(z^{-1})\,\mathrm{Le}_{1,1}(z) + P_2(z^{-1})\,\mathrm{Le}_2(z) + P_1(z^{-1})\,\mathrm{Le}_1(z) + P_0(z^{-1}) =$$
$$= -Q_{1,2}(z^{-1})\mathrm{Le}_{2,1}\left(z\right) - Q_2(z^{-1})\mathrm{Le}_{1,1}\left(z\right) - Q_1(z^{-1})\mathrm{Le}_1\left(z\right) + Q_0(z^{-1}).$$

Теперь, с помощью линейной независимости полилогарифмов над $\mathbb{C}(z)$, (см., например, [19]), получаем, что многочлен P_2 тождественно нулевой. Значит, первое усовершенствование леммы 2.1 установлено. В промежуточных рассуждениях мы должны были рассматривать z из области $\{z\colon |z| < 1, |z| < |1-z|\}$, однако в конечном результате можно считать $|z| < 1$ в силу аналитического продолжения. Зафиксируем полученный результат в виде новой леммы, ее доказательство уже приведено выше.

Лемма 2.2. При всех неотрицательных целых n и при всех $|z| < 1$ с некоторыми многочленами $P_{2,1}$, $P_{1,1}$, P_1 и P_0 с рациональными коэффициентами справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_{[0,1]^3} \frac{x_1^n(1-x_1)^n x_2^n(1-x_2)^n x_3^n(1-x_3)^n \; dx_1\; dx_2\; dx_3}{(1-zx_1x_2)^{n+1}(1-zx_1x_2x_3)^{n+1}} =$$

$$= P_{2,1}(z^{-1})\,\mathrm{Le}_{2,1}(z) + P_{1,1}(z^{-1})\,\mathrm{Le}_{1,1}(z) + P_1(z^{-1})\,\mathrm{Le}_1(z) + P_0(z^{-1}),$$

причем $P_{1,1}(1) = P_1(1) = 0$.

◄ ►

Отметим, что сам Злобин в своем доказательстве для доказательства последнего равенства переходил к другим интегралам с помощью теоремы из [6], чего нам удалось избежать с помощью применения теоремы 2.1.

Теперь подвергнем нашу лемму второму усовершенствованию. Оно будет связано с арифметическими свойствами многочленов $P_{2,1}$, $P_{1,1}$, P_1 и P_0. Для дальнейшего нам понадобится использовать лемму из [3]. Мы для полноты изложения приведем ее доказательство здесь.

Утверждение 2.7. При неотрицательных целых n и произвольных n_1, n_2 выполняется следующее равенство:

$$(n_1 - n_2 + 1)\dots(n_1 - n_2 + n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\prod_{i=k+1}^{n}(n_1+i)\cdot\prod_{i=0}^{k-1}(n_2+i),$$

где пустые произведения полагаются равными 1.

◄ Рассмотрим функции $f(t) = t^{-n_2}$ и $g(t) = t^{n_1+n}$. Очевидно,

$$\frac{d^k\,f(t)}{d\,t^k} = (-1)^k\prod_{i=0}^{k-1}(n_2+i)\cdot t^{-n_2-k}$$

$$\frac{d^{n-k}\,g(t)}{d\,t^{n-k}} = \prod_{i=k+1}^{n}(n_1+i)\cdot t^{n_1+k}.$$

Кроме того,

$$(f\,g)^{(n)}(t) = (n_1-n_2+1)\dots(n_1-n_2+n)\cdot t^{n_1-n_2}.$$

Требуемое равенство теперь немедленно следует из формулы Ньютона-Лейбница.

Утверждение 2.7 доказано. ►

Докажем теперь еще одну серию утверждений, которые помогут при доказательстве арифметических фактов. Для этого нам понадобится пара определений. Многочлен называется целозначным, если он при любом целом аргументе принимает целые значения. Для целозначности многочлена степени n достаточно, чтобы он принимал целые значения в $n+1$ соседних целых точках, см. [12]. Нам также понадобится ввести некоторый класс рациональных функций. Пусть зафиксировано некоторое целое неотрицательное число δ. Будем называть рациональную функцию $R(x)$ δ-нормальной, если она представляется в виде

$$R(x) = \sum_{\alpha} \sum_{m=1}^{M} \frac{A_{m,\alpha}}{(x+\alpha)^m} + P(x),$$

где суммирование по α ведется по некоторому конечному множеству целых неотрицательных чисел, $d_\delta^{M-m} A_{m,\alpha} \in \mathbb{Z}$ и $d_\delta^M P(x)$ — целозначный многочлен.

Утверждение 2.8. Если δ-нормальную функцию домножить на целозначный многочлен степени не выше δ, то полученная рациональная функция будет δ-нормальной.

◀ Очевидно, что достаточно проверить утверждение для рациональных функций вида

$$R(x) = \frac{A_{m,\alpha}}{(x+\alpha)^m}, \qquad d_\delta^{M-m} A_{m,\alpha} \in \mathbb{Z}.$$

Сделаем это индукцией по m. Проверим для начала базу индукции $m = 1$.

Пусть $T(x)$ — целозначный многочлен степени не выше δ. Тогда имеем

$$\frac{T(x)}{x+\alpha} = \frac{T(-\alpha)}{x+\alpha} + Q(x),$$

где $Q(x)$ — многочлен степени на 1 меньшей, чем $T(x)$. Так как $T(x)$ — целозначный многочлен, $T(-\alpha) \in \mathbb{Z}$. Кроме того, легко видеть, что многочлен $d_\delta\, Q(x)$ в точках $-\alpha + 1, \ldots, -\alpha + \delta$ принимает целые значения, а значит $d_\delta\, Q(x)$ — целозначный многочлен. Поэтому в случае $m = 1$

$$R(x)\, T(x) = \frac{A_{1,\alpha}\, T(-\alpha)}{x+\alpha} + A_{1,\alpha}\, Q(x),$$

причем полученная функция является δ-нормальной. Действительно, $d_\delta^M\, A_{1,\alpha}\, T(-\alpha) \in \mathbb{Z}$ и $d_\delta^M\, A_{1,\alpha}\, Q(x) = d_\delta^{M-1}\, A_{1,\alpha} \cdot d_\delta\, Q(x)$ является целозначным многочленом.

Пусть теперь $m > 1$. Тогда

$$R(x)\, T(x) = \frac{A_{m,\alpha}\, T(-\alpha)}{(x+\alpha)^m} + \frac{A_{m,\alpha}/d_\delta}{(x+\alpha)^{m-1}}\, (d_\delta Q(x)).$$

Первое слагаемое является δ-нормальным, так как $d_\delta^{M-m}\, A_{m,\alpha}\, T(-\alpha) \in \mathbb{Z}$. Ко второму слагаемому можно применить предположение индукции.

Утверждение 2.8 доказано. ▶

Теперь приступим ко второму усовершенствованию леммы. Как и раньше, символом d_n мы обозначаем наименьшее общее кратное чисел $1, \ldots, n$. Кроме того, как было сказано в начале главы, для набора $\bar{s} = (s_1, \ldots, s_l)$ мы используем обозначение $|\bar{s}| = s_1 + \ldots + s_l$, называемое весом набора. Естественно, доказывать в этой лемме мы будем только дополнительную ее часть.

Лемма 2.3. При всех неотрицательных целых n и при всех $|z| < 1$ с некоторыми многочленами $P_{2,1},\ P_{1,1},\ P_1$ и P_0 с рациональными коэффициентами справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_{[0,1]^3} \frac{x_1^n(1-x_1)^n x_2^n(1-x_2)^n x_3^n(1-x_3)^n\ dx_1\ dx_2\ dx_3}{(1-zx_1x_2)^{n+1}(1-zx_1x_2x_3)^{n+1}} =$$

$$= P_{2,1}(z^{-1})\,\mathrm{Le}_{2,1}(z) + P_{1,1}(z^{-1})\,\mathrm{Le}_{1,1}(z) + P_1(z^{-1})\,\mathrm{Le}_1(z) + P_0(z^{-1}),$$

причем $P_{1,1}(1) = P_1(1) = 0$. Кроме того, $d_n^{3-|\bar{s}|} \cdot P_{\bar{s}}(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

◀ Заметим, что

$$(x_1x_2x_3)^n = \left(\frac{1-(1-zx_1x_2x_3)}{z}\right)^n.$$

Применительно к нашему интегралу это равенство дает

$$\int\limits_{[0,1]^3} \frac{x_1^n(1-x_1)^n x_2^n(1-x_2)^n x_3^n(1-x_3)^n\ dx_1\ dx_2\ dx_3}{(1-zx_1x_2)^{n+1}(1-zx_1x_2x_3)^{n+1}} =$$

$$= z^{-n}\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}\int\limits_{[0,1]^3} \frac{(1-x_1)^n(1-x_2)^n(1-x_3)^n\ dx_1\ dx_2\ dx_3}{(1-zx_1x_2)^{n+1}(1-zx_1x_2x_3)^{n+1-s}}.$$

Рассмотрим теперь какое-нибудь конкретное s и будем доказывать утверждение нашей леммы для этого s. Заметим, что множитель перед суммой, также как и $(-1)^s$ не оказывают никакого влияния на арифметические свойства интересующих нас многочленов.

Разложим соответствующий этому s интеграл в правой части в ряд, это делается совершенно аналогично утверждению 2.1. Получим

$$\binom{n}{s}\int\limits_{[0,1]^3} \frac{(1-x_1)^n(1-x_2)^n(1-x_3)^n\ dx_1\ dx_2\ dx_3}{(1-zx_1x_2)^{n+1}(1-zx_1x_2x_3)^{n+1-s}} =$$

$$= \binom{n}{s}\cdot n! \sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant 1} z^{n_1-1}\cdot\frac{(n_1-n_2+1)\cdot\ldots\cdot(n_1-n_2+n)\cdot n_2\cdot\ldots\cdot(n_2+n-1-s)}{n_1^2\cdot\ldots\cdot(n_1+n)^2\cdot n_2\cdot\ldots\cdot(n_2+n)}.$$

Как и ранее, заметим, что можно проводить суммирование по n_2 не до n_1, а до n_1+n.

Преобразуем полученную сумму, используя утверждение 2.7:

$$\binom{n}{s} \cdot n! \sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant 1} z^{n_1-1} \cdot \frac{(n_1-n_2+1)\cdot \ldots \cdot (n_1-n_2+n)\cdot n_2 \cdot \ldots \cdot (n_2+n-1-s)}{n_1^2 \cdot \ldots \cdot (n_1+n)^2 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot (n_2+n)} =$$

$$= \sum_{n_1 \geqslant 1} \sum_{n_2=1}^{n_1+n} z^{n_1-1} \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{(n_1+k+1)\cdot \ldots \cdot (n_1+n)}{(n-k)!} \cdot \frac{(n!)^2}{n_1^2 \cdot \ldots \cdot (n_1+n)^2} \times$$

$$\times \frac{n_2 \cdot \ldots \cdot (n_2+n-1-s)}{(n-s)!} \cdot \frac{n_2 \cdot \ldots \cdot (n_2+k-1)}{k!} \cdot \frac{n!}{n_2 \cdot \ldots \cdot (n_2+n)}. \quad (23)$$

Будем считать n фиксированным, хотя и произвольным. Покажем, что

$$\frac{(n!)^2}{n_1^2 \cdot \ldots \cdot (n_1+n)^2}$$

является n-нормальной функцией. Действительно, эта рациональная функция допускает разложение на простейшие дроби:

$$\sum_{p=0}^{n} \left(\frac{A_{1,p}}{n_1+p} + \frac{A_{2,p}}{(n_1+p)^2} \right),$$

причем для чисел $A_{1,p}$ и $A_{2,p}$ легко написать явные формулы:

$$A_{1,p} = (-2) \cdot \binom{n}{p}^2 \cdot \left(-\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-p} \frac{1}{k} \right)$$

$$A_{2,p} = \binom{n}{p}^2.$$

Как легко видеть, числа $A_{2,p}$ являются целыми, а числа $A_{1,p}$ при домножении на d_n становятся целыми. Значит, n-нормальность установлена.

Кроме того, многочлен

$$\frac{(n_1+k+1)\cdot \ldots \cdot (n_1+n)}{(n-k)!}$$

очевидно является целозначным и имеет степень $n-k$. По утверждению 2.8 произведение

$$\frac{(n_1+k+1)\cdot \ldots \cdot (n_1+n)}{(n-k)!} \cdot \frac{(n!)^2}{n_1^2 \cdot \ldots \cdot (n_1+n)^2}$$

является n-нормальной функцией.

Аналогично

$$\frac{n_2 \cdot \ldots \cdot (n_2+n-1-s)}{(n-s)!} \cdot \frac{n_2 \cdot \ldots \cdot (n_2+k-1)}{k!} \cdot \frac{n!}{n_2 \cdot \ldots \cdot (n_2+n)}$$

также является n-нормальной функцией — первые два множителя есть целозначные многочлены степени не выше n, а последний есть n-нормальная функция.

Таким образом, выражение в (23) преобразуется к следующему виду:

$$\sum_{n_1 \geqslant 1} \sum_{n_2=1}^{n_1+n} z^{n_1-1} \cdot \sum_{p_1,p_2=0}^{n} \left(\frac{\tilde{A}_{1,p_1}\tilde{B}_{1,p_2}}{(n_1+p_1)(n_2+p_2)} + \frac{\tilde{A}_{2,p_1}\tilde{B}_{1,p_2}}{(n_1+p_1)^2(n_2+p_2)} \right).$$

Целозначный многочлен в конечном выражении отсутствует из соображений единственности разложения в виде линейной комбинации полилогарифмов. Также мы просуммировали наши рациональные функции по k. Выполняются следующие включения: $\tilde{B}_{1,p_2} \in \mathbb{Z}$, $\tilde{A}_{2,p_1} \in \mathbb{Z}$ и $d_n \cdot \tilde{A}_{1,p_1} \in \mathbb{Z}$. Применяя утверждение 2.4, каждый легко увидит, что получающиеся многочлены удовлетворяют заявленным арифметическим свойствам.

Лемма 2.3 доказана. ►

Утверждение 2.9. Для любого набора $(s_1, \ldots, s_l)$ натуральных чисел верно

$$\lim_{z \to 1-} (1-z)\mathrm{Le}_{s_1,\ldots,s_1}(z) = 0.$$

◄ Будем вычислять предел

$$\lim_{z \to 1-} (1-z)\mathrm{Le}_{s_1,\ldots,s_1}(z) = \lim_{z \to 1-} \frac{\mathrm{Le}_{s_1,\ldots,s_1}(z)}{\dfrac{1}{1-z}}$$

по правилу Лопиталя. Как известно, полилогарифмы удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dz}\,\mathrm{Le}_{s_1,s_2,\ldots,s_l}(z) = \frac{1}{z}\,\mathrm{Le}_{s_1-1,s_2,\ldots,s_l}(z), \quad \text{если } s_1 > 1,$$
$$\frac{d}{dz}\,\mathrm{Le}_{1,s_2,\ldots,s_l}(z) = \frac{1}{z(1-z)}\,\mathrm{Le}_{s_2,\ldots,s_l}(z).$$

Поскольку производная линейна, многократное применение правила Лопиталя завершает доказательство утверждения. ►

Докажем еще одно утверждение, с помощью которого позже мы оценим подынтегральную функцию.

Утверждение 2.10. Для всех $(x, y, z) \in [0,1]^3$ верно неравенство:

$$\frac{x(1-x)y(1-y)z(1-z)}{(1-xy)(1-xyz)} \leqslant \left(\sqrt{2}-1\right)^4$$

◄ Функция

$$g(x,\, y,\, z) \;=\; \frac{x(1-x)y(1-y)z(1-z)}{(1-xy)(1-xyz)}$$

является непрерывной на множестве $[0,1]^3$, а значит, достигает на этом множестве своего максимума. Чтобы найти этот максимум, найдем частные производные функции g:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{(y-1)y(z-1)z\big(x(xy((y-1)z-1)+2)-1\big)}{(xy-1)^2\,(xyz-1)^2},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{(x-1)x(z-1)z\big(y(xy((x-1)z-1)+2)-1\big)}{(xy-1)^2\,(xyz-1)^2},$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{(x-1)x(y-1)y\,(xyz^2-2z+1)}{(xy-1)(xyz-1)^2}.$$

Теперь приравняем эти частные производные нулю, чтобы найти точки экстремумов. Однако мы сильно упростим себе задачу, если отметим, что всюду на границе единичного куба функция $g(x, y, z)$ равна нулю, а внутри куба функция всюду положительна. Значит, функция достигает своего максимума строго внутри, и мы можем отбросить лишние скобки, получая следующие необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} x^2y^2z - x^2yz - x^2y + 2x - 1 = 0, \\ x^2y^2z - xy^2z - xy^2 + 2y - 1 = 0, \\ xyz^2 - 2z + 1 = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим $(y - x)(xy(z + 1) - 2) = 0$. Если $x \neq y$, то $xy(z+1) - 2 = 0$, откуда $xy = \dfrac{2}{1+z}$. Но из последнего уравнения $xy = \dfrac{2z-1}{z^2}$. Получаем, что $z = 1$, чего быть не может. Значит, $x = y$. Перепишем (24) с учетом этого равенства:

$$\begin{cases} x^4z - x^3z - x^3 + 2x - 1 = 0, \\ x^2z^2 - 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

Учитывая, что нас интересуют только положительные x, из последнего уравнения заключаем, что $x = \dfrac{\sqrt{2z-1}}{z}$. Подставляя теперь это выражение в оставшееся уравнение, получим

$$\frac{(1-z)\left(z^2 - 3z + \sqrt{2z-1} + 1\right)}{z^3} = 0,$$

то есть уравнение на z. Учитывая, что нас не интересуют граничные точки, уравнение упрощается до $z^2 - 3z + \sqrt{2z-1} + 1 = 0$, решить которое не представляет труда. Перенося корень в другую часть и возводя в квадрат, получим $(z-1)^2\left(z^2 - 4z + 2\right) = 0$, откуда $z = 2 \pm \sqrt{2}$. Учитывая, что нас интересуют только точки внутри единичного куба, заключаем, что $z = 2 - \sqrt{2}$. То есть точка максимума функции $g(x, y, z)$ на единичном кубе — это $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 2 - \sqrt{2}\right)$. Вычисляя максимальное значение, получим $17 - 12\sqrt{2}$, или $(\sqrt{2} - 1)^4$.

Утверждение 2.10 доказано. ▶

Следствие 2.2. При всех неотрицательных целых n с некоторыми числами $q_{2,1}$ и q_0, такими что $q_{2,1} \in \mathbb{Z}$ и $d_n^3 \cdot q_0 \in \mathbb{Z}$, справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_{[0,1]^3} \frac{x_1^n(1-x_1)^n x_2^n(1-x_2)^n x_3^n(1-x_3)^n \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3}{(1-x_1x_2)^{n+1}(1-x_1x_2x_3)^{n+1}} \;=\; q_{2,1}\,\zeta^*(2,1) + q_0.$$

◀ Совершим предельный переход в равенстве, которое было установлено в лемме 2.3, по комплексным z из единичного круга при $z \to 1-$.

Чтобы доказать правомерность перестановки предела и интегрирования, достаточно установить равномерную сходимость интеграла для указанных z. Она следует из признака равномерной сходимости Вейерштрасса. Действительно, для всех указанных z справедливо очевидное неравенство

$$\int\limits_{[0,1]^3} \frac{x_1^n(1-x_1)^n x_2^n(1-x_2)^n x_3^n(1-x_3)^n \; dx_1 \; dx_2 \; dx_3}{(1-zx_1x_2)^{n+1}(1-zx_1x_2x_3)^{n+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{[0,1]^3} \frac{x_1^n(1-x_1)^n x_2^n(1-x_2)^n x_3^n(1-x_3)^n \; dx_1 \; dx_2 \; dx_3}{(1-x_1x_2)^{n+1}(1-x_1x_2x_3)^{n+1}},$$

а значит, для того, чтобы воспользоваться признаком Вейерштрасса, нужно лишь доказать сходимость интеграла в правой части неравенства. С учетом утверждения 2.10 для этого достаточно доказать сходимость интеграла

$$\int\limits_{[0,1]^3} \frac{dx_1 \; dx_2 \; dx_3}{(1-x_1x_2)\,(1-x_1x_2x_3)}.$$

Известно, что этот интеграл равен $\zeta^*(2,1) = 2\zeta(3)$. Таким образом обоснована законность перестановки предела и интеграла.

Проследим теперь за правой частью доказываемого уравнения. Нужно перейти к пределу при $z \to 1-$ в выражении

$$P_{2,1}(z^{-1}) \operatorname{Le}_{2,1}(z) + P_{1,1}(z^{-1}) \operatorname{Le}_{1,1}(z) + P_1(z^{-1}) \operatorname{Le}_1(z) + P_0(z^{-1}).$$

Поскольку в лемме 2.3 установлено, что $P_{1,1}(1) = P_1(1) = 0$, по утверждению 2.9 два средних слагаемых стремятся к нулю. Установленные в той же лемме арифметические свойства $P_{2,1}(x) \in \mathbb{Z}[x]$ и $d_3^n \cdot P_0(x) \in \mathbb{Z}[x]$ вместе с тривиальным равенством $\lim\limits_{z\to 1-} \operatorname{Le}_{2,1}(z) = \zeta^*(2,1)$ завершают доказательство следствия 2.2. ▶

Дадим теперь доказательство иррациональности $\zeta(3)$.

Теорема. Число $\zeta(3)$ иррационально.

◀ По следствию 2.2 при всех неотрицательных целых n с некоторыми целыми числами A_n и B_n выполняются равенства

$$\int\limits_{[0,1]^3} \frac{x_1^n(1-x_1)^n x_2^n(1-x_2)^n x_3^n(1-x_3)^n \; dx_1 \; dx_2 \; dx_3}{(1-x_1x_2)^{n+1}(1-x_1x_2x_3)^{n+1}} \;=\; d_n^{-3}\Big(A_n + B_n\,\zeta^*(2,1)\Big).$$

Легко видеть из определения, что $\zeta^*(2,1) = \zeta(2,1) + \zeta(3)$, а согласно известному тождеству $\zeta(2,1) = \zeta(3)$, которое доказал еще Эйлер, получаем, что $\zeta^*(2,1) = 2\zeta(3)$. Доказательство тождества $\zeta(2,1) = \zeta(3)$ можно найти, например, в статье [8]. Таким образом, при всех неотрицательных целых n с некоторыми целыми числами A_n и B_n выполняются равенства

$$\int\limits_{[0,1]^3} \frac{x_1^n(1-x_1)^n x_2^n(1-x_2)^n x_3^n(1-x_3)^n \; dx_1 \; dx_2 \; dx_3}{(1-x_1x_2)^{n+1}(1-x_1x_2x_3)^{n+1}} \;=\; d_n^{-3}\Big(A_n + B_n\,\zeta(3)\Big).$$

Интеграл легко оценить, используя утверждение 2.10:

$$0 < \int\limits_{[0,1]^3} \frac{x_1^n(1-x_1)^n x_2^n(1-x_2)^n x_3^n(1-x_3)^n \; dx_1 \; dx_2 \; dx_3}{(1-x_1x_2)^{n+1}(1-x_1x_2x_3)^{n+1}} \leqslant \left(\sqrt{2}-1\right)^{4n} \int\limits_{[0,1]^3} \frac{dx_1 \; dx_2 \; dx_3}{(1-x_1x_2)(1-x_1x_2x_3)}.$$

От оставшегося интеграла нам требуется всего лишь сходимость, которую можно установить и непосредственно, однако хорошо известно, что точное значение этого интеграла равно $2\zeta(3)$. Можно увидеть это равенство, если подставить $n = 0$ в утверждение 2.1.

Таким образом при всех неотрицательных целых n с некоторыми целыми числами A_n и B_n выполняются неравенства:

$$0 < d_n^{-3}\Big(A_n + B_n\,\zeta(3)\Big) \leqslant \left(\sqrt{2}-1\right)^{4n} \cdot 2\zeta(3),$$

или, что то же самое,

$$0 < \Big(A_n + B_n\,\zeta(3)\Big) \leqslant d_n^3 \left(\sqrt{2}-1\right)^{4n} \cdot 2\zeta(3).$$

Теперь пользуясь равенством $\left(\sqrt{2}-1\right)^4 = 17 - 12\sqrt{2}$, заметим, что

$$e^3 \left(\sqrt{2}-1\right)^4 < 27\left(17 - 12\sqrt{2}\right) < \frac{26}{27}.$$

Последняя оценка далеко не точна, зато ее очень просто доказать. Действительно, цепочка неравенств

$$\left(12\sqrt{2}\right)^2 = 288 > 289 - 2\cdot 17 \cdot \frac{26}{27^2} + \frac{26^2}{27^4} = \left(17 - \frac{26}{27^2}\right)^2$$

полностью доказывает эту оценку.

Итак, вспоминая, что при всех достаточно больших натуральных n верно $d_n < e^n$, заключаем, что при всех достаточно больших n должно выполняться

$$0 < A_n + B_n\,\zeta(3) < \left(\frac{26}{27}\right)^n \cdot 2\zeta(3).$$

Предположим теперь, что $\zeta(3) = \dfrac{a}{b}$ с целым a и положительным целым b. Тогда $A_n a + B_n b$ является положительным целым числом при всех n. При этом $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n a + B_n b) = 0$, что невозможно. Значит, $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$.

Теорема доказана. ▶

3 Обобщение интегрального тождества

В работе [6] было доказано интегральное тождество, связывающее два различных метода построения диофантовых приближений к значениям дзета-функции Римана в целых точках. Кроме того, как уже упоминалось, в доказательстве иррациональности $\zeta(3)$ Злобин использовал это тождество для доказательства леммы 2.2. В этой главе будут доказаны несколько вариантов обобщения этого интегрального тождества. Основное отличие наших теорем в том, что в знаменателе наших интегралов стоит несколько многочленов вместо одного.

Пусть дан набор натуральных чисел $\bar{s} = (s_1, \ldots, s_l)$. Будем называть $l(\bar{s}) = l$ длиной, а $|\bar{s}| = s_1 + \ldots + s_l$ весом этого набора. Положим $l(\varnothing) = 0$ и $|\varnothing| = 0$.

Определим многочлены

$$Q_0(z_1, \ldots, z_l, x_1, \ldots, x_{|\bar{s}|}) = 1,$$
$$Q_j(z_1, \ldots, z_l, x_1, \ldots, x_{|\bar{s}|}) = Q_{j-1} - z_1 \ldots z_j \; x_1 \ldots x_{s_1+\ldots+s_j-1} \; (1 - x_{s_1+\ldots+s_j}), \quad (25)$$

где $x_1, \ldots, x_{|\bar{s}|} \in \mathbb{R},\; z_1, \ldots, z_l \in \mathbb{C}$. Таким образом,

$$Q_j = 1 - z_1 \; x_1 \ldots x_{s_1-1} + z_1 \; x_1 \ldots x_{s_1} - \ldots - z_1 \ldots z_j \; x_1 \ldots x_{s_1+\ldots+s_j-1} + z_1 \ldots z_j \; x_1 \ldots x_{s_1+\ldots+s_j}.$$

Заметим, что при $|z_1| < 1, \ldots, |z_l| < 1,\; x_1, \ldots, x_{|\bar{s}|} \in [0,1]$ выполняется неравенство

$$|Q_j(z_1, \ldots, z_l, x_1, \ldots, x_{|\bar{s}|})| > Q_j(\underbrace{1, \ldots, 1}_{l}, x_1, \ldots, x_{|\bar{s}|}) \geqslant x_1 \ldots x_{s_1 \ldots + s_j} \geqslant x_1 \ldots x_{|\bar{s}|} \geqslant 0 \quad (26)$$

для $j = 1, \ldots, l$.

Пусть даны наборы комплексных чисел $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_{|\bar{s}|}), \bar{b} = (b_1, \ldots, b_{|\bar{s}|}), \bar{d} = (d_1, \ldots, d_l)$. Пусть эти числа удовлетворяют следующим условиям: $\operatorname{Re} b_i > \operatorname{Re} a_i > 0$ при $1 \leqslant i \leqslant |\bar{s}|$, $\operatorname{Re} d_l > 0$ и остальные d_j либо равны нулю, либо лежат в правой полуплоскости. Пусть кроме того дан набор комплексных чисел $\bar{c} = (c_1, \ldots, c_l)$ с условием $\operatorname{Re} c_l > 0$ и для $1 \leqslant j < l$ либо $\operatorname{Re} c_j > 0$, либо $c_j = 0$. Пусть также дан набор комплексных чисел $\bar{z} = (z_1, \ldots, z_l)$ с условием $|z_j| < 1$ при $1 \leqslant j \leqslant l$

Введем следующие обозначения:

$$\mathrm{I}_{\bar{s}}(\bar{a}; \bar{b}; \bar{d}\,|\bar{z}) \;=\; \prod_{i=1}^{|\bar{s}|} \frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)\Gamma(b_i - a_i)} \int\limits_{[0,1]^{|\bar{s}|}} \frac{\prod\limits_{i=1}^{|\bar{s}|} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod\limits_{j=1}^{l} Q_j(\bar{z}, \bar{x})^{d_j}} \, d\bar{x};$$

$$\mathrm{J}_{\bar{s}}(\bar{a}; \bar{b}; \bar{c}\,|\bar{z}) = \prod_{i=1}^{|\bar{s}|} \frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)\Gamma(b_i - a_i)} \int\limits_{[0,1]^{|\bar{s}|}} \frac{\prod\limits_{i=1}^{|\bar{s}|} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod\limits_{j=1}^{l} (1 - z_1 \ldots z_j \, x_1 \ldots x_{s_1+\ldots+s_j})^{c_j}} \, d\bar{x}$$

и положим $\mathrm{I}_\varnothing = 1$ и $\mathrm{J}_\varnothing = 1$.

Будем обозначать $d_{k,l} = \sum\limits_{j=k}^{l} d_j$. Обозначим $a_0 = d_{1,l}$. Кроме того будем обозначать $r_j = \sum\limits_{n=1}^{j} s_n$, естественно, полагая $r_0 = 0$.

Определим теперь вектор $\bar{s}\,' = (s'_1, \ldots, s'_l)$ формулами $s'_1 = s_1$, $s'_j = s_j + \delta^0_{d_{j-1}}$ при $1 < j \leqslant l$. Таким образом $l(\bar{s}) = l(\bar{s}\,') = l$ и $|\bar{s}| \leqslant |\bar{s}\,'|$.

Определим вектор $\bar{a}'$ следующим образом. Сначала после каждого a_{r_j} для $1 \leqslant j < l$ при условии $d_j \neq 0$ добавим новую координату $d_{j+1,l}$. А затем на место каждого a_{r_j} при $1 \leqslant j \leqslant l$ поставим $a_{r_{j-1}}$. Таким образом получится вектор

$$\bar{a}' = (a_1, \ldots, a_{r_1-1}, a_0, (d_{2,l},) \ldots,\ a_{r_{l-2}-1}, a_{r_{l-3}}, (d_{l-1,l},) \ldots, a_{r_{l-1}-1}, a_{r_{l-2}}, (d_l,) \ldots, a_{r_l-1}, a_{r_{l-1}}).$$

Скобки означают, что добавлять новые координаты нужно не всегда, а только когда $d_j \neq 0$.

Введем теперь вектор $\bar{b}\,'$. Для этого после каждого b_{r_j} для $1 \leqslant j < l$ при условии $d_j \neq 0$ добавим новую координату $d_{j,l}$. В результате получится вектор

$$\bar{b}\,' = (b_1, \ldots, b_{r_1-1}, b_{r_1}, (d_{1,l},) \ldots b_{r_{l-2}-1}, b_{r_{l-2}}, (d_{l-2,l},) \ldots, b_{r_{l-1}-1}, b_{r_{l-1}}, (d_{l-1,l},) \ldots, b_{r_l-1}, b_{r_l}).$$

Потребуем дополнительно, чтобы выполялось $\operatorname{Re} b_{r_j} > \operatorname{Re} a_{r_{j-1}}$ для $1 \leqslant j \leqslant l$.

Введем еще вектор $\bar{c}' = (b_{r_1} - a_{r_1}, \ldots, b_{r_l} - a_{r_l})$. Заметим, что предшествующими ограничениями гарантируется $\operatorname{Re} c'_j > 0$.

Теорема 3.1. В этих обозначениях и при указанных выше ограничениях справедливо следующее равенство:

$$\mathrm{I}_{\bar{s}}(\bar{a}; \bar{b}; \bar{d}\,|\bar{z}) \;=\; \mathrm{J}_{\bar{s}'}(\bar{a}'; \bar{b}\,'; \bar{c}'\,|\bar{z})$$

◀ Перед тем, как доказывать само интегральное равенство, переформулируем его:

$$I = \int\limits_{[0,1]^{|\bar{s}|}} \frac{\prod\limits_{i=1}^{|\bar{s}|} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod\limits_{j=1}^{l} Q_j(\bar{z},\bar{x})^{d_j}}\, d\bar{x} \;=\; \frac{\Gamma(a_{r_l})}{\Gamma(d_l)} \cdot \prod_{j=1}^{l} \frac{\Gamma(b_{r_j} - a_{r_j})}{\Gamma(b_{r_j} - a_{r_{j-1}})} \cdot \prod_{\substack{j=1\\ d_j\neq 0}}^{l-1} \frac{1}{\Gamma(d_j)} \times$$

$$\times \int\limits_{[0,1]^{r'_l}} \frac{\prod\limits_{j=1}^{l} \left(\prod\limits_{r_{j-1}<i<r_j} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1} \cdot x_{r_j}^{a_{r_{j-1}}-1}(1-x_{r_j})^{b_{r_j}-a_{r_{j-1}}-1} \right)}{\prod\limits_{j=1}^{l} \Big(1 - z_1 \ldots z_j\ x_1 \ldots x_{r_j} \prod\limits_{\substack{p=1\\ d_p\neq 0}}^{j-1} y_p\Big)^{b_{r_j}-a_{r_j}}} \times$$

$$\times \prod_{\substack{j=1\\ d_j\neq 0}}^{l-1} y_j^{d_{j+1,l}-1}(1-y_j)^{d_j-1}\ d\bar{x} \prod_{\substack{j=1\\ d_j\neq 0}}^{l-1} dy_j.$$

Доказывать утверждение будем индукцией по l.

База очевидна, при $l = 0$ получаем тривиальное равенство $1 = 1$.

Совершим теперь переход индукции. Предположим, что $l \geqslant 1$ и утверждение доказано для $l-1$, докажем его для l.

Преобразуем интеграл I, совершив замену $x_{|\bar{s}|} \to 1 - x_{|\bar{s}|}$ и используя то, что только многочлен Q_l зависит от переменной $x_{|\bar{s}|}$:

$$I = \int\limits_{[0,1]^{|\bar{s}|}} \frac{\prod\limits_{i=1}^{|\bar{s}|-1} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}\ x_{|\bar{s}|}^{b_{|\bar{s}|}-a_{|\bar{s}|}-1}(1-x_{|\bar{s}|})^{a_{|\bar{s}|}-1}}{Q_1^{d_1}\dots Q_{l-1}^{d_{l-1}}\cdot(Q_{l-1}-z_1\dots z_l\, x_1\dots x_{|\bar{s}|})^{d_l}}\, d\bar{x} =$$

$$= \int\limits_{[0,1]^{r_{l-1}}} \frac{\prod\limits_{i=1}^{r_{l-1}} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{Q_1^{d_1}\dots Q_{l-2}^{d_{l-2}}\ Q_{l-1}^{d_{l-1,l}}} \cdot \int\limits_{[0,1]^{s_l}} \frac{\prod\limits_{r_{l-1}<i<r_l} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}\ x_{r_l}^{b_{r_l}-a_{r_l}-1}(1-x_{r_l})^{a_{r_l}-1}}{\left(1-\dfrac{z_1\dots z_l\ x_1\dots x_{r_l}}{Q_{l-1}}\right)^{d_l}}\, d\bar{x}.$$

Из неравентств (26) для многочленов Q_j следует, что при $|z_1| < 1, \dots, |z_l| < 1$ выполнено неравенство

$$\left|\frac{z_1\dots z_l\cdot x_1\dots x_{r_l}}{Q_{l-1}(z_1,\dots,z_l,x_1,\dots,x_{r_l})}\right| \leqslant |z_1|\dots|z_l|\cdot\frac{x_1\dots x_{r_l}}{Q_{l-1}(1,\dots,1,x_1,\dots,x_{r_l})} < 1$$

Значит, знаменатель последнего интеграла можно разложить в сходящийся ряд Тейлора:

$$\left(1-\frac{z_1\dots z_l\cdot x_1\dots x_{r_l}}{Q_{l-1}(z_1,\dots,z_l,x_1,\dots,x_{r_l})}\right)^{-d_l} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(d_l+k)}{\Gamma(d_l)k!}\left(\frac{z_1\dots z_l\cdot x_1\dots x_{r_l}}{Q_{l-1}(z_1,\dots,z_l,x_1,\dots,x_{r_l})}\right)^k.$$

Подставим это разложение и воспользуемся равномерной сходимостью интегралов, меняя местами суммирование и интегрирование:

$$I = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(d_l+k)}{\Gamma(d_l)k!}\ z_1^k\dots z_l^k \int\limits_{[0,1]^{r_{l-1}}} \frac{\prod\limits_{i=1}^{r_{l-1}} x_i^{a_i+k-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{Q_1^{d_1}\dots Q_{l-2}^{d_{l-2}}\ Q_{l-1}^{d_{l-1,l}+k}}\, dx_1\dots dx_{r_{l-1}}\times$$

$$\times\int\limits_{[0,1]^{s_l}} \prod_{r_{l-1}<i<r_l} x_i^{a_i+k-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}\ x_{r_l}^{b_{r_l}-a_{r_l}+k-1}(1-x_{r_l})^{a_{r_l}-1}\, dx_{r_{l-1}+1}\dots dx_{r_l}.$$

Второй интеграл представляет собой просто бета-функцию по каждой из переменных, так что он равен

$$\prod_{r_{l-1}<i<r_l}\frac{\Gamma(a_i+k)\Gamma(b_i-a_i)}{\Gamma(b_i+k)}\cdot\frac{\Gamma(a_{r_l})\Gamma(b_{r_l}-a_{r_l}+k)}{\Gamma(b_{r_l}+k)}.$$

К первому интегралу применим предположение индукции:

$$\int\limits_{[0,1]^{r_{l-1}}} \frac{\prod\limits_{i=1}^{r_{l-1}} x_i^{a_i+k-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{Q_1^{d_1}\dots Q_{l-2}^{d_{l-2}}\ (Q_{l-1})^{d_{l-1,l}+k}}\ d\bar{x} = \frac{\Gamma(a_{r_{l-1}}+k)}{\Gamma(d_{l-1,l}+k)}\cdot\prod_{j=1}^{l-1}\frac{\Gamma(b_{r_j}-a_{r_j})}{\Gamma(b_{r_j}-a_{r_{j-1}})}\cdot\prod_{\substack{j=1\\d_j\neq 0}}^{l-2}\frac{1}{\Gamma(d_j)}\times$$

$$\times\int\limits_{[0,1]^{r'_{l-1}}} \frac{\prod\limits_{j=1}^{l-1}\left(\prod\limits_{r_{j-1}<i<r_j} x_i^{a_i+k-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}\cdot x_{r_j}^{a_{r_{j-1}}+k-1}(1-x_{r_j})^{b_{r_j}-a_{r_{j-1}}-1}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{l-1}\Bigl(1-z_1\dots z_j\ x_1\dots x_{r_j}\prod\limits_{\substack{p=1\\d_p\neq 0}}^{j-1}y_p\Bigr)^{b_{r_j}-a_{r_j}}}\times$$

$$\times\prod_{\substack{j=1\\d_j\neq 0}}^{l-2} y_j^{d_{j+1,l}+k-1}(1-y_j)^{d_j-1}\ d\bar{x}\ d\bar{y},$$

где $d\bar{y}=\prod\limits_{\substack{j=1\\d_j\neq 0}}^{l-2} dy_j$.

Объединим полученные результаты, перегруппировав гамма-множители и воспользовавшись равномерной сходимостью:

$$I\ =\ \frac{\Gamma(a_{r_l})}{\Gamma(d_l)}\cdot\prod_{j=1}^{l}\frac{\Gamma(b_{r_j}-a_{r_j})}{\Gamma(b_{r_j}-a_{r_{j-1}})}\cdot\prod_{\substack{j=1\\d_j\neq 0}}^{l-2}\frac{1}{\Gamma(d_j)}\ \times$$

$$\times\int\limits_{[0,1]^{r'_{l-1}}} \frac{\prod\limits_{j=1}^{l-1}\left(\prod\limits_{r_{j-1}<i<r_j} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}\cdot x_{r_j}^{a_{r_{j-1}}-1}(1-x_{r_j})^{b_{r_j}-a_{r_{j-1}}-1}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{l-1}\Bigl(1-z_1\dots z_j\ x_1\dots x_{r_j}\prod\limits_{\substack{p=1\\d_p\neq 0}}^{j-1}y_p\Bigr)^{b_{r_j}-a_{r_j}}}\times$$

$$\times\prod_{\substack{j=1\\d_j\neq 0}}^{l-2} y_j^{d_{j+1,l}-1}(1-y_j)^{d_j-1}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(b_{r_l}-a_{r_l}+k)}{\Gamma(b_{r_l}-a_{r_l})k!}\ \Bigl(z_1\dots z_l\,x_1\dots x_{r_{l-1}}\prod_{\substack{j=1\\d_j\neq 0}}^{l-2}y_j\Bigr)^k\times$$

$$\times\prod_{r_{j-1}<i<r_j}\frac{\Gamma(a_i+k)\Gamma(b_i-a_i)}{\Gamma(b_i+k)}\cdot\frac{\Gamma(a_{r_{l-1}}+k)\Gamma(b_{r_l}-a_{r_{l-1}})}{\Gamma(b_{r_l}+k)}\cdot\frac{\Gamma(d_l+k)}{\Gamma(d_{l-1,l}+k)}\ d\bar{x}\ d\bar{y}$$

Заметим, что

$$\prod_{\substack{j=1\\d_j\neq 0}}^{l-2}\frac{1}{\Gamma(d_j)}\cdot\frac{\Gamma(d_l+k)}{\Gamma(d_{l-1,l}+k)} = \begin{cases}\prod\limits_{\substack{j=1\\d_j\neq 0}}^{l-1}\dfrac{1}{\Gamma(d_j)}, & \text{если } d_{l-1}=0\\ \prod\limits_{\substack{j=1\\d_j\neq 0}}^{l-1}\dfrac{1}{\Gamma(d_j)}\cdot\dfrac{\Gamma(d_l+k)\Gamma(d_{l-1})}{\Gamma(d_{l-1}+d_l+k)} & \text{иначе.}\end{cases}$$

Заметим, что внутриинтегральная сумма сама является интегралом, только теперь множитель $\dfrac{\Gamma(d_l+k)\Gamma(d_{l-1})}{\Gamma(d_{l-1}+d_l+k)}$, если он есть, дает еще одну переменную интегрирования:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(b_{r_l}-a_{r_l}+k)}{\Gamma(b_{r_l}-a_{r_l})k!}\,\Big(z_1\ldots z_l\,x_1\ldots x_{r_{l-1}}\prod_{\substack{j=1\\ d_j\neq 0}}^{l-2}y_j\Big)^k\times$$

$$\times\prod_{r_{j-1}<i<r_j}\frac{\Gamma(a_i+k)\Gamma(b_i-a_i)}{\Gamma(b_i+k)}\cdot\frac{\Gamma(a_{r_{l-1}}+k)\Gamma(b_{r_l}-a_{r_{l-1}})}{\Gamma(b_{r_l}+k)}\cdot\frac{\Gamma(d_l+k)}{\Gamma(d_{l-1,l}+k)}=$$

$$=\int\limits_{[0,1]^{s'_l}}\frac{\prod\limits_{r_{j-1}<i<r_j}x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}\cdot x_{r_l}^{a_{r_{l-1}}-1}(1-x_{r_l})^{b_{r_l}-a_{r_{l-1}}-1}}{\Big(1-z_1\ldots z_l\;x_1\ldots x_{r_l}\prod\limits_{\substack{j=1\\ d_j\neq 0}}^{l-1}y_j\Big)^{b_{r_l}-a_{r_l}}}\,dx_{r_{l-1}+1}\ldots dx_{r_l}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\Gamma(d_{l-1})}\cdot y_{l-1}^{d_l-1}(1-y_{l-1})^{d_{l-1}-1}\;dy_{l-1}\right),$$

где последнее выражение в скобках появляется только тогда, когда $d_{l-1}\neq 0$.

Подстановка этого равенства в выражение для I завершает доказательство теоремы:

$$I=\int\limits_{[0,1]^{|\bar s|}}\frac{\prod\limits_{i=1}^{|\bar s|}x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod\limits_{j=1}^{l}Q_j(\bar z,\bar x)^{d_j}}\,d\bar x\;=\;\frac{\Gamma(a_{r_l})}{\Gamma(d_l)}\cdot\prod_{j=1}^{l}\frac{\Gamma(b_{r_j}-a_{r_j})}{\Gamma(b_{r_j}-a_{r_{j-1}})}\cdot\prod_{\substack{j=1\\ d_j\neq 0}}^{l-1}\frac{1}{\Gamma(d_j)}\times$$

$$\times\int\limits_{[0,1]^{r'_l}}\frac{\prod\limits_{j=1}^{l}\left(\prod\limits_{r_{j-1}<i<r_j}x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}\cdot x_{r_j}^{a_{r_{j-1}}-1}(1-x_{r_j})^{b_{r_j}-a_{r_{j-1}}-1}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{l}\Big(1-z_1\ldots z_j\;x_1\ldots x_{r_j}\prod\limits_{\substack{p=1\\ d_p\neq 0}}^{j-1}y_p\Big)^{b_{r_j}-a_{r_j}}}\times$$

$$\times\prod_{\substack{j=1\\ d_j\neq 0}}^{l-1}y_j^{d_{j+1,l}-1}(1-y_j)^{d_j-1}\;d\bar x\prod_{\substack{j=1\\ d_j\neq 0}}^{l-1}dy_j.$$

Теорема 3.1 доказана. ▶

Результаты работы [6] получаются из доказанной теоремы при $\bar d=(0,\ldots,0,d_l)$ и $\bar z=(z,1,\ldots,1)$.

Заметим также, что из доказательства теоремы ясно, что координаты вектора $\bar a$ внутри групп, находящихся между $(d_{j,l})$ и $(d_{j+1,l})$, можно произвольным образом переставлять, например сдвинуть по циклу. То есть, если обозначить

$$\tilde a=(a_0,\ldots,a_{r_1-1},(d_{2,l},)\;a_{r_1},\ldots,a_{r_{l-1}-1},(d_{l,l},)\;a_{r_{l-1}},\ldots,a_{r_l-1}),$$

то при соответствующих ограничениях будет справедливо равенство

$$\mathrm{I}_{\bar s}(\bar a;\bar b;\bar d\,|\bar z)\;=\;\mathrm{J}_{\bar s'}(\tilde a;\bar b\,';\bar c'\,|\bar z).$$

Наложив некоторые ограничения на параметры a_i, можно избежать появления новых переменных интегрирования. А именно, потребуем $a_{r_j} = d_{j,l}$ при $d_j \neq 0$ для $1 \leqslant j < l$ и будем обозначать

$$\bar{a}' = (a_1, \ldots, a_{r_1-1}, \hat{a}_{r_1}, a_{r_1+1}, \ldots, a_{r_2-1}, \hat{a}_{r_2}, a_{r_2+1}, \ldots, a_{r_l-1}, \hat{a}_{r_l}),$$

где $\hat{a}_{r_1} = d_{1,l}$, а для $1 < j \leqslant l$

$$\hat{a}_{r_j} = \begin{cases} d_{j,l}, & \text{если } d_{j-1} \neq 0 \\ a_{r_{j-1}} & \text{иначе.} \end{cases}$$

В таких обозначениях и с учетом ограничений предыдущей теоремы оказывается верна

Теорема 3.2.

$$\mathrm{I}_{\bar{s}}(\bar{a}; \bar{b}; \bar{d}\,|\bar{z}) \;=\; \mathrm{J}_{\bar{s}}(\bar{a}'; \bar{b}; \bar{c}'\,|\bar{z}),$$

◀ Снова переформулируем утверждение теоремы перед началом доказательства:

$$I = \int\limits_{[0,1]^{|\bar{s}|}} \frac{\prod\limits_{i=1}^{|\bar{s}|} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod\limits_{j=1}^{l} Q_j(\bar{z},\bar{x})^{d_j}}\, d\bar{x} \;=\; \frac{\Gamma(a_{r_l})}{\Gamma(d_l)} \cdot \prod_{j=1}^{l} \frac{\Gamma(b_{r_j}-a_{r_j})}{\Gamma(b_{r_j}-\hat{a}_{r_j})} \times$$

$$\times \int\limits_{[0,1]^{r_l}} \frac{\prod\limits_{j=1}^{l} \left(\prod\limits_{r_{j-1}<i<r_j} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1} \cdot x_{r_j}^{\hat{a}_{r_j}-1}(1-x_{r_j})^{b_{r_j}-\hat{a}_{r_j}-1} \right)}{\prod\limits_{j=1}^{l} \Big(1 - z_1 \ldots z_j\; x_1 \ldots x_{r_j}\Big)^{b_{r_j}-a_{r_j}}}\, d\bar{x}$$

Доказываем утверждение тоже индукцией по l, база $l = 0$ очевидна.

Пусть $l \geqslant 1$ и утверждение доказано для $l-1$, докажем его для l.

Преобразуя интеграл I совершенно так же, как и в ходе доказательства предыдущей теоремы, получаем что

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(d_l+k)}{\Gamma(d_l)k!}\; z_1^k \ldots z_l^k \int\limits_{[0,1]^{r_{l-1}}} \frac{\prod\limits_{i=1}^{r_{l-1}} x_i^{a_i+k-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{Q_1^{d_1} \ldots Q_{l-2}^{d_{l-2}}\; Q_{l-1}^{d_{l-1,l}+k}}\, dx_1 \ldots dx_{r_{l-1}} \times$$

$$\times \int\limits_{[0,1]^{s_l}} \prod_{r_{l-1}<i<r_l} x_i^{a_i+k-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}\; x_{r_l}^{b_{r_l}-a_{r_l}+k-1}(1-x_{r_l})^{a_{r_l}-1}\, dx_{r_{l-1}+1} \ldots dx_{r_l}.$$

К первому интегралу применим предположение индукции:

$$\int\limits_{[0,1]^{r_{l-1}}} \frac{\prod\limits_{i=1}^{r_{l-1}} x_i^{a_i+k-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{Q_1^{d_1}\dots Q_{l-2}^{d_{l-2}}\ Q_{l-1}^{d_{l-1,l}+k}}\,dx_1\dots dx_{r_{l-1}} = \frac{\Gamma(a_{r_{l-1}}+k)}{\Gamma(d_{l-1,l}+k)}\cdot\prod_{j=1}^{l-1}\frac{\Gamma(b_{r_j}-a_{r_j})}{\Gamma(b_{r_j}-\hat{a}_{r_j})}\times$$

$$\times\int\limits_{[0,1]^{r_{l-1}}} \frac{\prod\limits_{j=1}^{l-1}\left(\prod\limits_{r_{j-1}<i<r_j} x_i^{a_i+k-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}\cdot x_{r_j}^{\hat{a}_{r_j}+k-1}(1-x_{r_j})^{b_{r_j}-\hat{a}_{r_j}-1}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{l-1}\Big(1-z_1\dots z_j\ x_1\dots x_{r_j}\ \Big)^{b_{r_j}-a_{r_j}}}\,dx_1\dots dx_{r_{l-1}}.$$

Возьмем второй интеграл явно и получим следующее выражение для I, меняя местами гамма-множители и пользуясь равномерной сходимостью:

$$I=\frac{\Gamma(a_{r_l})}{\Gamma(d_l)}\cdot\prod_{j=1}^{l-1}\frac{\Gamma(b_{r_j}-a_{r_j})}{\Gamma(b_{r_j}-\hat{a}_{r_j})}\int\limits_{[0,1]^{r_{l-1}}}\frac{\prod\limits_{j=1}^{l-1}\left(\prod\limits_{r_{j-1}<i<r_j} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}\cdot x_{r_j}^{\hat{a}_{r_j}-1}(1-x_{r_j})^{b_{r_j}-\hat{a}_{r_j}-1}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{l-1}\Big(1-z_1\dots z_j\ x_1\dots x_{r_j}\ \Big)^{b_{r_j}-a_{r_j}}}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(b_{r_l}-a_{r_l}+k)}{\Gamma(b_{r_l}-a_{r_l})k!}\ \big(z_1\dots z_l\ x_1\dots x_{r_{l-1}}\big)^k\prod_{r_{l-1}<i<r_l}\frac{\Gamma(a_i+k)\Gamma(b_i-a_i)}{\Gamma(b_i+k)}\times$$

$$\times\,\Gamma(b_{r_l}-a_{r_l})\cdot\frac{\Gamma(a_{r_{l-1}}+k)\ \Gamma(d_l+k)}{\Gamma(b_{r_l}+k)\ \Gamma(d_{l-1,l}+k)}\,dx_1\dots dx_{r_{l-1}}.$$

Заметим, что если $d_{l-1}=0$, то $\hat{a}_{r_l}=a_{r_{l-1}}$ и $\dfrac{\Gamma(d_l+k)}{\Gamma(d_{l-1,l}+k)}=1$, а если $d_{l-1}\neq 0$, то $\hat{a}_{r_l}=d_l$ и в силу условий теоремы $a_{r_{l-1}}=d_{l-1,l}$, откуда $\dfrac{\Gamma(a_{r_{l-1}}+k)}{\Gamma(d_{l-1,l}+k)}=1$. То есть в любом случае будет выполняться

$$\Gamma(b_{r_l}-a_{r_l})\cdot\frac{\Gamma(a_{r_{l-1}}+k)\ \Gamma(d_l+k)}{\Gamma(b_{r_l}+k)\ \Gamma(d_{l-1,l}+k)}=\frac{\Gamma(b_{r_l}-a_{r_l})}{\Gamma(b_{r_l}-\hat{a}_{r_l})}\cdot\frac{\Gamma(\hat{a}_{r_l}+k)\Gamma(b_{r_l}-\hat{a}_{r_l})}{\Gamma(b_{r_l}+k)}.$$

Завершение доказательства этой теоремы аналогично предыдущей.

Теорема 3.2 доказана. ►

Эта теорема тоже обобщает теорему из работы [6], которая получается при $\bar{d}=(0,\dots,0,d_l)$ и $\bar{z}=(z,1,\dots,1)$, так как при $d_j=0$ никаких ограничений на параметры a_i не накладывается.

Аналогично предыдущему, из доказательства теоремы ясно, что координаты вектора $\bar{a}$ внутри групп, находящихся между $\hat{a}_{r_j}$ и $\hat{a}_{r_{j+1}}$, можно произвольным образом переставлять, например сдвинуть по циклу. То есть, если обозначить

$$\tilde{a}=(a_0,\dots,a_{r_1-1},\hat{a}_{r_2},a_{r_1+1},\dots,a_{r_{l-1}-1},\hat{a}_{r_l},a_{r_{l-1}},\dots,a_{r_l-1}),$$

то при соответствующих ограничениях будет справедливо равенство

$$\mathrm{I}_{\bar{s}}(\bar{a};\bar{b};\bar{d}\,|\bar{z}) \;=\; \mathrm{J}_{\bar{s}}(\tilde{a};\bar{b}\,';\bar{c}'\,|\bar{z}).$$

Определим теперь еще раз вектор

$$\bar{a}' = (a_0,\ldots,a_{r_1-1},\hat{a}_{r_1},a_{r_1+1},\ldots,a_{r_{l-1}},\hat{a}_{r_{l-1}},a_{r_{l-1}+1},\ldots,a_{r_l-1}),$$

где $\hat{a}_{r_j}$ для $1 \leqslant j < l$ определяется так:

$$\hat{a}_{r_j} = \begin{cases} a_{r_j}, & \text{если } d_j = 0 \\ d_{j+1,l},\ a_{r_j} & \text{если } d_j \neq 0 \text{ и } a_{r_j} \neq d_{j,l}, \end{cases}$$

а если $d_j \neq 0$ и $a_{r_j} = d_{j,l}$, то в качестве $\hat{a}_{r_j}$ можно брать как $d_{j+1,l}$, a_{r_j}, так и $d_{j+1,l}$. То есть иногда $\hat{a}_{r_j}$ заменяется на одну, а иногда на две координаты. В соответствии с этим новым вектором $\bar{a}'$ формируется вектор $\bar{s}'$. То есть если добавилась одна новая координата, то и s_j увеличивается на 1. Аналогичным образом формируется вектор $\bar{b}\,'$, то есть при добавлении новой координаты $d_{j+1,l}$ в вектор $\bar{a}$ в вектор $\bar{b}$ добавляется координата $d_{j,l}$. В этих обозначениях и соответствующих ограничениях оказывается справедливо следующее равенство, что немедленно следует из доказательств предыдущих теорем:

$$\mathrm{I}_{\bar{s}}(\bar{a};\bar{b};\bar{d}\,|\bar{z}) \;=\; \mathrm{J}_{\bar{s}'}(\bar{a}';\bar{b}\,';\bar{c}'\,|\bar{z}).$$

Результаты данной главы можно найти в [11].

4 Заключение

Основной целью данной работы было изложение как уже известных результатов, так и полученных автором впервые. Излагая чужие результаты, мы старались либо обобщить их, как это было в первой главе, либо упростить их, как это было во второй главе. Мы стремились сделать изложение максимально самостоятельным, прибегая к ссылкам на другие работы только там, где это необходимо.

Интегральные конструкции Бейкерса уже подвергались подробному изучению и обобщениям, однако полученные в утверждении 1.4 интегралы, как нам кажется, получены нами впервые. Сами по себе полученные интегралы пока не позволили получить новых результатов, однако мы надеемся, что их новый внешний вид поможет в будущем получить значимые результаты. Для полноты картины мы изложили классические результаты, косметически обобщив утверждение 1.1.

Доказательство Злобина приведено нами в максимально простом и понятном виде, без лишних для иррациональности $\zeta(3)$ обобщений. В доказательстве леммы 2.1 и утверждения 2.6 мы обошлись лишь простыми соображениями о рядах, не применяя никаких интегральных тождеств. Идейно это несущественные изменения в доказательстве, однако эти изменения требуют технической работы. Результаты второй главы были изложены автором на конференции "Математика и информатика", проходившей в марте 2016 г. в МПГУ.

Помимо технической проработки, доказательство Злобина излагалось нами еще и с целью подготовить почву для изложения теорем третьей главы. Эти теоремы получены автором впервые и опубликованы в [11]. Новых результатов с помощью этих теорем пока получить не удалось, однако мы надеемся, что эти тождества подтолкнут дальнейшие исследования в этом направлении. С помощью этих теорем можно получать соотношения на интегралы разной размерности, что может иметь интересный эффект. Данные вопросы, возможно, будут изучаться нами в дальнейшем.

Глобально задача, которую мы ставим перед собой, максимально амбициозна – попытаться получить значимые продвижения в вопросах иррациональности нечетных дзета-значений веса больше 3. Пока что эта задача остается не только нерешенной, но и очень сложной. Однако мы надеемся, что в дальнейшем нам удастся внести весомый вклад в решение данного вопроса.

Список литературы

[1] Воронин С. М., Карацуба А. А. *Дзета-функция Римана.*
Москва, Физматлит 1994.

[2] Василенко О. Н. *Некоторые формулы для значения дзета-функции Римана в целых точках.*
Тезисы докладов Республиканской научно-теоретической конференции
"Теория чисел и ее приложения"(Ташкент, 26-28 сент. 1990 г.)

[3] Васильев Д. В. *Некоторые формулы для дзета-функции Римана в целых точках.*
Вестник МГУ, **1**:1 (1996), 81 – 84

[4] Галочкин А. И., Нестеренко Ю. В., Шидловский А. Б. *Введение в теорию чисел.*
Москва, изд-во Моск. ун-та, 1984.

[5] Злобин С. А. *Интегралы, представляемые в виде линейных форм от обобщенных полилогарифмов.*
Матем. заметки, **71**:5 (2002), 782 – 787

[6] Злобин С. А. *О некоторых интегральных тождествах.*
УМН, **57**:3(345) (2002), 153 – 154

[7] Злобин С. А. *Разложения кратных интегралов в линейные формы.*
Матем. заметки, **77**:5 (2005), 683 – 706

[8] Зудилин В. В. *Алгебраические соотношения для кратных дзета-значений.*
УМН, **58**:1(349) (2003), 3 – 32

[9] Зудилин В. В. *Одно из чисел* $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ *иррационально.*
УМН, **56**:4(340) (2001), 149 – 150

[10] Нестеренко Ю. В. *Некоторые замечания о* $\zeta(3)$.
Матем. заметки, **59**:6 (1996), 865 – 880

[11] Подольский А. А. *Тождества для кратных интегралов.*
Матем. заметки, **98**:4 (2015), 557 – 564

[12] Прасолов В. В. *Многочлены.*
МЦНМО. 2001.

[13] Сорокин В. Н. *Теорема Апери.*
Вестник МГУ, **1**:3 (1998), 48 – 52

[14] Уланский Е. А. *Об одном тождестве для обобщения гипергеометрического интеграла.*
Матем. заметки, **79**:5 (2006), 796 – 799

[15] Уланский Е. А. *Тождества для обобщенных полилогарифмов.*
Матем. заметки, **73**:4 (2003), 613 – 624

[16] Apéry R. *Irrationalité de* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$.
Astérisque., **61** (1979), 11 – 13

[17] Beukers F. *A note on the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$.
Bull. London Math. Soc., **11** (1979), 268 – 272

[18] Hadjicostas P. *Some generalizations of Beukers integrals.*
Kyungpook Math. J., **42** (2002), 399 – 416

[19] Minh H. N., Petitot M. *Lyndon words, polylogarithms and Riemann's* ζ *function.*
Discrete Math., **217**:1 (2000), 273 – 292

[20] Rivoal T. *La fonction Zeta de Riemann prend une infinite de valeurs irrationnelles aux entiers impairs.*
C. R. Acad. Sci. Paris S´er. I Math., **331**:4 (2000), 267 – 270