ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

Об одном алгоритме перебора точек решётки

Выполнила студентка
605 группы:
Щемелева Анна Михайловна

____
подпись студента

Научный руководитель:
Чл.-корр.РАН
Нестеренко Юрий Валентинович

____
подпись научного руководителя

Москва
2019

Содержание

1 Введение

Задача поиска эффективных способов разложения целых чисел на множители интересовала математиков с давних времён, особенно специалистов в области теории чисел. В настоящее время самыми эффективными алгоритмами факторизации являются вариации решета числового поля.

Во второй части работы рассматривается алгоритм построения базиса точек решётки на плоскости с помощью цепных дробей. А затем доказывается лемма про эффективный алгоритм перебора точек решётки (просеивания) на плоскости. В данной работе мы попытались обобщить этот подход на трёхмерный случай.

В третьей части работы был рассмотрен метод Г.Минковского построения цепочки экстремальных параллелепипедов, подобный алгоритму цепных дробей в двумерном случае. К сожалению, из-за нехватки времени, не удалось доказать утверждения подобные Леммам 1 и 2 второй части, необходимые для построения алгоритма решета числового поля в трёхмерном пространстве.

2 Построение базиса двумерной решётки и перебор точек этой решётки

В этой части будут обсуждаться некоторые идеи, которые были изложены в статье [4].

Лемма 1. *Пусть $\rho \subset \mathbb{Z}^2$ - решетка с определителем p и $(\mathbb{Z} \times \{0\}) \cap \rho = p\mathbb{Z}$. Пусть также имеется число $I \le p$. Тогда существует единственный базис $\{(\alpha, \beta), (\gamma, \delta)\}$ решетки ρ с условиями*

- $\beta > 0,\ \delta > 0;$
- $-I < \alpha \le 0 \le \gamma < I;$
- $\gamma - \alpha \ge I.$

При этом, если $(i, j) \in \rho$ и $-I < i < I,\ j \ge 0$, то $(i, j) = m(\alpha, \beta) + n(\gamma, \delta)$, причем $m \ge 0$ и $n \ge 0$.

Доказательство. Из условий леммы следует, что существует число r такое, что $0 \le r < p$ и

$$\rho = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid i \equiv rj \ mod\ p\}.$$

Определим число $\alpha = \frac{r}{p}$ и разложим его в цепную дробь $\alpha = [0, a_1, a_2, .., a_m]$. Рассмотрим подходящие дроби $\frac{p_k}{q_k} = [0, a_1, a_2, .., a_k]$. Пусть a_k есть целая часть числа $|i_{k-1}/i_k|$, где $i_k = (p_k - q_k\alpha)p$. Для p_k и q_k верны следующие рекуррентные соотношения ([3] стр.216)

$$p_{k+1} = a_k p_k + p_{k-1},\ p_{-1} = 1,\ p_0 = 0;$$

$$q_{k+1} = a_k q_k + q_{k-1},\ q_{-1} = 0,\ q_0 = 1.$$

$$i_{k+1} - a_k i_k = (p_{k+1} - q_{k+1}\alpha)p - a_k(p_k - q_k\alpha)p =$$

$$= p((p_{k+1} - a_k p_k) - (q_{k+1} - a_k q_k))\alpha = p(p_{k-1} - \alpha q_{k-1}) = i_{k-1}.$$

Последовательность строится до тех пор, пока не будет выполнено $|i_k| = 1$.

$$|i_m| = \left|\alpha - \frac{p_m}{q_m}\right| = 0;$$

$$|i_{m-1}| = \left|\frac{p_m}{q_m} - \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}\right| \cdot pq_{m-1} = |p_m q_{m-1} - p_{m-1}p| = 1$$

Очевидно, что при $k > 0$ будет $j_k > 0$.

$$\alpha - \frac{p_k}{q_k} = \frac{r}{p} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{rq_k - p_k p}{pq_k} = \frac{rj_k - pp_k}{pj_k} = \frac{i_k}{pj_k} = (-1)^k \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right|$$

следует что i_k образуют знакопеременную последовательность. Покажем, что неотрицательные целые числа $(-1)^{k+1} i_k$ образуют строго убывающую последовательность:

$$\frac{|i_k|}{p} = |q_k\alpha - p_k|$$

правая часть этого равенства убывает ([3] стр.221), следовательно левая часть тоже убывает, но при постоянном p это значит что убывает последовательность $|i_k|$. Из этого следует, что найдется $k > 0$ такое, что $|i_k| < I$, но $|i_{k-1}| \geq I$. Пусть a - наименьшее целое число с условием $|i_{k-1}| - a|i_k| < I$. Из предыдущих оценок видно, что $a \geq 0$. Теперь при четном k положим $(\alpha, \beta) = (i_{k-1}, j_{k-1}) + a(i_k, j_k)$ и $(\gamma, \delta) = (i_k, j_k)$, а при нечетном k положим $(\alpha, \beta) = (i_k, j_k)$ и $(\gamma, \delta) = (i_{k-1}, j_{k-1}) + a(i_k, j_k)$. Проверим три необходимых условия для четного k:

- $\beta = j_{k-1} + aj_k > 0$ и $\delta = j_k > 0$
- $\alpha = i_{k-1} + ai_k = -|i_{k-1}| + a|i_k| = -(|i_{k-1}| - a|i_k|) > -I$ $\alpha = i_{k-1} + ai_k = i_{k+1} - (a_k - a)i_k < i_{k+1} \leq 0$
  $\gamma = i_k, \quad 0 \leq i_k < I$
- $\gamma - \alpha = i_k - i_{k-1} - ai_k = -i_{k-1} - (a-1)i_k = |i_{k-1}| - (a-1)|i_k| \geq I$

При нечетном k выполнение трех неободимых условий доказывается аналогично случаю с четным k. Также $\{(\alpha, \beta), (\gamma, \delta)\}$ образуют базис решетки ρ.
Пусть теперь пара $(i, j) \neq (0, 0)$ удовлетворяет условиям последнего утверждения леммы, и $(i, j) = m(\alpha, \beta) + n(\gamma, \delta)$. Ясно, что m и n не равны нулю одновременно. Оба эти числа не могут быть неположительными, так как в этом случае $j < 0$, что противоречит выбору (i, j). Если же m и n - ненулевые числа разных знаков, то

$$|i| = |m\alpha + n\gamma| = |n|\gamma - |m|\alpha \leq |\alpha| + |\gamma| = \gamma - \alpha \leq I,$$

что также противоречит выбору (i, j). Из этого следует, что и m, и n являются неотрицательными числами. Последнее утверждение леммы доказано. Из него теперь следует, что среди всех пар $(i, j) \in \rho$ с условиями $-I < i \leq 0, j \geq 0$ пара (α, β) имеет наименьшее j, а среди всех пар $(i, j) \in \rho$ с условиями $0 \leq i < I, j \geq 0$ наименьшее j имеет пара (γ, δ). Это доказывает единственность базиса $\{(\alpha, \beta), (\gamma, \delta)\}$. Лемма доказана. ∎

Лемма 2. *Пусть $\rho, I, (\alpha, \beta)$ и (γ, δ) те же, что и предыдущей лемме. Пусть $A \in \mathbb{N}$ и*

$$\bar{A} = \mathbb{Z}^2 \cap ([A, A + I - 1] \times \mathbb{Z}).$$

Пусть $(i, j) \in \bar{A} \cap \rho$. Если $(i', j') \in \bar{A} \cap \rho$, и j' наименьшее возможное с условием $j' > j$, то

$$(i', j') = (i, j) + \begin{cases} (\alpha, \beta) & \text{при } i \geq A - \alpha, \\ (\gamma, \delta) & \text{при } i < A + I - \gamma, \\ (\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) & \text{при} A + I - \gamma \leq i < A - \alpha. \end{cases}$$

Доказательство. Из предыдущей леммы следует, что возможен лишь один из трех перечисленных случаев. Кроме того, правая часть равенства всегда является элементом $\bar{A} \cap \rho$. Обозначим этот элемент $(\widetilde{i}, \widetilde{j})$. Очевидно, $\widetilde{j} > j$. Пусть $(\bar{i}, \bar{j})-$ произвольный элемент $\bar{A} \cap \rho$ с условием $\bar{j} > j$. По предыдущей лемме

$$(\bar{i}, \bar{j}) = (i, j) + m(\alpha, \beta) + n(\gamma, \delta),$$

где $m \geq 0, n \geq 0$ и $m + n > 0$ (числа m, n не могут быть одновременно отрицательными, ведь $\bar{j} > j$, не могут они быть и ненулевыми разных знаков, так как тогда $|m\alpha + n\gamma| \geq I$, что невозможно при $(\bar{i}, \bar{j}) \in \bar{A}$. Если для i имеет место первый или третий случай, то обязательно $m > 0$, так как при $m = 0, n > 0$ будет $\bar{i} \geq A + I$. Если же для i имеет место второй или третий случай, то обязательно $n > 0$, так как при $m > 0, n = 0$ будет $\bar{i} < A$. Таким образом, в любом из трех случаев будет выполнено $\bar{j} \geq \widetilde{j}$. Это доказывает, что определенная в формулировке леммы пара (i', j') равна паре $(\widetilde{i}, \widetilde{j})$. Лемма доказана. ∎

3 Алгоритм Г.Минковского

Пусть $\xi = \xi_1 x + \xi_2 y + \xi_3 z,\ \eta = \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 z,\ \zeta = \zeta_1 x + \zeta_2 y + \zeta_3 z$ три независимые линейные формы с вещественными коэффициентами и положительным определителем Δ. Неравенства $|\xi| \leqslant \rho,\ |\eta| \leqslant \sigma,\ |\zeta| \leqslant \tau$ определяют параллелепипед, симметричный относительно начала координат в трехмерном пространстве. Этот параллелепипед обозначим $\{\rho,\ \sigma,\ \tau\}$. Предположим, что $\{\rho,\ \sigma,\ \tau\}$ не имеет внутри себя целых точек решетки, за исключением начала координат, но имеет по крайней мере одну точку решетки на каждой из шести граней. Г.Минковский называл параллелепипед с такими свойствами экстремальным. Очевидно, что $\{\rho,\ \sigma,\ \tau\}$ является экстремальным тогда и только тогда, когда его внутренность не содержит точек решетки, отличной от начала координат и ни один из его определяющих параметров $\rho,\ \sigma,\ \tau$ не может быть увеличен без введения точки решетки внутрь параллелепипеда.

Теорема 1. *Пусть $\xi,\ \eta,\ \zeta$ — три независимые линейные формы с вещественными коэффициентами, положительным определителем и со свойством, что ни одна из $\xi,\ \eta,\ \zeta$ не обращается в ноль для любой точки, отличной от начала координат. Если $\{a,\ g,\ l\}$ экстремальный параллелепипед для $\xi,\ \eta,\ \zeta$, тогда $agl < \Delta$. На каждой грани $\{a,\ g,\ l\}$ есть только одна точка решетки, причем точки на противоположных гранях имеют одинаковые координаты с противоположными знаками. Всегда можно выбрать одним и только одним способом три точки решетки $(r_i,\ s_i,\ t_i)$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ в соответствующих плоскостях $\xi = e_1 a,\ \eta = e_2 g,\ \zeta = e_3 l,\ (e_i = \pm 1)$ так, что $e_1 e_2 e_3 = 1$ и так, что если матрица P определена*

$$P = \begin{Vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{Vmatrix}$$

тогда

$$\begin{Vmatrix} e_1\xi_1 & e_1\xi_2 & e_1\xi_3 \\ e_2\eta_1 & e_2\eta_2 & e_3\eta_3 \\ e_3\zeta_1 & e_3\zeta_2 & e_3\zeta_3 \end{Vmatrix} P = \begin{Vmatrix} a & \pm b & \pm c \\ \pm f & g & \pm h \\ \pm j & \pm k & l \end{Vmatrix} = \Phi,$$

гда $a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h,\ j,\ k,\ l$ положительные и матрица Φ имеет одну из следующих шести систему знаков:

I			*II*			*III*			*IV*			*V*			*VI*		
+	+	+	+	−	−	+	−	−	+	+	−	+	−	+	+	−	−
−	+	−	+	+	+	−	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	−
−	−	+	−	−	+	+	+	+	+	−	+	−	+	+	−	−	+

Кроме того, определитель матрицы P равен 1 в случаях I-V и определитель P равен 0 в случае VI. Для каждого случая верны следующие неравенства: $a > b,\ a > c,\ g > f,\ g > h,\ l > j,\ l > k$. А в отдельных случаях выполняются следующие дополнительные условия:

I	*II*	*III*
$b+c>a$ $f>h$ *или* $j>k$	$f+h>g$ $k>j$ *или* $b>c$	$j+k>l$ $c>b$ *или* $h>f$

IV	*V*	*VI*
$b>c$ *или* $h>f$ *или* $j>k$	$c>b$ *или* $f>h$ *или* $k>j$	$b+c=a,\ f+h=g,\ j+k=l;$

Доказательство данной Теоремы изложено в [1], а также в Приложении к данной работе.

Опеределение 1. *Если $\{\rho,\ \sigma,\ \tau\}-$ произвольный экстремальный параллелепипед для $\xi,\ \eta$ и ζ, то точки решетки на $\eta-$ и $\zeta-$ гранях, должны лежать в разных плоскостях $\xi = const$ и никто из них не должен лежать в плоскости $\xi = 0$. Будем опускать $\xi-$грань пока она не коснется первой пары точек решетки в $\eta-$ или $\zeta-$гранях. Если эти точки решетки в $\eta-$гранях, то поднимем $\eta-$грань так, чтобы параллелепипед оставался все еще свободным. С другой стороны, если эти точки находятся в $\zeta-$гранях, тогда вместо этого могут быть подняты $\zeta-$грани. Поднимем возможную пару граней, пока параллелепипед не станет экстремальным. Новый экстремальный параллелепипед, однозначно определенный таким образом, будет называться $\xi-$соседом для $\{\rho,\ \sigma,\ \tau\}$. Аналогичные определения для $\eta-$ и $\zeta-$соседей для $\{\rho,\ \sigma,\ \tau\}$. Будет видно, что ограничения на ξ, η и ζ требуют, чтобы количество экстремальных параллелепипедов было бесконечно, если существование одного параллелепипеда будет установлено. Для каждого параллелепипеда, без исключения, будет три соседа; последовательность, полученная последовательными $\xi-$соседями, начиная с произвольного экстремального параллелепипеда, представляет собой последовательность, в которой нет двух одинаковых элементов, поскольку первый параметр меньше в каждом элементе, чем в предыдущем. Совокупность таких параллелепипедов, принадлежащих $\xi,\ \eta$ и ζ, называется цепочкой экстремальных параллелепипедов для $\xi,\ \eta$ и ζ.*

Необходимо найти все параллелепипеды в цепи для $\xi,\ \eta,\ \zeta$ принимая за начало произвольный экстремальный параллелепипед, для которого P имеет определитель равный $+1$.

Теорема 2. *Если начинать с произвольного экстремального параллелепипеда для $\xi,\ \eta$ и ζ, то он обеспечит совокупность всех существующих экстремальных параллелепипедов последовательным образованием все возможных соседей.*

Очевидным следствием этой теоремы является то, что переход от одного произвольного экстремального параллелепипеда к другому, может осуществляться конечным числом переходов от соседа к соседу.

Теорема 3. *При подходящем переименовании осей и линейных форм, нужный $\xi-$, $\eta-$, или $\zeta-$ сосед становится $\xi'-$ соседом и таким образом, что матрица Φ' всегда нормальная матрица типа I, II,..., или VI в которой выполняется неравенство $b' > c'$:*

Условие	*Преобразование*	*Тип матрицы* Φ' *для соответствующего типа матрицы* Φ					
		I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*
ξ*-сосед,* $c>b$	$\xi=\xi',\ \eta=\zeta',\ \zeta=\eta'$ $x_1=x_1',\ x_2=x_3',\ x_3=x_2'$	*I*	*III*	*II*	*V*	*IV*	*VI*
η*-сосед,* $f>h$	$\xi=\eta',\ \eta=\xi',\ \zeta=\zeta'$ $x_1=x_2',\ x_2=x_1',\ x_3=x_3'$	*II*	*I*	*III*	*V*	*IV*	*VI*
η*-сосед,* $h>f$	$\xi=\zeta',\ \eta=\xi',\ \zeta=\eta'$ $x_1=x_3',\ x_2=x_1',\ x_3=x_2'$	*III*	*I*	*II*	*IV*	*V*	*VI*
ζ*-сосед,* $j>k$	$\xi=\eta',\ \eta=\zeta',\ \zeta=\xi'$ $x_1=x_2',\ x_2=x_3',\ x_3=x_1'$	*II*	*III*	*I*	*IV*	*V*	*VI*
ζ*-сосед,* $k>j$	$\xi=\zeta',\ \eta=\eta',\ \zeta=\xi'$ $x_1=x_3',\ x_2=x_2',\ x_3=x_1'$	*III*	*II*	*I*	*V*	*IV*	*VI*

В цепочке параллелепипедов для ξ, η и ζ, те параллелепипеды, для которых матрица P имеет определитель $D=1$, будут называться параллелепипедами первого рода. Параллелепипеды, для которых $D=0$ будут называться параллелепипедами второго рода.

Теорема 4. *Соседями параллелепипедов второго рода являются параллелепипеды первого рода.*

Доказательство. Переименуем оси и линейные формы как указано в таблице, так, чтобы рассматриваемый сосед стал $\xi'-$ соседом с $b'>c'$. Тогда матрица Φ будет типа VI, как и матрица Φ'. Из Теорем 2 и 3 следует, что $a'>b',\ a'>c',\ g'>f',\ g'>h',\ l'>j',\ l'>k'$; $b'+c'=a',\ f'+h'=g',\ j'+k'=l'$. Если p_1',p_2',p_3' — три точки решетки P', в порядке их появления в столбцах P', тогда $\xi'-$сосед имеет на своей поверхности четыре точки решетки $p_2',p_3',-p_2',-p_3'$, и, кроме того, две другие точки решетки которые будут называться $\bar{p_2}'$ и $-\bar{p_2}'$. (Здесь используется индекс 2, потому что координаты $\bar{p_2}'$ находятся во втором столбце матрицы $\bar{P}'$.) Так как $b'>c'$, координаты p_2' или $-p_2'$ будут занимать первый столбец в матрице $\bar{P}'$, и координаты p_3' или $-p_3'$ третий столбец.
В предположении, что сосед — параллелепипед второго рода, матрица Φ' для этого соседа будет следующей:

$$\Phi'=\begin{Vmatrix} b', & -\bar{b}', & -c' \\ -g', & \bar{g}', & -h' \\ -k', & -\bar{k}', & l' \end{Vmatrix},$$

■ Где $b'=\bar{b}'+c',\ g'=\bar{g}'+h',\ l'=k'+\bar{k}'$. Но выше было установлено, что $l'=k'+j'$, следовательно, $\bar{k}'=j'$. Поскольку существует только одна точка решетки p_1' или $-p_1'$ для которой $\zeta=j'$, имеем $\bar{p_2}'=\pm p_1'$; это дает, что $a'=\bar{b}'=b'-c'$. Но это невозможно, потому что $b'>c'>0$ и $a'>b'$.

Чтобы закрепить $\xi-$ соседа когда $b>c$, будем опускать $\xi-$ грань к точкам решетки на гранях $\eta=\pm g$ и затем поднимать $\eta-$ грани до первой пары точек решетки ни в $\xi-$, ни в $\zeta-$ гранях; первый параметр уменьшен, второй увеличен, третий остается без изменений. Для получившегося $\xi-$ соседа $\{a_1,g_1,l_1\}$ из параллелепипеда $\{a,g,l\}$ верны следующие неравенства: $a_1=b<a,\ g_1>g$, и $l_1=l$. Так как существует не более одной точки решетки в каждой из плоскостей $\xi=const,\ \eta=const$, из этого следует, что две из

точек решетки будут иметь следующие координаты в матрице $\bar{P}'$: $\bar{p_1} = d_1 p_2,\ p_3 = d_3 p_3$, где $d_1 = \pm 1,\ d_3 = \pm 1$.
Если $\{a,\ g,\ l\}$ параллелепипед первого рода, тогда P целочисленная матрица с определителем равным 1. Тогда обратная матрица P^{-1} существует и имеет целые элементы и определитель P^{-1} равен 1. Зададим $T = P^{-1}\bar{P}$. Будучи произведением двух матриц, элементы которых — целые числа, T сама является матрицей с целыми элементами. Более того, определитель T равен определителю $\bar{P}$. Если обозначить как $q_i^{(j)}$ - обратный элемент к $p_i^{(j)}$ в P, имеем $||q_i^{(j)}|| \cdot ||p_i^{(j)}|| = ||t_i^{(j)}||$. Из соотношений $\bar{p_i}^{(1)} = d_1 p_i^{(2)},\ \bar{p_i}^{(3)} = d_3 p_i^{(3)}$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ следует, что

$$T = \begin{Vmatrix} 0, & \sum\limits_{k=1}^{3} q_k^{(1)} \bar{p_k}^{(2)}, & 0 \\ d_1, & \sum\limits_{k=1}^{3} q_k^{(2)} \bar{p_k}^{(2)}, & 0 \\ 0, & \sum\limits_{k=1}^{3} q_k^{(3)} \bar{p_k}^{(2)}, & d_3 \end{Vmatrix}.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{3} q_k^{(1)} \bar{p_k}^{(2)} = \begin{cases} -d_1 d_3 = \pm 1 \\ 0 \end{cases}$$

согласно тому, первого или второго рода параллелепипед $\{a_1,\ g_1,\ l_1\}$. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{3} q_k^{(1)} \bar{p_k}^{(2)} = \kappa d_2,\ \sum\limits_{k=1}^{3} q_k^{(2)} \bar{p_k}^{(2)} = m d_2,\ \sum\limits_{k=1}^{3} q_k^{(3)} \bar{p_k}^{(2)} = n d_2$, где $d_2 = -d_1 d_3$ и где $\kappa = 1$ или 0 согласно тому, какого рода параллелепипед $\{a_1,\ g_1,\ l_1\}$. Тогда

$$\bar{P} = PT = \begin{Vmatrix} d_1 p_1^{(2)}, & d_2(\kappa p_1^{(1)} + m p_1^{(2)} + n p_1^{(3)}), & d_3 p_1^{(3)} \\ d_1 p_2^{(2)}, & d_2(\kappa p_2^{(1)} + m p_2^{(2)} + n p_2^{(3)}), & d_3 p_2^{(3)} \\ d_1 p_3^{(2)}, & d_2(\kappa p_3^{(1)} + m p_3^{(2)} + n p_3^{(3)}), & d_3 p_3^{(3)} \end{Vmatrix}.$$

Целые числа $\kappa,\ m$ и n не все равны 0, так как в этом случае $\bar{p_2}$ будет началом координат, что невозможно. Тогда

$$\bar{p_2} = d_2(\kappa p_1 + m p_2 + n p_3)$$

и

$$\xi(\bar{p_2}) = e_1 d_2(\kappa a \pm mb \pm nc),$$

$$\eta(\bar{p_2}) = e_2 d_2(\pm \kappa f + mg \pm nh),$$

$$\zeta(\bar{p_2}) = e_3 d_2(\pm \kappa j \pm mk + nl),$$

где система знаков это система нормальных знаков в Φ.
Благодаря Теореме 1, из отношений $a_1 = b,\ g_1 < g,\ l_1 = l$ выводится условие $g_1 < \frac{\triangle}{bl}$.
Точка решетки $\bar{p_2}$ должна быть найдена среди точек решетки следующего вида: $p = \kappa p_1 + m p_2 + n p_3$, $(\kappa = \pm 1$ или $0;\ m, n$ — целые числа; $|\kappa| + |m| + |n| \geqslant 1)$, которые удовлетворяют

$$|\xi| < b, \quad |\eta| < \frac{\triangle}{bl}, \quad |\zeta| < l,$$

и, в частности, $\pm\bar{p_2}$ будут двумя такими точками, которые делают $|\eta|$ минимальным. Тогда ясно, что если неравенства одновременно могут быть решены для конечного числа решений, которыми они обладают, тогда $\bar{p_2}$ может быть определена за исключением знака. Знак можно определить позже так, чтобы матрица $\bar{\Phi}$ была нормальной матрицей.
Матрица T для нормальной матрицы Φ различных типов I - V приведена ниже; выкладки будут сделаны после этого.

3.1 Алгоритм для $\xi-$ соседа $(b > c)$

I:

1. j>k,

$$T= \begin{Vmatrix} 0, & -1, & 0 \\ 1, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{Vmatrix}, \quad +, \quad +, \quad +; \quad \text{V}.$$

2. j<k,

$$T= \begin{Vmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 1, & -1, & 0 \\ 0, & -1, & -1 \end{Vmatrix}, \quad +, \quad -, \quad -; \quad \text{III}.$$

Римская цифра обозначает нормальную систему для $\bar{\Phi}$; три знака являются знаками произведения $\bar{e}_i e_i$ $(i = 1, 2, 3)$, где e_i выбраны для матрицы Φ в Теореме 1, а $\bar{e}_i$ для $\bar{\Phi}$.
II и V:

Верхний знак для случая II; нижний знак для случая V.

$$M \equiv \left[\frac{G}{F}\right], \quad N \equiv \left[\frac{\pm H}{F}\right], \quad u \equiv a - Mb - Nc, \quad v \equiv \pm j + Mk - Nl.$$

Здесь F, G и H являются знаковыми минорами для f, g и $\pm h$ в Φ. Квадратные скобки обозначают наибольшее целое число.

	m	n	δ
1) u<c, v>k	M-1	N+1	+1
2) u<b-c, v<0	M	N-1	-1
3) u<b, v>0, но не 1)	M	N	-1
4)u<b, v<0, но не 2)	M	N	+1
5) u>b, v>0	M	N+1	+1
6) u>b, v<0	M+1	N	-1

$$T = \begin{Vmatrix} 0, & \mp\delta, & 0 \\ \pm\delta, & \mp\delta m, & 0 \\ 0, & -\delta n, & 1 \end{Vmatrix}, \quad \mp\delta, \quad \mp\delta, \quad +1; \quad \delta = +1, \quad I; \quad \delta = -1, \quad IV.$$

III:

1. a+c<2b

   $$T=\begin{Vmatrix}0, & 1, & 0\\ 1, & 1, & 0\\ 0, & -1, & -1\end{Vmatrix}, \quad -, \quad +, \quad -; \quad \text{II.}$$

2. a+c>2b

   $$T=\begin{Vmatrix}0, & 0, & 0\\ -1, & 1, & 0\\ 0, & -1, & 1\end{Vmatrix}, \quad +, \quad +, \quad +; \quad \text{VI.}$$

IV:

1. a<2b, f<h, j+k<l

   $$T=\begin{Vmatrix}0, & -1, & 0\\ 1, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{Vmatrix}, \quad +, \quad +, \quad +; \quad \text{II.}$$

2. a>2b или f>h или j+k>l

   $$T=\begin{Vmatrix}0, & 0, & 0\\ -1, & 1, & 0\\ 0, & 1, & -1\end{Vmatrix}, \quad -, \quad +, \quad -; \quad \text{VI.}$$

3.2 Алгоритм построения $\xi-$ соседа для $\xi-$ соседа в случаях III 2), IV, 2)

Верхний знак для случая III 2), нижний для IV, 2).

1. $b-c>c:$

$$M\equiv\left[\frac{\pm G}{F}\right], \quad N\equiv\left[\frac{\pm G+H}{F}\right];$$

$$u^\circ=b-c, \quad u'=c; \quad v^\circ=l, \quad v'=l-k;$$

$$u\equiv a-Mu^\circ-Nu', \quad v\equiv -j+Mv'-Nv^\circ$$

	m	n	δ
1) u<u', v>v'	M-1	N+1	+1
2) u<u', v'>v>0	M	N+1	-1
3) u>u', v>0	M	N+1	+1
4)u<u° $v<0$	M	N	+1
5) u>u°, $v<0$	M+1	N+1	-1

$$T=\begin{Vmatrix}0, & \mp\delta, & 0\\ -1, & -\delta m, & 0\\ \pm 1, & \pm\delta(m-n), & \mp\delta\end{Vmatrix}, \quad \pm 1, \quad -\delta, \quad \mp\delta; \quad \delta=+1, \quad V; \quad \delta=-1, \quad III.$$

2. $b-c<c:$

$$M \equiv \left[\frac{\pm K+L}{J}\right], \quad N \equiv \left[\frac{\pm K}{J}\right];$$

$$u^\circ = c, \quad u' = b-c; \quad v^\circ = g+h, \quad v' = h;$$

$$u \equiv a - Mu^\circ - Nu', \quad v \equiv -f + Mv' - Nv^\circ$$

$$T = \left\| \begin{matrix} 0, & 0, & \mp\delta \\ 0, & -\delta, & -\delta n \\ \mp 1, & \pm\delta, & \mp\delta(m-n) \end{matrix} \right\|, \quad \pm 1, \quad -\delta, \quad \mp\delta; \quad \delta=+1, \quad IV; \quad \delta=-1, \quad II.$$

Вывод: Когда $b>c$, $\eta-$сосед это $\xi-$сосед $\{a,g,l\}$.

3.3 Алгоритм построения $\zeta-$ соседа для $\xi-$соседа в случаях III 2), IV, 2)

1. $k<l-k:$

$$M \equiv \left[\frac{-H}{F}\right], \quad N \equiv \left[\frac{\mp G - H}{F}\right];$$

$$u^\circ = l-k, \quad u' = k; \quad v^\circ = b, \quad v' = b-c;$$

$$u \equiv j - Mu^\circ - Nu', \quad v \equiv -a + Mv' - Nv^\circ$$

$$T = \left\| \begin{matrix} 0, & \mp\delta, & 0 \\ \delta, & -\delta(m-n), & -1 \\ 0, & \pm\delta m, & \pm 1 \end{matrix} \right\|, \quad \mp\delta, \quad -\delta, \quad \pm 1; \quad \delta=+1, \quad IV; \quad \delta=-1, \quad I.$$

2. $k>l-k:$

   В случае III:

$$T = \left\| \begin{matrix} -1, & 0, & 0 \\ -1, & -1, & 1 \\ 1, & 1, & 0 \end{matrix} \right\|, \quad -, \quad -, \quad +; \quad V.$$

   В случае IV:

   (a) $j>k:$

$$T = \left\| \begin{matrix} -1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 0 \end{matrix} \right\|, \quad -, \quad +, \quad -; \quad II.$$

   (b) $j<k:$

$$T = \left\| \begin{matrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 1 \\ 0, & -1, & 0 \end{matrix} \right\|, \quad +, \quad -, \quad -; \quad V.$$

Выкладки берутся последовательно, как указано римскими цифрами ниже.

I.

Соотношения которым удовлетворяют целые числа $\kappa, m,$ и $n:$

(1) $|\kappa a + mb + nc| < b,$

(2) $|-\kappa j - mk + nl| < l,\ (|\kappa| + |m| + |n| \geqslant 1, \kappa = \pm 1$ или $0)$.

(3) $|-\kappa f + mg - nh| = min.$

Из Теоремы 1 вытекают дополнительные условия $a > b > 0,\ a > c > 0;\ g > f > 0,\ g > h > 0;\ l > j > 0,\ l > k > 0;\ b + c > a$; и $f > h$ или $j > k$. Кроме того, сделаем предположение, что $b > c$.

Перепишем (1), (2), и (3) следующим образом:

$(1')$ $U \equiv \kappa a + mb + nc = \lambda_1 b,$

$(2')$ $V \equiv -\kappa j - mk + nl = \lambda_2 l,$

$(3')$ $W \equiv -\kappa f + mg - nh$ имеет минимальное абсолютное значение.

где $|\lambda_i| < 1,\ \lambda_i \neq 0$.

Поскольку $\kappa = \pm 1$ или 0 для всех решений которые мы рассматриваем, решения для $(1')$ и $(2')$ для m и n в терминах $\kappa,\ a,\ b,\ c$ и т.д. выглядят следующим образом:

$$m = \kappa \frac{al + cj}{-(bl + ck)} + \frac{\lambda_1 bl - \lambda_2 cl}{bl + ck} = \kappa \frac{G}{F} + \nu_1,$$

$$n = \kappa \frac{ak - bj}{-(bl + ck)} + \frac{\lambda_2 bl - \lambda_1 bk}{bl + ck} = \kappa \frac{H}{F} + \nu_2,$$

где $F,\ G$ и H являются знаковыми минорами для $-f,\ g$ и $-h$ в Φ, и ν_1, и ν_2 являются вышеуказанными выражениями, включающие λ_1 и λ_2. Сразу видно, из условий на $b,\ l,\ c,\ k,\ \lambda_1$ и λ_2, что $|\nu_i| < 2$ $(i = 1, 2)$.

Если $\kappa = 0$, тогда $m = \nu_1,\ n = \nu_2$ и так как $m,\ n$ — целые числа, имеем $|m| \leqslant 1,\ |n| \leqslant 1$. Среди m и n удовлетворяющих этим условиям, $m = 0,\ n = 0$ — единственная пара значений, которая удовлетворяет (1) и (2). Но это сделало бы $\bar{p_2}$ началом координат, что невозможно, так как $\bar{p_2}$ является точкой на поверхности экстремального параллелепипеда. Следовательно $\kappa = \pm 1$. В терминологии, введенной выше, можно сформулировать этот результат следующим образом:

Вывод: Если $b > c$ и если Φ является нормальной матрицей типа I, тогда $\xi-$сосед $\{a, g, l\}$ всегда первого рода.

Если $\kappa = 1$. Из Теоремы 1 мы знаем, что $b + c > a$, следовательно

$$-3 < \frac{G}{F} < 0, \quad -1 < \frac{H}{F} < 1.$$

Использовав эти оценки в сочетании с оценками для ν_1 и ν_2 и тот факт, что $m,\ n$ — целые числа, получаем

$$-4 \leqslant m \leqslant 1, \quad -2 \leqslant n \leqslant 2.$$

Подстановка этих значений в (1) и (2) показывает, что возможны только следующие варианты решений:

(i)	m=-3,	n=1,	|W|=f+3g+h;
(ii)	m=-2,	n=0,	|W|=f+2g;
(iii)	m=-2,	n=1,	|W|=f+2g+h;
(iv)	m=-1,	n=-1,	|W|=f+g-h;
(v)	m=-1,	n=0,	|W|=f+g;
(vi)	m=-1,	n=1,	|W|=f+g+h;

каждое из которых может быть решением при определенных ограничениях на a, b, c и т.п.
Наименьшее значение $|W|$ имеет в случае (iv), но (iv) удовлетворяет (2) только в том случае, если $j < k$, (1) удовлетворяется (iv) всегда. Таким образом, когда $j < k$, то $m = -1,\ n = -1$ удовлетворяют (1), (2) и (3).
Следующее наименьшее значение $|W|$ встречается для (v), и (v) всегда удовлетворяет как (1), так и (2). Следовательно, если $j > k$, то $m = -1,\ n = 0$ удовлетворяют (1), (2) и (3).
Если взять $\kappa = -1$ это просто даст два решения $j < k:\ \ \kappa = -1,\ m = 1,\ n = 1;\ j > k:\ \ \kappa = -1,\ m = 1,\ n = 0$, которые являются противоположными указанных выше решений, следовательно, по существу они такие же.
Осталось выяснить $d_1, d_2, d_3, \bar{e_1}e_1, \bar{e_2}e_2, \bar{e_3}e_3$, и систему знаков в $\bar{\Phi}$.

I:

1. $j > k,\ \ \bar{p_2} = d_2(p_1 - p_2)$,

$$T = \begin{Vmatrix} 0, & d_2, & 0 \\ d_1, & -d_2, & 0 \\ 0, & 0, & d_2 \end{Vmatrix}, \qquad \bar{P} = PT = \begin{Vmatrix} d_1 p_1^{(2)}, & d_2(p_1^{(1)} - p_1^{(2)}), & d_3 p_1^{(3)} \\ d_1 p_2^{(2)}, & d_2(p_2^{(1)} - p_2^{(2)}), & d_3 p_2^{(3)} \\ d_1 p_3^{(2)}, & d_2(p_3^{(1)} - p_3^{(2)}), & d_3 p_3^{(3)} \end{Vmatrix}.$$

Пусть $\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}$, это будут e_i для $\bar{P}$ и e_1, e_2, e_3 для P, тогда

$$\bar{\Phi} = \begin{Vmatrix} \bar{e_1} d_1 \xi(p_2), & \bar{e_1} d_2(\xi(p_1) - \xi(p_2)), & \bar{e_1} d_3 \xi(p_3) \\ \bar{e_2} d_1 \eta(p_2), & \bar{e_2} d_2(\eta(p_1) - \eta(p_2)), & \bar{e_2} d_3 \eta(p_3) \\ \bar{e_3} d_1 \zeta(p_2), & \bar{e_3} d_2(\zeta(p_1) - \zeta(p_2)), & \bar{e_3} d_3 \zeta(p_3) \end{Vmatrix},$$

$$\bar{\Phi} = \begin{Vmatrix} \bar{e_1} e_1 d_1 b, & \bar{e_1} e_1 d_2(a - b), & \bar{e_1} e_1 d_3 c \\ \bar{e_2} e_2 d_1 g, & \bar{e_2} e_2 d_2(-f - g), & -\bar{e_2} e_2 d_3 h \\ -\bar{e_3} e_3 d_1 k, & \bar{e_3} e_3 d_2(-j + k), & \bar{e_3} e_3 d_3 l \end{Vmatrix}.$$

Поскольку на диагонали должны стоять положительные элементы, имеем $d_1 = \bar{e_1}e_1$, $d_2 = -\bar{e_2}e_2, d_3 = \bar{e_3}e_3$ и

$$\bar{\Phi} = \begin{Vmatrix} (\bar{e_1}e_1)^2 b, & -(\bar{e_1}e_1)(\bar{e_2}e_2)(a - b), & (\bar{e_1}e_1)(\bar{e_3}e_3) c \\ (\bar{e_2}e_2)(\bar{e_1}e_1) g, & (\bar{e_2}e_2)^2 (f + g), & -(\bar{e_2}e_2)(\bar{e_3}e_3) h \\ -(\bar{e_3}e_3)(\bar{e_1}e_1) k, & (\bar{e_3}e_3)(\bar{e_2}e_2)(j - k), & (\bar{e_3}e_3)^2 l \end{Vmatrix}.$$

Поскольку $\bar{e_1}\bar{e_2}\bar{e_3} = 1$ и $e_1 e_2 e_3 = 1$, следует, что

$$(\bar{e_1}e_1)(\bar{e_2}e_2)(\bar{e_3}e_3) = 1.$$

Тогда Теорема 1 представляет способ выбора произведений $\bar{e_1}e_1, \bar{e_2}e_2, \bar{e_3}e_3$, которые делают матрицу $\bar{\Phi}$ нормальной матрицей; а именно $\bar{e_1}e_1 = 1, \bar{e_2}e_2 = 1, \bar{e_3}e_3 = 1$, и V система знаков в $\bar{\Phi}$. Следовательно, $d_1 = 1,\ d_2 = -1,\ d_3 = 1,\ \bar{p_1} = p_2,\ \bar{p_2} = -p_1 + p_2,\ \bar{p_3} = p_3$.

2. $j < k, \quad \bar{p_2} = d_2(p_1 - p_2 - p_3)$.

Та же процедура, что и в предыдущем пункте, приводит к

$$\bar{\Phi} = \begin{Vmatrix} \bar{e_1}e_1d_1b, & -\bar{e_1}e_1d_2(-a+b+c), & \bar{e_1}e_1d_3c \\ \bar{e_2}e_2d_1g, & -\bar{e_2}e_2d_2(f+g-h), & -\bar{e_2}e_2d_3h \\ -\bar{e_3}e_3d_1k, & -\bar{e_3}e_3d_2(j-k+l), & \bar{e_3}e_3d_3l \end{Vmatrix},$$

Следовательно, $d_1 = \bar{e_1}e_1,\ d_2 = -\bar{e_2}e_2,\ d_3 = \bar{e_3}e_3$. Заменяем эти произведения в $\bar{\Phi}$ и отмечая, что $b + c > a$ применяем Теорему 1 для получения $\bar{e_1}e_1 = 1, \bar{e_2}e_2 = -1, \bar{e_3}e_3 = -1$, и III система знаков в $\bar{\Phi}$. Следовательно, $d_1 = 1,\ d_2 = 1,\ d_3 = -1,\ \bar{p_1} = p_2,\ \bar{p_2} = p_1 - p_2 - p_3,\ \bar{p_3} = -p_3$.

II и V:

Если V преобразовать, то случаи II и V могут быть решены одновременно. Ниже представлены условия (1), (2) и (3), которые должны быть выполнены в соответствующих случаях.

II:

(1) $|\kappa a - mb - nc| < b,$

(2) $|-\kappa j - mk + nl| < l,$

(3) $|\kappa f + mg + nh| = min.,$

где $|\kappa| + |m| + |n| \geqslant 1,\ \kappa = \pm 1$, или 0.

V:

(1) $|\bar{\kappa} a - \bar{m} b + \bar{n} c| < b,$

(2) $|-\bar{\kappa} j + \bar{m} k + \bar{n} l| < l,$

(3) $|\bar{\kappa} f + \bar{m} g - \bar{n} h| = min.,$

где $|\bar{\kappa}| + |\bar{m}| + |\bar{n}| \geqslant 1,\ \bar{\kappa} = \pm 1$, или 0.

Для V пусть $\kappa = \bar{\kappa},\ m = \bar{m},\ n = -\bar{n}$ и перепишем условия (1), (2) и (3) следующим образом

(1') $U \equiv \kappa a - mb - nc = \lambda_1 b,$

(2') $V \equiv \pm\kappa j + mk - nl = \lambda_2 l,$

(3') $W \equiv \kappa f + mg + nh = min.$

где $|\lambda_i| < 1,\ \lambda_i \neq 0$. Верхний знак в (2') для случая II, а нижний знак для случая V. Имеем также $F = bl + ck,\ G = al \mp cj,\ H = \pm ak + bj$. Решая (1') и (2') для m и n, получаем

$$m = \kappa\frac{al \mp cj}{bl + ck} + \frac{-\lambda_1 bl + \lambda_2 cl}{bl + ck} = \kappa\frac{G}{F} + \nu_1,$$

$$n = \kappa\frac{\pm bj + ak}{bl + ck} + \frac{-\lambda_2 bl - \lambda_1 bk}{bl + ck} = \kappa\frac{\pm H}{F} + \nu_2,$$

Если $\kappa = 0$, то по-прежнему $|m| \leqslant 1,\ |n| \leqslant 1$, и из них, только $m = 0,\ n = 0$ является решением (1) и (2). Но $\bar{p_2}$ не является началом координат, следовательно:
Вывод: Если $b > c$ и если Φ нормальная матрица типов II или V, тогда $\xi-$сосед $\{a, g, l\}$ всегда первого рода.
Численные оценки для $\frac{G}{F}$ и $\frac{\pm H}{F}$ независимо от a, b, c, и т.д. нельзя обеспечить как в случае I, следовательно, решение должно быть выражено в терминах этих двух велечин.
Пусть $M \equiv \left[\frac{G}{F}\right],\ N \equiv \left[\frac{\pm H}{F}\right]$, где квадратные скобки имеют то же значение, что и раньше. Из Φ можно получить следующие соотношения:

$$a - \frac{G}{F}b - \frac{\pm H}{F}c = 0,$$

$$f + \frac{G}{F}g + \frac{\pm H}{F}h = \frac{\triangle}{F},$$

$$\pm j + \frac{G}{F}k - \frac{\pm H}{F}l = 0.$$

Пусть $u \equiv a - Mb - Nc,\ v \equiv \pm j + Mk - Nl,\ w \equiv f + Mg + Nh$, тогда

$$0 < u < b + c, \quad -k < v < l, \quad \frac{\triangle}{F} - (g + h) < w < \frac{\triangle}{F}.$$

Из приведенных выше выражений для m и n получается

$$\left[\kappa\frac{G}{F}\right] + [\nu_1] \leqslant m \leqslant \left[\kappa\frac{G}{F}\right] + [\nu_1] + 1,$$

$$\left[\kappa\frac{\pm H}{F}\right] + [\nu_2] \leqslant n \leqslant \left[\kappa\frac{\pm H}{F}\right] + [\nu_2] + 1,$$

где $-2 \leqslant [\nu_i] \leqslant 1$. Решения для (1) и (2) для $\kappa = -1$ являются противоположными решениями для $\kappa = 1$, благодаря однородности выражений κ, m и n. Пусть $\kappa = 1$. Поскольку m — целое число, тогда либо G/F и ν_1 оба целые числа, либо оба не целые числа. Когда оба целые, видно, что $-m = -\frac{G}{F} - \nu_1 = -\left[\frac{G}{F}\right] + [-\nu_1]$ так, что $-M - 2 \leqslant -m \leqslant -M + 1$. Если же они оба не целые числа, тогда видно, что $m = \frac{G}{F} + \nu_1 = \left[\frac{G}{F}\right] + [\nu_1] + 1$ так, что $M - 1 \leqslant m \leqslant M + 2$.
Похожие результаты имеем и для n

$$N - 1 \leqslant n \leqslant N + 2.$$

Из шеснадцати возможных комбинаций, многие из которых можно отсеять используя оценки u и v, полученные выше. Для примера, если $m = M + 2,\ n = N - 1$, получим

$$U = a - b(M + 2) - c(N - 1) = u - 2b + c,$$

$$V = \pm j + k(M + 2) - l(N - 1) = v + 2k + l,$$

получается $-2b + c < U < -b + 2c,\ k + l < V < 2k + 2$. Тогда условие (2), а именно $|V| < l$, не выполняется. После проверки подходят только следующие значения:

	Решение (1), (2)	Границы для u и v	W	Условия для решения
(i)	$m = M + 2$ $n = N$	$-2b < U < -b + c$ $k < V < l + 2k$	$w + 2g$	$u < b$ $v < l - 2k$
(ii)	$m = M + 1$ $n = N$	$-b < U < c$ $0 < V < l + k$	$w + g$	$u > 0$ $v < l - k$
(iii)	$m = M + 1$ $n = N + 1$	$-b - c < U < 0$ $-l < V < k$	$w + g + h$	$u > c$ $v > -k$
(iv)	$m = M + 1$ $n = N + 2$	$-b - 2c < U < -c$ $-2l < V < k - l$	$w + g + 2h$	$u > 2c$ $v > l - k$
(v)	$m = M$ $n = N - 1$	$c < U < b + 2c$ $l - k < V < 2$	$w - h$	$u < b - c$ $v < 0$
(vi)	$m = M$ $n = N$	$0 < U < b + c$ $-k < V < l$	w	$u < b$ $v < l$
(vii)	$m = M$ $n = N + 1$	$-c < U < b$ $-l - k < V < 0$	$w + h$	$u > 0$ $v > 0$
(viii)	$m = M - 1$ $n = N + 1$	$b - c < U < 2b$ $-l - 2k < V < -k$	$w - g + h$	$u < c$ $v > k$

Теперь речь идет о минимуме $|W|$. Из определения M и N и условий $a > b > c > 0,\ l > j$ получается, что $M \geqslant 0,\ \ N \geqslant -1$. Тогда $w \geqslant f - h$ для всех решений, за исключением, возможно (v), $\ W \geqslant f - g > -g$. Но определение экстремального параллелепипеда $\{a, g, l\}$ требует, чтобы не существовало решений $|\xi| < a, |\zeta| < l$, для которых $|\eta| \leqslant g$; следовательно, нет решений (1) и (2) для которых $|W| \leqslant g$. Тогда для всех решений, кроме (v), имеем $W > g$. Для (v) имеем $W = w - h$, но всякий раз когда (v) является решением (1) и (2) так же, как и (vi). Было просто показано, что когда (vi) решение, $w > g$, так что для (v) $W = w - h > g - h > 0$; следовательно, $w - h > g$. Следовательно, $|W| = W$ для всех решений.
Значение W в (viii) и (v) являются двумя наименьшими и так как условия, при которых эти два решения являются взаимоисключающими, (viii) является решением (1), (2) и (3) всякий раз, когда $u < c,\ v > k$; и (v) является решением, когда $u < b - c,\ v < 0$. Следующее наименьшее значение для W для (vi) которое удовлетворяет (1) и (2) всякий раз, когда $u < b$. Но (3) не удовлетворяется (vi), если ни $(viii)$ и ни (v) не удовлетворяют (1) и (2). Таким образом, (vi) это решение (1), (2) и (3), если u и v удовлетворяют условиям для того чтобы (vi) было решением (1) и (2), но не таким условиям, чтобы $(viii)$ или (v) было решением.

Условия	m	n	Эквивалентность
1) u<c, v>k	M-1	N+1	(viii)
2) u<b-c, v<0	M	N-1	(v)
3), 4) u<b, но не 1) или 2)	M	N	(vi)
5) u>b, v>0	M	N+1	(vii)
6) u>b, v<0	M+1	N	(ii)

Остается определить $T,\ \bar{e_1}e_1,\ \bar{e_2}e_2,\ \bar{e_2}e_3$ и систему знаков в $\bar{\Phi}$. Поскольку $\bar{p_2} = d_2(p_1 + mp_2 \pm np_3)$ имеем

$$T = \begin{Vmatrix} 0, & d_2, & 0 \\ d_1, & d_2 m, & 0 \\ 0, & \pm d_2 n, & d_3 \end{Vmatrix}.$$

Следуя процедуре как в случае I, получим:

$$\bar{\Phi} = \begin{Vmatrix} -\bar{e_1} e_1 d_1 b, & \bar{e_1} e_1 d_2 (a - mb - nc), & \mp \bar{e_1} e_1 d_3 c \\ \bar{e_2} e_2 d_1 g, & \bar{e_2} e_2 d_2 (f + mg + nh), & \pm \bar{e_2} e_2 d_3 h \\ \mp \bar{e_3} e_3 d_1 k, & \bar{e_2} e_3 d_2 (-j \mp mk \pm nl), & \bar{e_3} e_3 d_3 l \end{Vmatrix}.$$

Напомним, что $W > 0$, следовательно $d_1 = -\bar{e_1} e_1,\ d_2 = \bar{e_2} e_2,\ d_3 = \bar{e_3} e_3$ и

$$\bar{\Phi} = \begin{Vmatrix} (\bar{e_1} e_1)^2 b, & (\bar{e_1} e_1)(\bar{e_2} e_2) U, & \mp (\bar{e_1} e_1)(\bar{e_3} e_3) c \\ -(\bar{e_2} e_2)(\bar{e_1} e_1) g, & (\bar{e_2} e_2)^2 W, & \pm (\bar{e_2} e_2)(\bar{e_3} e_3) h \\ \pm (\bar{e_3} e_3)(\bar{e_1} e_1) k, & \mp (\bar{e_3} e_3)(\bar{e_2} e_2) V, & (\bar{e_3} e_3)^2 l \end{Vmatrix}.$$

1)$u < c,\ v > k:\ m = M - 1,\ n = N + 1$. Напомним, что $0 < u < b + c,\ -k < v < l$, и имеем $U > 0,\ V < 0$. Из Теоремы 1 следует, что $\bar{e_1} e_1 = \mp 1,\ \bar{e_2} e_2 = \mp 1,\ \bar{e_3} e_3 = 1;\ d_1 = \pm 1,\ d_2 = \mp 1,\ d_3 = 1$; и система знаков в $\bar{\Phi}\ I$.
2)$u < b - c,\ v < 0 : m = M,\ n = N - 1;\ U > 0,\ V > 0$. Из Теоремы 1 следует, что $\bar{e_1} e_1 = \pm 1,\ \bar{e_2} e_2 = \pm 1,\ \bar{e_3} e_3 = 1,\ d_1 = \mp 1,\ d_2 = \pm 1,\ d_3 = 1$, и система знаков в $\bar{\Phi}\ IV$.
3)$u < b,\ v > 0$, но не 1) $: m = M,\ n = N;\ U > 0,\ V > 0$. Так же, как 2).
4)$u < b,\ v < 0$, но не 2) $: m = M,\ n = N;\ U > 0,\ V < 0$. Так же, как 1).
5)$u > b,\ v > 0 :\ m = M,\ n = N + 1;\ U > 0,\ V < 0$. Так же, как 1).
6)$u > b,\ v < 0 :\ m = M + 1,\ n = N;\ U > 0,\ V > 0$. Так же, как 2).
III и IV.
Эти два случая можно объединить. Условия, которые должны быть выполнены в соответствующих случаях:

III	IV
(1) $\lvert \overline{\kappa} a - \overline{m} b - \overline{n} c \rvert < b$,	(1) $\lvert \kappa a + mb - nc \rvert < b$,
(2) $\lvert \overline{\kappa} j + \overline{m} k + \overline{n} l \rvert < l$	(2) $\lvert \kappa j - mk + nl \rvert < l$,
(3) $\lvert$- $\overline{\kappa} f + \overline{m} g - \overline{n} h \rvert = min.$;	(3) $\lvert$-$\kappa f + mg + nh \rvert = min.$

В III пусть $\kappa = \bar{\kappa},\ m = -\bar{m},\ n = \bar{n}$ и для обоих случаев имеем:
$(1')$ $U \equiv \kappa a + mb - nc = \lambda_1 b$,
$(2')$ $V \equiv \kappa j - mk + nl = \lambda_2 l$,
$(3')$ $W \equiv \pm \kappa f + mg + nh$ имеет минимальное абсолютное значение.
где $|\lambda_i| < 1, \lambda_i \neq 0$. Верхний знак в $(3')$ для случая III, нижний — для IV.
$k = 0 :$
Решаем $(1')$ и $(2')$ для m и n,

$$m = \frac{\lambda_1 bl + \lambda_2 cl}{bl - ck}, \quad n = \frac{\lambda_2 bl + \lambda_1 bk}{bl - ck};$$

Тогда

$$m - n = \lambda_1 \frac{bl - bk}{bl - ck} + \lambda_2 \frac{cl - bl}{bl - ck}.$$

Поскольку $b > l,\ l > k$, имеем $|m - n| < 2$; но m и n целые числа, поэтому $|m - n| \leqslant 1$. Запишем что $m = n + \varepsilon$ ($\varepsilon = 0$ или ± 1). Заменим $(1')$ и $(2')$:

$(1'')$ $n(b-c)+\varepsilon b=\lambda_1 b,$
$(2'')$ $n(l-k)-\varepsilon k=\lambda_2 l,$
где $|\lambda_i|<1, \lambda_i\neq 0$. Одновременно m и n равняться нулю не могут, следовательно $|n|+|\varepsilon|\geqslant 1$. Из $(1'')$, очевидно, что $n\neq 0$.
Предположение, что $\varepsilon=1$, дает $n\leqslant -1$ из $(1'')$ и $n\geqslant 0$ из $(2'')$. Следовательно, $\varepsilon\neq 1$.
Предположение, что $\varepsilon=-1$ дает $n\geqslant 1$ из $(1'')$ и $n\leqslant 0$ из $(2'')$. Следовательно, $\varepsilon\neq -1$; получается, что $\varepsilon=0$ и $m=n$.
Тогда минимум $|W|$ для $m=n=\pm 1$ равен $|W|=g+h$. Кроме того, $\kappa=0,\ m=n=1$ всегда удовлетворяют $(1')$ и $(2')$, так что это решение $(1')$, $(2')$, и $(3')$, за исключением, когда наименьшее значение $|W|$ получено другим решением $(1')$ и $(2')$ для которого $\kappa=1$.
$\kappa=1:$
Решим $(1')$ для m и $(2')$ для n,
$(1''')$ $m=\lambda_1-\frac{a}{b}+n\frac{c}{b},$
$(2''')$ $n=\lambda_2-\frac{j}{l}+m\frac{k}{l},$
где $|\lambda_i|<1,\ \lambda_i\neq 0$. Тогда, поскольку m и n — целые числа,

$$m\leqslant[\lambda_1]+[-a/b]+[nc/b]+2,$$

$$n\leqslant[\lambda_2]+[-j/l]+[mk/l]+2.$$

(a) Предположим, что $m>0,\ n>0$, тогда $m\leqslant 0-2+n-1+2=n-1,\ n\leqslant 0-1+m-1+2=m$; но эти неравенства несовместимы, поэтому, либо $m\leqslant 0$, либо $n\leqslant 0$.

(b) Предположим, что $n<0$, тогда из $(1''')$, $m\leqslant 0-2-1+2=-1$.

(c) Предположим, что $m<0$, тогда из $(2''')$, $n\leqslant 0-1-1+2=0$.

(d) Предположим, что $n=0$, тогда из $(1''')$, $m=\lambda_1-a/b<0$ или $m\leqslant -1$.

(e) Предположим, что $m=0$, тогда из $(2''',)$ $n=\lambda_2-j/l<1$ или $n\leqslant 0$.

Тогда во всех случаях имеем, что $m\leqslant -1,\ n\leqslant 0$ (так как (d) исключает возможность $m=0,\ n=0$).
Далее будет определен минимум $|W|$ и для случаев III и IV он будет рассматриваться отдельно.
III: Из Теоремы 1 имеем $j+k>l,\ h>f$; тогда $(2')$ не удовлетворяется, если $\kappa=1,\ m\leqslant -1,\ n=0$. Два решения для которых значение $|W|$ является наименьшим:

$$m=-1,\ n=-1:\quad |W|=-f+g+h>g;$$

$$m=-1,\ n=-2:\quad |W|=-f+g+2h>g+h.$$

Из них только в первом случае значение $|W|$ меньше, чем $g+h$, и тройка $\kappa=1,\ m=-1,\ n=-1$ должна приниматься всякий раз, когда это решение $(1')$ и $(2')$; в противном случае, $\kappa=0,\ m=1,\ n=1$. То, что $\kappa=1,\ m=-1,\ n=-1$ является решением $(1')$ требует, чтобы $a+c<2b$; тогда тройка всегда является решением $(2')$.
Тогда для III случая имеем:

1. $a + c < 2b: \quad \kappa = 1,\ m = -1,\ n = -1;$

2. $a + c > 2b: \quad \kappa = 0,\ m = 1,\ n = 1.$

Вывод: $\xi-$сосед первого рода, если $a + c < 2b$; в противном случае это второй род.
IV: Здесь $m \leqslant 1,\ n \leqslant 0$, и наименьшее значение $|W|$ достигается при $m = -1,\ n = 0$, а именно $|W| = f + g$. Для всех других пар m и n удовлетворяющих этим неравенствам,

$$|W| \geqslant f + g + h > g + h.$$

Тогда $|W|$ может быть меньше чем $g + h$, для значений $\kappa = 0,\ m = 1,\ n = 1$, только если $f < h$, и если тройка $\kappa = 1,\ m = -1,\ n = 0$ удовлетворяет как $(1')$, так и $(2')$. То, что $(1')$ и $(2')$ выполнены устанавливает условие $a < 2b,\ j + k < l$.
Тогда для IV случая имеем:

1. $a < 2b,\ f < h,\ j + k < l: \quad \kappa = 1,\ m = -1,\ n = 0;$

2. $a > 2b$ или $f > h$ или $j + k > l: \quad \kappa = 0,\ m = 1,\ n = 1.$

Вывод: $\xi-$сосед первого рода, если $a < 2b,\ f < h$ и $j + k < l$; в противном случае это второй род.
Осталось определить $T,\ \bar{e}_i e_i$ и систему знаков в $\bar{\Phi}$.
III:

$$T = \begin{Vmatrix} 0, & \kappa d_2, & 0 \\ d_1, & d_2, & 0 \\ 0, & d_2, & d_3 \end{Vmatrix}.$$

Затем выполним процедуру как в случае I, получим:

$$\bar{\Phi} = \begin{Vmatrix} -\bar{e_1}e_1 d_1 b, & \bar{e_1}e_1 d_2(\kappa a - b + c), & -\bar{e_1}e_1 d_3 c \\ \bar{e_2}e_2 d_1 g, & \bar{e_2}e_2 d_2(-\kappa f + g + h), & -\bar{e_2}e_2 d_3 h \\ \bar{e_3}e_3 d_1 k, & \bar{e_3}e_3 d_2(\kappa j + k - l), & \bar{e_3}e_3 d_3 l \end{Vmatrix}.$$

Тогда пусть $d_1 = \bar{e_1}e_1,\ d_2 = \bar{e_2}e_2,\ d_3 = \bar{e_3}e_3$ получим

$$\bar{\Phi} = \begin{Vmatrix} (\bar{e_1}e_1)^2 b, & (\bar{e_1}e_1)(\bar{e_2}e_2)(\kappa a - b + c), & -(\bar{e_1}e_1)(\bar{e_3}e_3)c \\ -(\bar{e_2}e_2)(\bar{e_1}e_1)g, & (\bar{e_2}e_2)^2(-\kappa f + g + h), & -(\bar{e_2}e_2)(\bar{e_3}e_3)h \\ -(\bar{e_3}e_3)(\bar{e_1}e_1)k, & (\bar{e_3}e_3)(\bar{e_2}e_2)(\kappa j + k - l), & (\bar{e_3}e_3)^2 l \end{Vmatrix}.$$

$\kappa = 0:$ Из Теоремы 1 следует, что $\bar{e_1}e_1 = 1,\ \bar{e_2}e_2 = 1,\ \bar{e_3}e_3 = 1$, и система знаков в $\bar{\Phi}$ VI; тогда $d_1 = -1,\ d_2 = 1,\ d_3 = 1$.
$\kappa = 1:$ Из Теоремы 1 следует, что $\bar{e_1}e_1 = -1,\ \bar{e_2}e_2 = 1,\ \bar{e_3}e_3 = -1$, и система знаков в $\bar{\Phi}$ II; тогда $d_1 = 1,\ d_2 = 1,\ d_3 = -1$.
IV:

$$T = \begin{Vmatrix} 0, & \kappa d_2, & 0 \\ d_1, & -d_2, & 0 \\ 0, & (\kappa - 1)d_2, & d_3 \end{Vmatrix}.$$

Та же процедура, что и раньше, приводит к следующему

$$\bar{\Phi} = \begin{Vmatrix} \bar{e_1}e_1 d_1 b, & \bar{e_1}e_1 d_2(\kappa a - b - \overline{\kappa - 1}c), & -\bar{e_1}e_1 d_3 c \\ \bar{e_2}e_2 d_1 g, & \bar{e_2}e_2 d_2(-\kappa f - g + \overline{\kappa - 1}h), & \bar{e_2}e_2 d_3 h \\ -\bar{e_3}e_3 d_1 k, & \bar{e_3}e_3 d_2(\kappa j + k + \overline{\kappa - 1}l), & \bar{e_3}e_3 d_3 l \end{Vmatrix}.$$

и $d_1 = \bar{e_1}e_1,\ d_2 = -\bar{e_2}e_2,\ d_3 = \bar{e_3}e_3$. Тогда, наконец, получаем
$\kappa = 0:\ \bar{e_1}e_1 = -1,\ \bar{e_2}e_2 = 1,\ \bar{e_3}e_3 = -1$; система знаков в $\bar{\Phi}$ VI; и $d_1 = -1,\ d_2 = -1,\ d_3 = -1$.
$\kappa = 1:\ \bar{e_1}e_1 = 1,\ \bar{e_2}e_2 = 1,\ \bar{e_3}e_3 = 1$; система знаков в $\bar{\Phi}$ II; и $d_1 = 1,\ d_2 = -1,\ d_3 = 1$.
$\xi-$сосед $\xi-$соседа в случаях III 2] и IV2]:
Пусть P, Φ матрицы и $e_1,\ e_2,\ e_3$ это e_i из Теоремы 1 для экстремального параллелепипеда $\{a,\ g,\ l\}$ и пусть $P^*,\ \Phi^*,\ e_1^*,\ e_2^*,\ e_3^*$ имеют соответствующие значения для $\xi-$соседа $\xi-$соседа. Решение строится точно также, как для $\xi-$соседа в случаях II и IV.
Теорема 1 показывает, что определитель P^* равен 1. Поскольку P также имеет определитель 1, а P^{-1} — матрица целых чисел с определителем 1. Тогда $T^* = P^{-1}P^*$ — матрица целых чисел с определителем 1.

1] $b - c > c$: так как $p_1^* = \pm\bar{p_2},\ p_3 = \pm\bar{p_3}$, где $\bar{p_2},\ \bar{p_3}$ являются точками решетки на $\xi-$соседе $\{a,\ g,\ l\}$ и как найдено в III 2] и IV2], имеем

$$T^* = \begin{Vmatrix} 0, & \kappa^* d_2, & 0 \\ d_1, & m^* d_2, & 0 \\ \mp d_1, & n^* d_2, & d_3 \end{Vmatrix},$$

где $\kappa^*,\ m^*,\ n^*$ целые числа и d_i определяются как 1 или -1. Верхний знак в первом столбце матрицы T^* для III, нижний знак для IV. Так как определитель T^* равен 1, $|\kappa^*| = 1$. Выберем $\kappa^* = 1$.
Пусть $m^* = \pm m,\ n^* = -(m - n)$, тогда

$$T^* = \begin{Vmatrix} 0, & d_2, & 0 \\ d_1, & \pm m d_2, & 0 \\ \mp d_1, & -(m-n)d_2, & d_3 \end{Vmatrix};$$

это дает нам то, что мы можем выразить p_2^* в терминах $\bar{p_1},\ \bar{p_2}(= p_2 \mp p_3)$, и $\bar{p_3}(= \pm p_3)$.
Пусть $u^\circ = b - c,\ u' = c;\ v^\circ = l,\ v' = l - k;\ w^\circ = g + h,\ w' = h$, тогда $u^\circ > u' > 0,\ w^\circ > f > 0,\ w^\circ > w' > 0,\ v^\circ > j > 0,\ v^\circ > v' > 0$ (и $w' > f > 0$ в III), и

$$\xi(p_2^*) = e_1 d_2(a - mu^\circ - nu'),$$

$$\eta(p_2^*) = e_2 d_2(-f \pm mw^\circ \mp nw'),$$

$$\zeta(p_2^*) = e_3 d_2(j - mv' + nv^\circ).$$

Следующие условия должны быть удовлетворены:

(1) $|a - mu^\circ - nu'| < u^\circ$,

(2) $|-j + mv' - nv^\circ| < v^\circ$,

(3) $|\mp f + mw^\circ - nw'| = min$.

Перепишем (1), (2) и (3) как

(1') $U \equiv a - mu^\circ - nu' = \lambda_1 u^\circ$,

(2') $V \equiv -j + mv' - nv^\circ = \lambda_2 v^\circ$, (3') $W \equiv \mp f + mw^\circ - nw'$ имеет минимальное абсолютное значение.

где $|\lambda_i| < 1,\ \lambda_i \neq 0$. Решая $(1')$ и $(2')$ для m и n в терминах $F,\ G$, и H, соответствующих знаковым минорам для $-f,\ g$, и $\mp h$ в Φ.

$$m = \frac{av^\circ + ju'}{u^\circ v^\circ + u'v'} + \frac{-\lambda_1 u^\circ v^\circ + \lambda_2 v^\circ u'}{u^\circ v^\circ + u'v'} = \frac{\pm G}{F} + \nu_1,$$

$$n = \frac{-ju^\circ + av'}{u^\circ v^\circ + u'v'} + \frac{-\lambda_2 u^\circ v^\circ - \lambda_1 u^\circ v'}{u^\circ v^\circ + u'v'} = \frac{\pm G + H}{F} + \nu_2.$$

Как и прежде, из условий $u^\circ > u' > 0,\ v^\circ > v' > 0$ и $|\lambda_i| < 1$, следует, что $|\nu_i| < 2$ и $M - 1 \leqslant m \leqslant M + 2,\ N - 1 \leqslant N + 2$.
Пусть $M = \left[\frac{\pm G}{F}\right],\ N = \left[\frac{\pm G + H}{F}\right],\ u = a - Mu^\circ - Nu',\ v = -j + Mv' - Nv^\circ,\ w = \mp f + Mw^\circ - Nw'$, и получить следующие неравенства из Φ как в случаях II и V:

$$u^\circ + u' > u > 0, \quad v^\circ > v > -v', \quad w > \frac{\Delta}{\pm F} - w^\circ > -w^\circ.$$

Величины $u^\circ,\ u',\ v^\circ,\ v',\ w^\circ,\ w'$ здесь занимают места $b,\ c,\ l,\ k,\ g$ и h соответственно, как в случаях II и V.
Решения (1) и (2) в терминах M и N определенные здесь, имеют точно такую же форму, как и решения от (i) до $(viii)$ из (1) и (2) для II и V. Существует разница, однако, в относительных величинах $|W|$.

	Решение (1), (2)	W	Условия для решения
(i)	$m = M + 2$ $n = N$	$w + 2w^\circ$	$u < u^\circ$ $v < v^\circ - 2v'$
(ii)	$m = M + 1$ $n = N$	$w + w^\circ$	$u > 0$ $v < v^\circ - v'$
(iii)	$m = M + 1$ $n = N + 1$	$w + w^\circ - w'$	$u > u'$ $v > -v'$
(iv)	$m = M + 1$ $n = N + 2$	$w + w^\circ - 2w'$	$u > 2u'$ $v > v^\circ - v'$
(v)	$m = M$ $n = N - 1$	$w + w'$	$u < u^\circ - u'$ $v < 0$
(vi)	$m = M$ $n = N$	w	$u < u^\circ$ $v < v^\circ$
(vii)	$m = M$ $n = N + 1$	$w - w'$	$u > 0$ $v > 0$
(viii)	$m = M - 1$ $n = N + 1$	$w - w^\circ - w'$	$u < u'$ $v > v'$

Из условий на $w,\ w^\circ,\ w'$, видно, что $W > -w^\circ$ для каждого решения, за исключением, возможно, (iv), (vii) и $(viii)$; но нет решений (1) и (2) для которых $|W| < w^\circ$, следовательно, решения, для которых $W > -w^\circ$ удовлетворяют также условию $W > w^\circ$. Можно показать, что даже $W > w^\circ$ для трех упомянутых возможных исключений. Если $(viii)$ является решением, то (vi) также является решением. Тогда $w > w^\circ$, и как следствие, $w - w^\circ - w' > -w^\circ$ удовлетворено. Следовательно, $w - w^\circ - w' > w^\circ$. Если

(vii), но не $(viii)$, является решением, то либо (vi) либо (iii) является решением, и в любом случае имеем $w - w' > w^\circ$. Аналогичным образом можно показать, что если (iv) является решением, то $w + w^\circ - 2w' > w^\circ$. Следовательно, $|W| = W$.
Из восьми решений (1) и (2) получается следующая таблица всех решений (1), (2) и (3):

Условия	m	n	Эквивалентность
1) u<u', v>v'	M-1	N+1	(viii)
2), 3) u>0, v>0 но не 1)	M	N+1	(vii)
4) u<u°, $v < 0$	M	N	(vi)
5) u>u°, $v < 0$	M+1	N+1	(iii)

Значения $d_1,\ d_2,\ d_3,\ e_1^*e_1,\ e_2^*e_2,\ e_3^*e_3$, и система знаков в $\Phi*$ теперь будут определены для различных решений от 1) до 5).
Поскольку $P^* = PT^*$, имеем

$$\Phi^* = \left\|\begin{matrix} \pm e_1^*e_1d_1u^\circ, & e_1^*e_1d_2(a - mu^\circ - nu'), & -e_1^*e_1d_3u' \\ e_2^*e_2d_1w^\circ, & e_2^*e_2d_2(-f \pm mw^\circ \mp nw'), & \mp e_2^*e_2d_3w' \\ \mp e_3^*e_3d_1v', & e_3^*e_3d_2(j - mv' + nv^\circ), & e_3^*e_3d_3v^\circ \end{matrix}\right\|.$$

Тогда $d_1 = \mp e_1^*e_1,\ d_2 = \pm e_2^*e_2,\ d_3 = e_3^*e_3$, и

$$\Phi^* = \left\|\begin{matrix} (e_1^*e_1)^2u^\circ, & \pm(e_1^*e_1)(e_2^*e_2)U, & -(e_1^*e_1)(e_3^*e_3)u' \\ \mp(e_2^*e_2)(e_1^*e_1)w^\circ, & (e_2^*e_2)^2W, & \mp(e_2^*e_2)(e_3^*e_3)w' \\ (e_3^*e_3)(e_1^*e_1)v', & (e_3^*e_3)(e_2^*e_2)V, & (e_3^*e_3)^2v^\circ \end{matrix}\right\|.$$

1) $u < u',\ v > v' :\ U > 0,\ V < 0$. Из Теоремы 1 следует $e_1^*e_1 = \pm1,\ e_2^*e_2 = -1,\ e_3^*e_3 = \mp1$, и система знаков в Φ^* V. Тогда $d_1 = -1,\ d_2 = \mp1,\ d_3 = \mp1$.

2) $u < u',\ v' > v > 0 : U < 0,\ V < 0$. Из Теоремы 1 следует $e_1^*e_1 = \pm1,\ e_2^*e_2 = 1,\ e_3^*e_3 = \pm1$, и система знаков в Φ^* III. Тогда $d_1 = -1,\ d_2 = \pm1,\ d_3 = \pm1$.

3) $u > u',\ v > 0 :\ U > 0,\ V < 0$; что и в случае 1).

4) $u < u^\circ,\ v < 0 : U > 0,\ V < 0$; что и в случае 1).

5) $u > u^\circ,\ v < 0 :\ U < 0,\ V < 0$; что и в случае 2).

2] $b - c < c :$
Здесь $p_1^* = d_1p_3$ и $p_2^* = d_2(p_2 \mp p_3)$. Третья точка это линейная комбинация с целыми коэффициентами $p_1,\ p_2,\ \mp p_3$ и p_3. Пусть $p_3^* = d_3(kp_1 \pm n(p_2 \mp p_3) + mp_3)$, тогда

$$T^* = \left\|\begin{matrix} 0, & 0, & kd_3 \\ 0, & d_2, & \pm nd_3 \\ d_1, & \mp d_2, & (m-n)d_3 \end{matrix}\right\|;$$

где $d_i = \pm1$. Но определитель T^* равен 1, для того чтобы $|\kappa| = 1$. Выберем $\kappa = 1$ как раньше. Затем

$$\xi(p_3^*) = e_1d_3(a - n\overline{b - c} - mc),$$
$$\eta(p_3^*) = e_2d_3(-f \pm n\overline{g + h} \mp mh),$$
$$\zeta(p_3^*) = e_3d_3(j - n\overline{l - k} + ml),$$

Пусть $u^\circ = c,\ u' = b - c;\ v^\circ = g + h,\ v' = h;\ w^\circ = l,\ w' = l - k$. Условия, которым должны удовлетворять целые числа m и n:

(1) $U \equiv a - mu^\circ - nu' = \lambda_1 u^\circ$,

(2) $V \equiv \pm f + mv' - nv^\circ = \lambda_2 v^\circ$,

(3) $W \equiv j + mw^\circ - nw'$ имеет минимальное абсолютное значение.

Решая (1) и (2) для m и n получаем:

$$m = \frac{av^\circ \mp fu'}{u^\circ v^\circ + u'v'} + \frac{\lambda_1 u^\circ v^\circ + \lambda_2 u'v^\circ}{u^\circ v^\circ + u'v'} = \frac{\pm K + L}{J} + \nu_1,$$
$$n = \frac{\pm fu^\circ + av'}{u^\circ v^\circ + u'v'} + \frac{\lambda_2 u^\circ v^\circ - \lambda_1 u^\circ v'}{u^\circ v^\circ + u'v'} = \frac{\pm K}{J} + \nu_2.$$

Пусть $M = [(\pm K + L)/J],\ N = [\pm K/J]$, затем, как и раньше, $|\nu_i| < 2$ и $M - 1 \leqslant m \leqslant M + 2,\ N - 1 \leqslant n \leqslant N + 2$. Допустим $u = a - Mu^\circ - Nu',\ v = \pm f + Mv' - Nv^\circ,\ w = j + Mw^\circ - Nw'$, тогда из Φ получим

$$u^\circ + u' > u > 0, \quad v^\circ > v > -v', \quad w > \frac{\Delta}{J} - w^\circ > -w^\circ.$$

Имеем также, что $u^\circ > u' > 0,\ v^\circ > v' > 0,\ v^\circ > f > 0$. Есть пять решений (1), (2) и (3) в терминах этих M и N и они имеют ту же форму что и для $b - c > c$.
Единственная разница возникает в значениях $d_1,\ d_2,\ d_3,\ e_1^* e_1,\ e_2^* e_2,\ e_3^* e_3$, и в системах знаков в Φ^*.
Используя, что $P^* = PT^*$, получаем

$$\Phi^* = \begin{Vmatrix} -e_1^* e_1 d_1 u^\circ, & \mp e_1^* e_1 d_2 u', & e_1^* e_1 d_3 U \\ \mp e_2^* e_2 d_1 v', & e_2^* e_2 d_2 v^\circ, & \mp e_2^* e_2 d_3 V \\ e_3^* e_3 d_1 w^\circ, & \mp e_3^* e_3 d_2 w', & e_3^* e_3 d_3 W \end{Vmatrix}.$$

Тогда $d_1 = e_1^* e_1,\ d_2 = e_2^* e_2,\ d_3 = e_3^* e_3$ и

$$\Phi^* = \begin{Vmatrix} (e_1^* e_1)^2 u^\circ, & \mp(e_1^* e_1)(e_2^* e_2) u', & (e_1^* e_1)(e_3^* e_3) U \\ \pm(e_2^* e_2)(e_1^* e_1) v', & (e_2^* e_2)^2 v^\circ, & \mp(e_2^* e_2)(e_3^* e_3) V \\ -(e_3^* e_3)(e_1^* e_1) w^\circ, & \mp(e_3^* e_3)(e_2^* e_2) w', & (e_3^* e_3)^2 W \end{Vmatrix}.$$

1) $u < u',\ v > v' :\ U > 0,\ V < 0$. Из Теоремы 1 следует $e_1^* e_1 = \pm 1,\ e_2^* e_2 = -1,\ e_3^* e_3 = \mp 1$, и система знаков в Φ^* IV. Тогда $d_1 = \mp 1,\ d_2 = -1,\ d_3 = \mp 1$.

2) $u < u',\ v' > v > 0 : U < 0,\ V < 0$. Из Теоремы 1 следует $e_1^* e_1 = \pm 1,\ e_2^* e_2 = 1,\ e_3^* e_3 = \pm 1$, и система знаков в Φ^* II. Тогда $d_1 = \mp 1,\ d_2 = 1,\ d_3 = \mp 1$.

3) $u > u',\ v > 0 :\ U > 0,\ V < 0$; что и в случае 1).

4) $u < u^\circ,\ v < 0 : U > 0,\ V < 0$; что и в случае 1).

5) $u > u^\circ,\ v < 0 :\ U < 0,\ V < 0$; что и в случае 2).

$\eta-$сосед $\xi-$ соседа $\{a,\ g,\ l\}$, когда $b > c$.
Это является непосредственным следствием определения.
$\xi-$сосед $\xi-$ соседа в III 2] и IV 2]:
1] $l - k > k$:
Здесь $p_1^* = d_1 p_2,\ p_3^* = d_3(p_2 \mp p_3)$, и $p_2^* = d_2(\kappa p_1 \pm m(p_2 \mp p_3) \mp np_2)$. Тогда

$$T^* = \begin{Vmatrix} 0, & \kappa d_2, & 0 \\ d_1, & \pm(m-n)d_2, & d_3 \\ 0, & -md_2, & \mp d_3 \end{Vmatrix}.$$

Определитель T^* равен 1. Следовательно, $|\kappa| = 1$. Выберем $\kappa = 1$. Пусть $u^\circ = l-k,\ u' = k;\ v^\circ = b,\ v' = b-c;\ w^\circ = g+h,\ w' = g$; тогда

$$\xi(p_2^*) = e_1 d_2(a - mv' + nv^\circ),$$
$$\eta(p_2^*) = e_2 d_2(-f \pm mw^\circ \mp nw'),$$
$$\zeta(p_2^*) = e_3 d_2(j - mu^\circ - nu').$$

Следующие условия должны быть выполнены:

(1) $U \equiv j - mu^\circ - nu' = \lambda_1 u^\circ$,

(2) $V \equiv -a + mv' - nv^\circ = \lambda_2 v^\circ$,

(3) $W \equiv \mp f + mw^\circ - nw'$ имеет минимальное абсолютное значение.

Решая (1) и (2) для m и n получаем:

$$m = \frac{jv^\circ + au'}{u^\circ v^\circ + u'v'} + \frac{-\lambda_1 u^\circ v^\circ + \lambda_2 u'v^\circ}{u^\circ v^\circ + u'v'} = \frac{-H}{F} + \nu_1,$$
$$n = \frac{-au^\circ + jv'}{u^\circ v^\circ + u'v'} + \frac{-\lambda_2 u^\circ v^\circ - \lambda_1 u^\circ v'}{u^\circ v^\circ + u'v'} = \frac{\mp G - H}{F} + \nu_2.$$

Установим $M = [-H/F],\ N = [(-H)/F]$, и $v^\circ > v' > 0,\ u^\circ > u' > 0$, из этого имеем $|\nu_i| < 2$ и $M - 1 \leqslant m \leqslant M + 2,\ N - 1 \leqslant N + 2$.
Пусть $u = j - Mu^\circ - Nu',\ v = -a + Mv' - Nv^\circ,\ w = \mp f + Mw^\circ - Nw'$, тогда из Φ получим

$$u^\circ + u' > u > 0, \quad v^\circ > v > -v', \quad w > \frac{\Delta}{\pm F} - w^\circ > -w^\circ.$$

Тогда решения (1), (2) и (3) в терминах M и N, такой же формы, что и пять решений в двух предыдущих случаях.
Существенная разница возникает в значениях $d_1,\ d_2,\ d_3,\ e_1^* e_1,\ e_2^* e_2,\ e_3^* e_3$, и в системе знаков в Φ^*.

Используя, что $P^* = PT^*$, получаем

$$\Phi^* = \begin{Vmatrix} \mp e_1^* e_1 d_1 v^\circ, & -e_1^* e_1 d_2 V, & \mp e_1^* e_1 d_3 v' \\ e_2^* e_2 d_1 w', & \pm e_2^* e_2 d_2 W, & \mp e_2^* e_2 d_3 w^\circ \\ \pm e_3^* e_3 d_1 u', & \mp e_3^* e_3 d_2 U, & \mp e_3^* e_3 d_3 u^\circ \end{Vmatrix}.$$

Тогда $d_1 = \mp e_1^* e_1,\ d_2 = \pm e_2^* e_2,\ d_3 = \mp e_3^* e_3$ и

$$\Phi^* = \begin{Vmatrix} (e_1^* e_1)^2 v^\circ, & \mp(e_1^* e_1)(e_2^* e_2)V, & (e_1^* e_1)(e_3^* e_3)v' \\ \mp(e_2^* e_2)(e_1^* e_1)w', & (e_2^* e_2)^2 W, & \mp(e_2^* e_2)(e_3^* e_3)w^\circ \\ -(e_3^* e_3)(e_1^* e_1)u', & \pm(e_3^* e_3)(e_2^* e_2)U, & (e_3^* e_3)^2 u^\circ \end{Vmatrix}.$$

1) $u < u',\ v > v' :\ U > 0,\ V < 0$. Из Теоремы 1 следует $e_1^* e_1 = \mp 1,\ e_2^* e_2 = -1,\ e_3^* e_3 = \pm 1$, и система знаков в Φ^* IV. Тогда $d_1 = 1,\ d_2 = \mp 1,\ d_3 = -1$.

2) $u < u'$, $v' > v > 0 : U < 0$, $V < 0$. Из Теоремы 1 следует $e_1^* e_1 = \pm 1$, $e_2^* e_2 = 1$, $e_3^* e_3 = \pm 1$, и система знаков в Φ^* I. Тогда $d_1 = -1$, $d_2 = \pm 1$, $d_3 = -1$.

3) $u > u'$, $v > 0 :$ $U > 0$, $V < 0$; что и в случае 1).

4) $u < u^\circ$, $v < 0 : U > 0$, $V < 0$; что и в случае 1).

5) $u > u^\circ$, $v < 0 :$ $U < 0$, $V < 0$; что и в случае 2).

2] $k > l - k :$
Здесь $p_2^* = d_2(p_2 \mp p_3)$, $p_3^* = d_3 p_2$, и $p_1^* = d_1(\kappa p_1 + m p_2 + n p_3)$. Тогда

$$T^* = \begin{Vmatrix} \kappa d_1, & 0, & 0 \\ m d_1, & d_2, & d_3 \\ n d_1, & \mp d_2, & 0 \end{Vmatrix}.$$

Определитель T^* равен 1, следовательно, $|\kappa| = 1$. Выберем $\kappa = 1$, тогда

$$\xi(p_1^*) = e_1 d_1 (a \mp mb - nc),$$
$$\eta(p_1^*) = e_2 d_1 (-f + mg \mp nh),$$
$$\zeta(p_1^*) = e_3 d_1 (j \pm mk + nl).$$

Следующие условия должны быть выполнены:

(1) $U \equiv -f + mg \mp nh = \lambda_1(g + h)$,

(2) $V \equiv j \pm mk + nl = \lambda_2 k$,

(3) $W \equiv a \mp mb - nc$ имеет минимальное абсолютное значение.

где $|\lambda_i| < 1$, $\lambda_i \neq 0$. Решая (1) и (2) для m и n получаем:

$$m = \frac{fl \mp hj}{gl + hk} + \frac{\lambda_1 gl + \lambda_1 hl \pm \lambda_2 hk}{gl + hk} = \frac{B}{A} + \nu_1,$$
$$n = \frac{-gj \mp fk}{gl + hk} + \frac{\lambda_2 gk \mp \lambda_1 gk \mp \lambda_1 hk}{gl + hk} = \frac{C}{A} + \nu_2.$$

Из условий на λ_i и из Теоремы 1 для g, h, l и k, имеем $|\nu_i| < 2$.
Поскольку $b > c$, Теорема 1 требует, чтобы $h > f$ для III;
Тогда для III случая:

$$-1 < \frac{B}{A} < 1, \quad -1 < \frac{C}{A} < 0;$$

Следовательно $-2 \leqslant m \leqslant 2$, $-2 \leqslant n \leqslant 1$.
Для IV случая:

$$0 < \frac{B}{A} < 2, \quad -1 < \frac{C}{A} < 1;$$

Следовательно $-1 \leqslant m \leqslant 3$, $-2 \leqslant n \leqslant 2$.
Прямая перестановка этих значений в (1) и (2) показывает, что только следующие пары являются решениями (1) и (2).

	m	n	Случай	W	Условия для решений
(i)	-1	0	III	a+b	f<h, j<2k
(ii)	0	-1	III, IV	a+c	j+k>l
(iii)	0	0	III, IV	a	j<k
(iv)	1	-1	III	a-b+c	|j+k-l|<k
(v)	1	0	IV	a+b	j<2k
(vi)	1	1	IV	a+b-c	j+l<2k
(vii)	2	0	IV	a+2b	f+h>g, 3k>j>k.

Значения W все положительны. Среди решений для III, (iv) соответствует наименьшему значению W. С другой стороны, условие $|j+k-l| < k$ всегда выполняется как следствие условий $j+k > l,\ j > 0,\ l > k > 0$ из Теоремы 1. То есть, (iv) всегда является решением (1), (2) и (3) для III.
Среди решений для IV, (iii) соответствует наименьшему значению W, следовательно (iii) является решением (1), (2) и (3), если $j < k$. Когда $j > k$, очевидно, что (vi) не является решением (1) и (2); тогда, (ii) соответствует наименьшему значению W. Следовательно, (ii) является решением (1), (2) и (3) за исключением случаев, когда $j+k < l$. Но этого не происходит, когда $k > l-k,\ j > k$. То есть, когда $j > k$ следует, что (ii) всегда решение (1), (2) и (3).
Определение $d_1,\ d_2,\ d_3,\ e_1^*e_1,\ e_2^*e_2,\ e_3^*e_3$ и система знаков в Φ^* следующая:

III:

$$T^* = \begin{Vmatrix} d_1, & 0, & 0 \\ d_1, & d_2, & d_3 \\ -d_1, & -d_2, & 0 \end{Vmatrix}.$$

Используя, что $P^* = PT^*$, получаем

$$\Phi^* = \begin{Vmatrix} e_1^*e_1d_1(a-b+c), & -e_1^*e_1d_2(b-c), & -e_1^*e_1d_3b \\ e_2^*e_2d_1(-f+g+h), & e_2^*e_2d_2(g+h), & e_2^*e_2d_3g \\ e_3^*e_3d_1(j+k-l), & -e_3^*e_3d_2(l-k), & e_3^*e_3d_3k \end{Vmatrix}.$$

Тогда $d_1 = e_1^*e_1,\ d_2 = e_2^*e_2,\ d_3 = e_3^*e_3$; Из Теоремы 1 следует, что $e_1^*e_1 = -1,\ e_2^*e_2 = -1,\ e_3^*e_3 = 1$, и система знаков в Φ^* V. Тогда $d_1 = -1,\ d_2 = -1,\ d_3 = 1$.

IV: 1) $j > k$:

$$T^* = \begin{Vmatrix} d_1, & 0, & 0 \\ 0, & d_2, & d_3 \\ -d_1, & d_2, & 0 \end{Vmatrix}.$$

Используя, что $P^* = PT^*$, получаем

$$\Phi^* = \begin{Vmatrix} e_1^*e_1d_1(a-c), & e_1^*e_1d_2(b-c), & e_1^*e_1d_3b \\ -e_2^*e_2d_1(f+h), & e_2^*e_2d_2(g+h), & e_2^*e_2d_3g \\ -e_3^*e_3d_1(l-j), & -e_3^*e_3d_2(l-k), & -e_3^*e_3d_3k \end{Vmatrix}.$$

Тогда $d_1 = e_1^*e_1,\ d_2 = e_2^*e_2,\ d_3 = -e_3^*e_3$; Из Теоремы 1 следует, что $e_1^*e_1 = -1,\ e_2^*e_2 = 1,\ e_3^*e_3 = -1$, и система знаков в Φ^* II. Тогда $d_1 = -1,\ d_2 = 1,\ d_3 = 1$.

IV: 2) $j < k$:

$$T^* = \begin{Vmatrix} d_1, & 0, & 0 \\ 0, & d_2, & d_3 \\ 0, & d_2, & 0 \end{Vmatrix}.$$

Используя, что $P^* = PT^*$, получаем

$$\Phi^* = \begin{Vmatrix} e_1^* e_1 d_1 a, & e_1^* e_1 d_2 (b-c), & e_1^* e_1 d_3 b \\ -e_2^* e_2 d_1 f, & e_2^* e_2 d_2 (g+h), & e_2^* e_2 d_3 g \\ e_3^* e_3 d_1 j, & -e_3^* e_3 d_2 (l-k), & -e_3^* e_3 d_3 k \end{Vmatrix}.$$

Тогда $d_1 = e_1^* e_1,\ d_2 = e_2^* e_2,\ d_3 = -e_3^* e_3$; Из Теоремы 1 следует, что $e_1^* e_1 = 1,\ e_2^* e_2 = -1,\ e_3^* e_3 = -1$, и система знаков в Φ^* V. Тогда $d_1 = 1,\ d_2 = -1,\ d_3 = 1$.

4 Приложение

Определение 2. *Решеткой является совокупность всех точек $\mathbb{R}^3$, координаты которых являются целыми числами.*

Определение 3. *Если ξ, η, ζ являются тремя независимыми линейными формами с вещественными коэффициентами, однородными от вещественных переменных x_1, x_2, x_3 и имеют определитель $\triangle \neq 0$, то $|\xi| \leq \rho, |\eta| \leq \sigma, |\zeta| \leq \tau$, где ρ, σ, τ - три произвольные положительные константы, является параллелепипедом с центром симметрии в начале координат и гранями, параллельными парам плоскостей $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$. Такой параллелепипед обозначается символом $\{\rho, \sigma, \tau\}$. Величины ρ, σ, τ будут называться параметрами параллелепипеда.*

Определение 4. *Если $\{\rho, \sigma, \tau\}$ не содержит точки решетки, отличной от начала координат, то он называется свободным.*

Определение 5. *Параллелепипед ρ, σ, τ называется экстремальным, если он свободен, и если в то же время, на каждой из его граней есть по крайней мере одна точка решетки, отличная от тех, которые могут содержаться в ребрах. Существование хотя бы одного экстремального параллелепипеда будет установлено в дальнейшем. Таким образом, экстремальный параллелепипед таков, что ни один из его параметров не может быть увеличен без введения точек решетки во внутреннюю часть параллелепипеда.*

Определение 6. *Операция взятия меньшего положительного значения для ρ называется понижением $\xi-$граней, а операция взятия большего значения для ρ называется поднятием $\xi-$граней. Аналогичные определения для спуска и поднятия η и $\zeta-$граней. В дальнейшем накладываются некоторые ограничения на ξ, η и ζ, а именно, они должны быть независимыми линейными формами такими, что ни одно из уравнений $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ не удовлетворяется какой-то точкой решетки, за исключением начала координат, и это может быть принято без существенного ограничения, что $\triangle > 0$. Из-за ограничения на тип линейных форм, может быть не более одной точки решетки в любой плоскости $\xi = const$, $\eta = const$, $\zeta = const$. На поверхности каждого экстремального параллелепипеда ровно шесть точек решетки, по одной и только по одной на каждой грани.*

Определение 7. *Если $\{\rho, \sigma, \tau\}-$ произвольный экстремальный параллелепипед для ξ, η и ζ, то точки решетки на $\eta-$ и $\zeta-$ гранях, должны лежать в разных плоскостях $\xi = const$ и никто из них не лежит в плоскости $\xi = 0$. Опустим $\xi-$грань пока она не коснется первой пары точек решетки в $\eta-$ или $\zeta-$гранях. Если эти точки решетки в $\eta-$грани, то $\eta-$грань может быть поднята так, чтобы оставить параллелепипед все еще свободным. С другой стороны, если эти точки находятся в $\zeta-$гранях, тогда вместо этого могут быть подняты $\zeta-$грани. Поднимем возможную пару граней, пока параллелепипед не станет экстремальным. Новый экстремальный параллелепипед, однозначно определенный таким образом, будет называться $\xi-$соседом для $\{\rho, \sigma, \tau\}$. Аналогичные определения для $\eta-$ и $\zeta-$соседей для $\{\rho, \sigma, \tau\}$. Будет видно, что ограничения на ξ, η и ζ требуют, чтобы количество экстремальных параллелепипедов было бесконечно, если существование одного параллелепипеда будет установлено. Для* *каждого из них, без исключения, будет три соседа; последовательность, полученная последовательными $\xi-$соседями, начиная с произвольного экстремального параллелепипеда, представляет собой последовательность, в которой нет двух одинаковых элементов, поскольку первый параметр меньше в каждом элементе, чем в предыдущем. Совокупность таких параллелепипедов, принадлежащих ξ, η и ζ называется цепочкой экстремальных параллелепипедов для ξ, η и ζ.*

Опеределение 8. *Октаэдр, симметричный относительно начала координат и имеющий каждую вершину в точке решетки, будет называться октаэдром решетки, если он не содержит на своей поверхности и в своей внутренней части никаких точек решетки, кроме начала координат и его вершин. Для таких решетчатых октаэдров определитель координат трех вершин p_1, p_2, p_3, никакие две из которых не являются симметричными по отношению к началу координат, равен ± 1 или ± 2. Если определитель равен ± 2, то каждая точка вида*

$$p = \left(\gamma_1 + \frac{\delta}{2}\right) p_1 + \left(\gamma_2 + \frac{\delta}{2}\right)) p_2 + \left(\gamma_3 + \frac{\delta}{2}\right)) p_3,$$

где γ_i, $\delta-$ целые, является точкой решетки.

Опеределение 9. *Если $f(x_1, x_2, x_3)$ является функцией, удовлетворяющей следующим условиям*

1. $f(x_1, x_2, x_3) > 0$
2. $f(tx_1, tx_2, tx_3) = tf(x_1, x_2, x_3)$
3. $f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \leqslant f(x_1, x_2, x_3) + f(y_1, y_2, y_3)$
4. $f(-x_1, -x_2, -x_3) = f(x_1, x_2, x_3)$

тогда $f(x_1, x_2, x_3) \leqslant 1$ определяет выпуклое тело $\Re$ с центром симметрии в начале координат. Функцию $f(x_1, x_2, x_3)$ называют целевой функцией радиального расстояния. Минковский показал существование такой функции для произвольного выпуклого тела с центром в начале координат. Если решетчатый октаэдр имеет все свои вершины на поверхности $\Re$ и если три из этих вершин лежат не в одной плоскости и обозначаются $A_1 : (a_{11}, a_{12}, a_{13})$, $A_2 : (a_{21}, a_{22}, a_{23})$, $A_3 : (a_{31}, a_{32}, a_{33})$, тогда преобразование

$$x_1 = a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + a_{31}X_3$$

$$x_2 = a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + a_{32}X_3$$

$$x_3 = a_{13}X_1 + a_{23}X_2 + a_{33}X_3,$$

где $|a_{ij}| = \pm 1$ или ± 2, переводит $f(x_1, x_2, x_3)$ в $F(X_1, X_2, X_3)$, которая удовлетворяет условиям (1)-(4).
Минковский показал следующие результаты:
1) Если определитель $|a_{ij}| = \pm 1$, то $\Re$ не содержит в своей внутренней части никаких точек решетки (x_1, x_2, x_3) отличных от начала координат, если и только если

$$F(X_1, X_2, X_3) \geqslant 1$$

для каждого из двадцати двух следующих наборов значений (X_1, X_2, X_3) :

$$(0, 1, \pm 1), (1, 0, \pm 1), (1, \pm 1, 0), (1, \pm 1, \pm 1),$$

$$(1, \pm 1, \pm 2), (1, \pm 2, \pm 1), (2, \pm 1, \pm 1),$$

где должны использоваться всевозможные комбинации знаков.
2) Если определитель $|a_{ij}| = \pm 2$, *то* $\Re$ *не содержит в своей внутренности никакие точки решетки за исключением начала координат, если и только если*

$$F(X_1, X_2, X_3) \geqslant 1$$

для каждого из следующих четырех наборов значений (X_1, X_2, X_3) :

$$\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right).$$

Теорема 5. *В свободном параллелепипеде для* ξ, η *и* ζ *неравенство* $\rho\sigma\tau < \triangle$ *всегда выполняется.*

Доказательство. Параллелепипед $|\xi| \leqslant \rho$, $|\eta| \leqslant \sigma$, $|\zeta| \leqslant \tau$ — это выпуклое тело с центром симметрии в начале координат. Объем такого параллелепипеда равен $V = 2^3\rho\sigma\tau/\triangle$. Предположим, что $\rho\sigma\tau > \triangle$, тогда $V > 2^3$ и параллелепипед должен содержать по крайней мере две точки решетки, отличные от начала координат в его внутренней части. Но тогда этот параллелепипед не свободен, поэтому $\rho\sigma\tau \leqslant \triangle$. Предположим, $\rho\sigma\tau = \triangle$, тогда $V = 2^3$ и параллелепипед, если он не содержит точки решетки, отличные от начала координат в своей внутренней части, должен содержать не менее четырнадцати точек решетки на своей поверхности. Невозможно распределить эти четырнадцать точек решетки по шести граням параллелепипеда, не имея хотя бы на одной грани две или более точек решетки. Но это противоречит гипотезе, что ни одна из плоскостей $\xi = 0$, $\eta = 0$ и $\zeta = 0$ не содержит точки решетки, отличные от начала координат. Противоречие. ∎

Именно из этой теоремы можно установить существование хотя бы одного экстремального параллелепипеда. Пусть $\{\rho_0,\ \sigma_0,\ \tau_0\}$– произвольный параллелепипед ξ, η и ζ, тогда $\{\theta\rho_0,\ \theta\sigma_0,\ \theta\tau_0\}$, где $0 < \theta < 1$, параллелепипед, аналогичный исходному и помещенный в начало координат. Если θ уменьшается к нулю, тогда три высоты, а также объем параллелепипеда стремяться к нулю. Когда θ равна достаточно малой константе θ_0, параллелепипед будет полностью лежать внутри куба с центром в начале координат и с ребрами параллельными трём осям. Параллелепипед $\{\theta_0\rho_0,\ \theta_0\sigma_0,\ \theta_0\tau_0\}$ является свободным, так как он не может содержать внутри себя точки решетки отличные от начала координат. Зафиксируем два последних параметра, будем увеличивать первый параметр параллелепипеда $\{\rho,\ \theta_0\sigma_0,\ \theta_0\tau_0\}$ непрерывно от $\rho = \theta_0\rho_0$ до тех пор, пока параллелепипед начнет содержать точки решетки на $\xi-$грани, которые не на $\eta-$ или $\zeta-$гранях; паралллелепипед остается при этом свободным. Пусть это соответствующее значение ρ будет ρ_1. Такое число ρ_1 существует. Тогда $p_1 < \triangle/(\theta_0^2\sigma_0\tau_0)$. Увеличим второй параметр $\{\rho_1,\ \sigma,\ \theta_0\tau_0\}$ непрерывно от $\sigma = \theta_0\sigma_0$ до тех пор, пока $\eta-$грань начнет содержать точки решетки, которые ни в $\xi-$, ни в $\zeta-$гранях, параллелепипед останется свободным. Пусть σ_1 соответствующее значение второго параметра σ. Тогда $\sigma_1 < \triangle/(\theta_0\rho_1\tau_0)$. Затем, наконец, увеличим третий параметр $\{\rho_1,\ \sigma_1,\ \tau\}$ непрерывно от

$\tau = \theta_0\tau_0$ до тех пор, пока $\zeta-$грань начнет содержать точки решетки, которые $\xi-$, ни в $\eta-$гранях, параллелепипед останется свободным. Пусть τ_1 новое значение третьего параметра τ. Тогда $\tau_1 < \triangle/(\rho_1\sigma_1)$, и параллелепипед $\{\rho_1, \sigma_1, \tau_1\}$ является экстремальным, а также свободным.

Сразу видно, как Теорема 1 применяется для доказательства существования трех соседей данного экстремального параллелепипеда. Эта теорема гарантирует, что параметры не станут бесконечными. Трое соседей, однако, не всегда существуют, когда одно из уравнений $\xi = 0,\ \eta = 0$ или $\zeta = 0$ удовлетворяются другими точкам решетки, кроме начала координат; в этом случае уменьшение одного из параметров до нуля может быть необходимо, прежде чем другой может быть увеличен; следовательно, когда один параметр уменьшается к нулю, то вся область определения находится в плоскости и не имеет внутренности. Оба других параметра можно бесконечно увеличивать. Область, соответствующая соседнему объекту, больше не параллелепипед, а целая плоскость.

Теорема 6. *Параллелепипед $\{a,\ g,\ l\}$ содержит, по бокам от начала координат, ровно шесть точек решетки, по одной на каждой грани и на противоположных гранях точки решетки с противоположными знаками.*

Доказательство. Поскольку $\xi,\ \eta$ и ζ однородные линейные формы, абсолютное значение любой из этих линейных форм то же самое для точки p с координатами (p_1, p_2, p_3), как и для точки $-p$ с координатами $(-p_1, -p_2, -p_3)$. Поэтому, если p - точка решетки на поверхности $\{a, g, l\}$, то и $-p$. Существует шесть граней параллелепипеда, и каждая из них может содержать не более одной точки решетки. Предположим, что две точки решетки p и q находятся на одной грани, тогда точка $p - q$ с координатами $(p_1 - q_1, p_2 - q_2, p_3 - q_3)$ приведет к тому, что одна из линейных форм ξ, η и ζ будет стремиться к 0. Но это противоречит гипотезе о том, что начало координат является единственной точкой решетки в любой из плоскостей $\xi = 0,\ \eta = 0$ или $\zeta = 0$. Из определения экстремального параллелепипеда каждая грань должна содержать по крайней мере одну точку решетки, которая не находится ни в одной другой грани. Таким образом, каждая грань содержит ровно одну точку, и эта точка решетки, таким образом, не находится на ребре. Вся поверхность тогда содержит ровно шесть точек решетки. ∎

Теорема 7. *Всегда можно выбрать из решетки точек $\{a,\ g,\ l\}$ в одну и только в одну сторону три точки решетки $p_1 :\ (p_1^{(1)},\ p_2^{(1)},\ p_3^{(1)}),\ p_2 :\ (p_1^{(2)},\ p_2^{(2)},\ p_3^{(2)}),\ p_3 :\ (p_1^{(3)},\ p_2^{(3)},\ p_3^{(3)})$ на соответствующих гранях $\xi = e_1 a,\ \eta = e_2 g,\ \zeta = e_3 l$, которые лежат не напротив друг друга, так, что $e_1e_2e_3 = +1$ и так, что когда матрица коэффициентов линейных форм $e_1\xi,\ e_2\eta,\ e_3\zeta$ преобразуется с помощью*

$$P = \begin{Vmatrix} p_1^{(1)} & p_1^{(2)} & p_1^{(3)} \\ p_2^{(1)} & p_2^{(2)} & p_2^{(3)} \\ p_3^{(1)} & p_3^{(2)} & p_3^{(3)} \end{Vmatrix} \quad \text{в} \quad \Phi = \begin{Vmatrix} a & \pm b & \pm c \\ \pm f & g & \pm h \\ \pm j & \pm k & l \end{Vmatrix}$$

то числа $a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h,\ j,\ k$ и l будут положительны и матрица Φ будет иметь одну из следующих шести систем знаков:

I	II	III	IV	V	VI
$+\ +\ +$	$+\ -\ -$	$+\ -\ -$	$+\ +\ -$	$+\ -\ +$	$+\ -\ -$
$-\ +\ -$	$+\ +\ +$	$-\ +\ -$	$-\ +\ +$	$+\ +\ -$	$-\ +\ -$
$-\ -\ +$	$-\ -\ +$	$+\ +\ +$	$+\ -\ +$	$-\ +\ +$	$-\ -\ +$

и $a > b,\ a > c,\ g > f,\ g > h,\ l > j,\ l > k.$

В доказательстве этой теоремы будет использовано несколько лемм.

Лемма 3. *Никакие две из шести точек решетки на поверхности экстремального параллелепипеда* $\xi,\ \eta$ *и* ζ *не могут лежать в одном и том же октанте породжденного плоскостями* $\xi = 0,\ \eta = 0,\ \zeta = 0$.

Доказательство. Предположим, что две из этих шести точек, r_1 и r_2 находятся в одном и том же октанте. Обозначим через $\xi(r_1),\ \xi(r_2),\ \eta(r_1),\ \eta(r_2),\ \zeta(r_1)$ и $\zeta(r_2)$ значения $\xi,\ \eta$ и ζ для r_1 и r_2. Тогда

$$\xi(r_1) = e_1 k_1, \quad \eta(r_1) = e_2 \lambda_1, \quad \zeta(r_1) = e_3 \mu_1$$

$$\xi(r_2) = e_1 k_2, \quad \eta(r_2) = e_2 \lambda_2, \quad \zeta(r_2) = e_3 \mu_2$$

где $e_i = \pm 1\ (i = 1, 2, 3)$ и

$$0 < k_i \leqslant a, \quad 0 < \lambda_i \leqslant g, \quad 0 < \mu_i \leqslant l \quad (i = 1, 2).$$

За счёт распределительного свойства линейной формы имеем

$$\xi(r_1 - r_2) = e_1(k_1 - k_2),\ \eta(r_1 - r_2) = e_2(\lambda_1 - \lambda_2),\ \zeta(r_1 - r_2) = e_3(\mu_1 - \mu_2).$$

Из Теоремы 6 точки r_1 и r_2 ни в одной плоскости $\xi = const,\ \eta = const$ и $\zeta = const$. Из этого следует, что

$$0 \leqslant |\xi(r_1 - r_2)| < a,\ 0 \leqslant |\eta(r_1 - r_2)| < g,\ 0 \leqslant |\zeta(r_1 - r_2)| < l.$$

поскольку r_1 и r_2 были приняты различными точками, видно, что $r_1 - r_2$ не является началом координат. Тогда точка решетки $r_1 - r_2$ может находиться в пределах экстремального параллелепипеда, что противоречит определению такого параллелепипеда. Поэтому, предположение о том, что две точки могут находиться в одном октанте неверно. ∎

Лемма 4. *Если* $r_1,\ r_2,\ r_3,\ -r_1,\ -r_2,\ -r_3$ *шесть целых точек на поверсхости экстремального параллелепипеда* $\{a,\ g,\ l\}$, *тогда существует единственный способ выбрать три точки решетки* $q_1,\ q_2$ *и* q_3 *из этих шести,так, что,* q_1 *находится в плоскости* $\xi = a,\ q_2$ *в плоскости* $\eta = g$, *и* q_3 *в плоскости* $\zeta = l$. *В матрице*

$$\Psi = \begin{Vmatrix} \xi(q_1), & \xi(q_2), & \xi(q_3) \\ \eta(q_1), & \eta(q_2), & \eta(q_3) \\ \zeta(q_1), & \zeta(q_2), & \zeta(q_3) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a, & \pm b, & \pm c \\ \pm f, & g, & \pm h \\ \pm j, & \pm k, & l \end{Vmatrix},$$

где

$$a = |\xi(q_1)|, \qquad b = |\xi(q_2)|, \qquad c = |\xi(q_3)|,$$
$$f = |\eta(q_1)|, \qquad g = |\eta(q_2)|, \qquad h = |\eta(q_3)|,$$
$$j = |\zeta(q_1)|, \qquad k = |\zeta(q_2)|, \qquad l = |\zeta(q_3)|,$$

система знаков должна быть одна из следующих двадцати четырех:

1			*2*			*3*			*4*			*5*			*6*		
+	+	+	+	+	−	+	−	+	+	−	−	+	−	−	+	−	−
+	+	−	+	+	+	+	+	−	+	+	−	+	+	+	+	+	−
+	−	+	+	−	+	+	+	+	+	+	+	+	−	+	+	−	+

7			*8*			*9*			*10*			*11*			*12*		
$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$

13			*14*			*15*			*16*			*17*			*18*		
$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$
$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$

19			*20*			*21*			*22*			*23*			*24*		
$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$
$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

а также, $a > b, a > c, g > f, g > h, l > j, l > k$.

Доказательство. Первое утверждение следует непосредственно из Теоремы 6. Докажем, что возможны только двадцать четыре системы знаков: За расположение точек в пространстве отвечают столбцы. Для первого столбца возможно всего четыре варианта, т.к. точка q_1 лежит в плоскости $\xi = a$, и она может находится в одном из четырех октантов. Когда мы зафиксируем точку q_1, автоматически зафиксируется точка $-q_1$, таким образом будут "заняты" два октанта. Для второй точки, q_2, которая находится в плоскости $\eta = g$, возможно расположение только в трех октантах, т.к один из октантов будет занят либо точкой q_1, либо противоположной ей точкой $-q_1$,. Для последней точки, q_3, возможно расположение только в двух октантах, т.к остальные два будут заняты. Следовательно, для первого столбца есть четыре варианта, для второго - три, для третьего - два. Тем самым получается что возможны только двадцать четыре системы знаков. Неравенства в конце леммы являются следствием определения экстремального параллелепипеда и ограничений, наложенных на ξ, η и ζ. ■

Двадцать четыре системы знаков можно разделить на шесть классов следующим образом:

Выберем $e_1,\ e_2$ и e_3 равные $+1$ или -1 независимо друг от друга; затем $e_1\xi(e_1q_1) = \xi(q_1),\ e_2\eta(e_2q_2) = \eta(q_2)$, и $e_3\zeta(e_3q_3) = \zeta(q_3)$. Пусть $p_1 = e_1q_1,\ p_2 = e_2q_2$, и $p_3 = e_3q_3$. Матрица

$$\Phi = \begin{Vmatrix} e_1\xi(p_1), & e_1\xi(p_2), & e_1\xi(p_3) \\ e_2\eta(p_1), & e_2\eta(p_2), & e_2\eta(p_3) \\ e_3\zeta(p_1), & e_3\zeta(p_2), & e_3\zeta(p_3) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} e_1e_1\xi(q_1), & e_1e_1\xi(q_2), & e_1e_1\xi(q_3) \\ e_2e_2\eta(q_1), & e_2e_2\eta(q_2), & e_2e_2\eta(q_3) \\ e_3e_3\zeta(q_1), & e_3e_3\zeta(q_2), & e_3e_3\zeta(q_3) \end{Vmatrix},$$

отличается от матрицы Ψ только знаком, прикрепленным к каждому элементу.

Лемма 5. *Для каждой из двадцати четырех систем знаков в матрице* Ψ, *числа* $e_1,\ e_2$ *и* e_3 *могут быть выбраны в одном и только одном случае так, что* $e_1e_2e_3 = +1$ *и что* *матрица Φ имеет одну из следующих шести систему знаков:*

I			*II*			*III*			*IV*			*V*			*VI*		
+	+	+	+	−	−	+	−	−	+	+	−	+	−	+	+	−	−
−	+	−	+	+	+	−	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	−
−	−	+	−	−	+	+	+	+	+	−	+	−	+	+	−	−	+

Доказательство. Шесть из двадцати четырех систем идентичны с этими шестью. Краткая проверка покажет, какие значения следует принимать для e_1, e_2 и e_3 в других восемнадцати случаях. Следующая таблица покажет в каждом случае e_i, которые должны быть приняты отрицательными, а также дает систему знаков, которую матрица Φ предполагает при этом выборе e_i.

1. e_2, e_3, VI;	2. e_1, e_3, III;	3. e_1, e_2, II;	4. e_1, e_3, IV;
5. e_1, e_2, V;	6. e_2, e_3, I;	7. e_2, e_3, III;	8. e_1, e_3, VI;
9. e_1, e_3, I;	10. никто, V;	11. e_2, e_3, IV;	12. никто, II;
13. e_1, e_2, IV;	14. e_1, e_3, II;	15. e_1, e_3, V;	16. никто, I;
17. e_1, e_2, III;	18. никто, VI;	19. e_1, e_2, I;	20. e_2, e_3, V;
21. e_2, e_3, II;	22. никто, IV;	23. e_1, e_2, VI;	24. никто, III.

Шесть систем знаков $I - VI$ будут называться нормальными системами. ■

В более общем случае, если за преобразованием с одним выбором e_i следует преобразование с другим выбором e'_i, тогда общий результат — это результат одного преобразования, в котором выбор e''_i должен быть выбран как $e''_i = e_i e'_i$. Видно, что любой выбор e_i, кроме перечисленных выше, преобразует матрицу Ψ в матрицу, которая не имеет ни одной из шести нормальных систем, но которая имеет другую из восемнадцати других систем. Например, система 1 преобразуется в систему 23 $e_2 = 1, e_1 = e_3 = -1$.

Примечательно, что лемма с таким же успехом могла быть заявлена так: существует уникальный способ выбора целых чисел e_1, e_2 и e_3 так, что произведение $e_1 e_2 e_3 = -1$ и так, что матрица Φ имеет одну из шести нормальных систем знаков. Это очевидно, если заметить, что изменение всех знаков одновременно не влияет на матрицу Φ.

Экстремальные параллепипеды должны быть классифицированы по нормальной системе знаков в Φ, то есть по шести различным типам распределений точек решетки на поверхности параллелепипеда.

Теорема 3 доказывается в комбинированных результатах Лемм 4 и 5; когда q_i и e_i однозначно определены, так же как и p_i.

Теорема 8. *По мере того, как нормальная система знаков Φ является системой $I, II, ...,$ или VI, элементы матрицы Φ удовлетворяют следующим условиям:*

I	*II*	*III*
$b+c>a$, $f>h$ *или* $j>k$	$f+h>g$ $k>j$ *или* $b>c$	$j+k>l$ $c>b$ *или* $h>f$

IV	*V*	*VI*
$b>c$ *или* $h>f$ *или* $j>k$	$c>b$ *или* $f>h$ *или* $k>j$	$b+c=a$, $f+h=g$, $j+k=l$;

среди двух или трех условий, разделенных словом "или" , по крайней мере одно должно выполняться каждый раз.

Доказательство.
Доказательства отдельных случаев следуют по порядку:
I. В этом случае

$$e_1\xi(p_1)=a,\quad e_1\xi(p_2)=b,\quad e_1\xi(p_3)=c,$$

$$e_2\eta(p_1)=-f,\quad e_2\eta(p_2)=g,\quad e_2\eta(p_3)=-h,$$

$$e_3\zeta(p_1)=-j,\quad e_3\zeta(p_2)=-k,\quad e_3\zeta(p_3)=l.$$

Значения $\xi,\ \eta$ и ζ для точки решетки $p=p_2+p_3$

$$\xi(p)=\xi(p_2)+\xi(p_3)=e_1(b+c),$$

$$\eta(p)=\eta(p_2)+\eta(p_3)=e_2(g-h),$$

$$\zeta(p)=\zeta(p_2)+\zeta(p_3)=e_3(-k+l),$$

Эта точка p, очевидно, не является началом кооринат, поэтому $|\xi(p)|$ имеет значение $b+c>0$. Тогда точка p не может быть во внутренней части параллелепипеда. Поэтому, η и ζ имеют абсолютные значения меньше чем g и l, соответственно, это следует из $|\xi(p)|\geqslant a$, т.е. $b+c\geqslant a$. Предположим, что $b+c=a$, тогда $\xi(p)=e_1a$, но это значение $\xi(p_1)$. Существует не более одной точки решетки в плоскости $\xi(p)=e_1a$, следовательно, $p=p_1$. Для этого требуется, чтобы $\eta(p)=\eta(p_1)=-e_2f$ в то время как было $\eta(p)=e_2(g-h)$; тогда $g-h=-f$. Но это не возможно, так как $g>h$ и $f>0$ в силу Теоремы 7. Таким образом, условие $b+c>a$ доказано.
Значения $\xi,\ \eta$ и ζ для точки решетки $p=-p_1+p_2+p_3$

$$\xi(p)=-\xi(p_1)+\xi(p_2)+\xi(p_3)=e_1(-a+b+c),$$

$$\eta(p)=-\eta(p_1)+\eta(p_2)+\eta(p_3)=e_2(f+g-h),$$

$$\zeta(p)=-\zeta(p_1)+\zeta(p_2)+\zeta(p_3)=e_3(j-k+l).$$

Так как $a>b,\ a>c$ и $b+c>a$, следует, что $a>b+c-a>0$, т.е. $a>|\xi(p)|>0$. Тогда p не является началом координат и, следовательно, не находится внутри параллелепипеда. Из соотношений $g>h$ и $l>k$ следует, что $f+j-h>0$ и $j-k+l>0$, так что либо $f+j-h\geqslant g$ или $j-k+l\geqslant l$ должно выполняться, чтобы точка p не была внутренней для параллелепипеда. Следовательно, одно из неравенств $f\geqslant h$ и $j\geqslant k$ должно выполняться. Знаки равенства в этих неравентвах не могут выполняться; предположим, что $f=h$ то, поскольку никакие две точки решетки не могут лежать в одной плоскости $\eta=const$, из этого следует, что $p_1=p_3$. Но это противоречит тому факту, что $p_1,\ p_2$ и p_3 три разных точки. Аналогичное противоречие достигается, если предположить, что $j=k$. Необходимость условий I доказана.
II. Пусть a_{ij} - элемент в $i-$той строке и $j-$ом столбце матрицы коэффициентов линейных форм $\xi,\ \eta$ и ζ. Пусть $\xi'=a_{22}x_1'+a_{23}x_2'+a_{21}x_3',\ \eta'=a_{32}x_1'+a_{33}x_2'+a_{31}x_3',\ \zeta'=a_{12}x_1'+a_{13}x_2'+a_{11}x_3'$; это переименование осей и линейных форм следующим образом: $\xi'=\eta,\ \eta'=\zeta,\ \zeta'=\xi,\ x_1'=x_2,\ x_2'=x_3$ и $x_3'=x_1$. Определитель матрицы коэффициентов $\xi',\ \eta'$ и ζ' такой же, как и для $\xi,\ \eta$ и ζ.
Экстремальный параллелепипед $\{a,\ g,\ l\}$ для $\xi,\ \eta$ и ζ и экстремальный параллелепипед $\{g,\ l,\ a\}'$ для $\xi',\ \eta'$ и ζ'. Теоремы 5, 6 и 7 применяются таким образом, чтобы получить матрицы P' и Φ' аналогично матрицам P и Φ. Так как нормальная система знаков в

Φ это II, тогда в Φ' это I. Условия $b'+c'>a'$; $f'>h'$ или $j'>k'$ которые справедливы для Φ', могут быть изменены посредством отношений между $\xi,\ \eta,\ \zeta$ и $\xi',\ \eta'$ и ζ' и $f+h>g; k>j$ или $b>c$ для Φ.

III. Если нормальныя система знаков в Φ равна III, тогда сделаем преобразование $\xi'=\zeta,\ \eta'=\xi,\ \zeta'=\eta,\ x_1'=x_3,\ x_2'=x_1$ и $x_3'=x_2$. Таким образом, как и в случае II, получаются условия: $j+k>l$; $c>b$ или $h>f$.

IV. В этом случае

$$e_1\xi(p_1)=a,\quad e_1\xi(p_2)=b,\quad e_1\xi(p_3)=-c,$$
$$e_2\eta(p_1)=-f,\quad e_2\xi(p_2)=g,\quad e_2\xi(p_3)=h,$$
$$e_3\zeta(p_1)=j,\quad e_3\zeta(p_2)=-k,\quad e_3\zeta(p_3)=l.$$

Для точки решетки $p=p_1+p_2+p_3$ имеем

$$\xi(p)=\xi(p_1)+\xi(p_2)+\xi(p_3)=e_1(a+b-c),$$
$$\eta(p)=\eta(p_1)+\eta(p_2)+\eta(p_3)=e_2(-f+g+h),$$
$$\zeta(p)=\zeta(p_1)+\zeta(p_2)+\zeta(p_3)=e_3(j-k+l).$$

Эта точка p не является началом координат, и поскольку $a>c$ получается

$$|\xi(p)|=a+b-c>0.$$

Все три алгебраические суммы в скобках справа, в приведенных выше равенствах, положительны. Поскольку точка p не лежит внутри параллелепипеда, поэтому по крайне мере одно из следующих трех неравенств должно выполняться:

$$a+b-c\geqslant a,\quad -f+g+h\geqslant g,\quad j-k+l\geqslant l.$$

Равенство не может выполняться ни в одном из этих случаев, поскольку предположение что оно выполняется, ведет к противоречию аналогично предыдущим случаям. Таким образом, $b>c$ или $h>f$ или $j>k$.

V. В этом случае рассмотрим $\xi'=\xi,\ \eta'=\zeta,\ \zeta'=\eta,\ x_1'=x_1,\ x_2'=x_3$ и $x_3'=x_2$. Матрица Φ' имеет нормальную систему знаков IV. Неравенства $b'>c'$ или $h'>f'$ или $j'>k'$ для Φ' станут $c>b$ или $k>j$ или $f>h$ для Φ.

VI. В этом случае

$$e_1\xi(p_1)=a,\quad e_1\xi(p_2)=-b,\quad e_1\xi(p_3)=-c,$$
$$e_2\eta(p_1)=-f,\quad e_2\xi(p_2)=g,\quad e_2\xi(p_3)=-h,$$
$$e_3\zeta(p_1)=-j,\quad e_3\zeta(p_2)=-k,\quad e_3\zeta(p_3)=l.$$

Для точки решетки $p=p_1+p_2+p_3$ имеем

$$\xi(p)=\xi(p_1)+\xi(p_2)+\xi(p_3)=-e_1(-a+b+c),$$
$$\eta(p)=\eta(p_1)+\eta(p_2)+\eta(p_3)=-e_2(f-g+h),$$
$$\zeta(p)=\zeta(p_1)+\zeta(p_2)+\zeta(p_3)=-e_3(j+k-l).$$

так как $a>b>0,\ a>c>0;\ g>f>0,\ g>h>0;\ l>j>0$ и $l>k>0$, следует, что $|\xi(p)|<a,\ |\eta(p)|<g,\ |\zeta(p)|<l$. Из этого следует, что точка решетки p лежит внутри параллелепипеда, а это значит что она совпадает с началом координат. Следовательно, все значения $\xi(p),\ \eta(p),\ \zeta(p)$ равны нулю, то есть $b+c=a,\ f+h=g$ и $j+k=l$. ∎

Определение 10. *Любая матрица* Φ *будет называться нормальной, если ее система знаков является нормальной и если, в то же время, ее элементы удовлетворяют условиям* $a > b$, $a > c$; $g > f$, $g > h$; $l > j$, $l > k$ *и также условиям, которые по Теореме 8 соответствуют ее нормальной системе знаков. Нормальная матрица* Φ *будет называться нормальной типа I, II,..., или VI, по своей нормальной системе знаков I, II,..., или VI.*

Теорема 9. *Если* Φ *нормальная матрица одного из типов I - V, тогда определитель* P *равен* $+1$; *если нормальная матрица* Φ *типа VI, тогда определитель* P *равен нулю.*

Доказательство. Обозначим определитель Φ как $|\Phi|$, и определитель P как D. Из определения Φ следует, что $\triangle D = |\Phi|$. Поскольку все элементы P являются целыми числами или нулем, определитель D является целым числом или нулем.
Доказательство того, что $D = 0$ когда Φ нормальная матрица типа VI.
Имеем

$$|\Phi| = \triangle D = \begin{vmatrix} a, & -b, & -c \\ -f, & g, & -h \\ -j, & -k, & l \end{vmatrix},$$

где $b + c = a,\ f + h = g,\ j + k = l$. Тогда $|\Phi| = 0$ и поскольку $\triangle > 0$, D должно равняться нулю.
Ниже следует доказательство того, что $D = 1$ при Φ одного из типов I - V. ■

Лемма 6. *Если* Φ *нормальная матрица типа I, II,..., или V, тогда* $4 \geqslant D \geqslant 1$.

Доказательство. Поскольку доказательство леммы одинаковое для всех пяти типов, подробности будут приведены только для типа I.
Имеем

$$|\Phi| = \triangle D = \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ -f, & g, & -h \\ -j, & -k, & l \end{vmatrix} = agl - ahk + fbl + fck + jbh + jgc,$$

где $a > b > 0,\ a > c > 0;\ g > f > 0,\ g > h > 0;\ l > j > 0,\ l > k > 0$. Тогда $agl > ahk > 0,\ agl > fbl > 0,\ agl > fck > 0,\ agl > jbh > 0,\ agl > jgc > 0$, получается, что $5agl > |\Phi| > 0$. Из Теоремы 5 и определения экстремального параллелепипеда получается, что $agl < \triangle$, следовательно, $5 > D > 0$. Но D - целое число, следовательно $4 \geqslant D \geqslant 1$. ■

Используя теоремы о решетчатых октаэдрах можно доказать, что $D \neq 2,\ 3$ или 4. Октаэдр, с шестью точками $p_1,\ p_2,\ p_3,\ -p_1,\ -p_2,\ -p_3$ в качестве вершин, имеет в качестве центра симметрии - начало координат и все его вершины являются точками решетки. Поскольку весь октаэдр, за исключением его вершин, находится внутри крайнего параллелепипеда $\{a,\ g,\ l\}$, этот октаэдр по определению является решетчатым октаэдром. Отсюда следует, что $D = 1$ или 2. Если $D = 2$, то все точки вида

$$p = \left(\gamma_1 + \frac{\delta}{2}\right) p_1 + \left(\gamma_2 + \frac{\delta}{2}\right) p_2 + \left(\gamma_3 + \frac{\delta}{2}\right) p_3,$$

где $\gamma_i,\ \delta-$ целые, являются точками решетки. Как вы увидите, этот вариант здесь не встречается.

Если Φ нормальная матрица типа I, рассмотрим точку для которой $\gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = \gamma_3 = -1,\ \delta = 1$. Получим $p = \frac{1}{2}p_1 - \frac{1}{2}p_2 - \frac{1}{2}p_3$. Тогда

$$|\xi(p)| = \frac{1}{2}|a - b - c| < a,$$

$$|\eta(p)| = \frac{1}{2}| - f - g + h| < g,$$

$$|\zeta(p)| = \frac{1}{2}| - j + k - l| < l.$$

Следовательно p является центром параллелепипеда. Из того, что $D \neq 0$ следует, что p не является началом координат и, следовательно, не является точкой решетки. Поэтому $D = 1$.
Если Φ нормальная матрица типа II, то из этого следует, что точка, для которой $\gamma_2 = 0,\ \gamma_1 = \gamma_3 = -1,\ \delta = 1$ не является точкий решетки; следовательно, D снова равно 1. Также для типа III, $\gamma_3 = 0,\ \gamma_1 = \gamma_2 = -1,\ \delta = 1$ дают точку, не являющуюся точкой решетки. Отсюда снова $D = 1$. В типах IV и V, точка для которой $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0,\ \delta = 1$ не является точкой решетки. Следовательно, $D = 1$ и теорма доказана.

Теорема 10. *Если можно найти три точки решетки $p_1,\ p_2,\ p_3$ и три целых числа $e_1,\ e_2,\ e_3$, для которых $e_1e_2e_3 = 1$, такие, что матрица P от координат $p_1,\ p_2,\ p_3$ имеет определитель равный +1, и такие, что матрица P преобразует матрицу из трех линейных форм $e_1\xi,\ e_2\eta,\ e_3\zeta$ в нормальную матрицу Φ типа I, II,..., или V, тогда матрица P является одной из матриц из Теоремы 8 с экстремальными параллелепипедами в цепочке $\xi,\ \eta$ и ζ.*

Доказательство. Можно рассматривать матрицы P как преобразования введенные новой системой координат $(X_1,\ X_2,\ X_3)$ где

$$X_i = p_i^{(1)}x_1 + p_i^{(2)}x_2 + p_i^{(3)}x_3 \quad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Поскольку определитель P равен 1 и коэффициенты $q_i^{(j)}$ в P^{-1} целые числа и

$$x_i = q_i^{(1)}X_1 + q_i^{(2)}X_2 + q_i^{(3)}X_3 \quad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Сразу видно, что точки решетки в $(X_1,\ X_2,\ X_3)$ это точки решетки в $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ и наоборот. Три точки $p_1,\ p_2$ и p_3 имеют соответствующие координаты $(1,\ 0,\ 0), (0,\ 1,\ 0)$ и $(0,\ 0,\ 1)$ в системе $(X_1,\ X_2,\ X_3)$. Очевидно, что окдаэдр имеющий точки $p_1,\ p_2,\ p_3,\ -p_1,\ -p_2,\ -p_3$ в качестве вершин, является решетчатым октаэдром в $X_1,\ X_2,\ X_3$. Поскольку решетка преобразуется в себя через P (или P^{-1}), тогда этот октаэдр также является решетчатым октаэдром в $(x_1,\ x_2,\ x_3)$.
Рассмотрим параллелепипед $\{a,\ g,\ l\}$ где $a,\ g,\ l$ элементы главной диагонали матрицы Φ. Φ является нормальной матрицей, поэтому имеем $a > b,\ a > c,\ g > f,\ g > h,\ l > j,\ l > k$. Следовательно, $p_1,\ p_2,\ p_3$ на поверхности $\{a,\ g,\ l\}$, а не только в плоскостях граней. Этот параллелепипед представляет собой выпуклое тело с центром симметрии в начале координат. Функция радиального расстояния которая соответствует этому параллелепипеду

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3) = max(|\xi/a|,\ |\eta/g|,\ |\zeta/l|).$$

Применяя P, как указано в определении 8, имеем

$$F(X_1,\ X_2,\ X_3) = max(|\Xi/a|,\ |H/g|,\ |Z/l|),$$

где $\Xi,\ H,\ Z$ соответствующие преобразования $e_1\xi,\ e_2\eta,\ e_3\zeta$. Следовательно, коэффициенты Ξ являются элементами первой строки матрицы Φ, у H коээфециенты это элементы второго ряда, и у Z это элементы третьего ряда.

Когда координаты точек, перечисленных в (1) определения 9 заменяются на $F(X_1,\ X_2,\ X_3)$. Этот параллелепипед удовлетворяет определению экстремального параллелепипеда для $\xi,\ \eta$ и ζ. ■

5 Выводы и заключения

Была проделана подготовительная работа для дальнейших попыток обобщения эффективного перебора точек решётки на трёхмерный случай. Мы планируем продолжить данную работу.

Список литературы

[1] Harris Hancock *Development of the Minkowski Geometry of Numbers.* // Dover Publications, Inc., New York, 1939, Volume one

[2] Б. Н. Делоне *Петербургская школа теории чисел.* // Издательство Академии Наук СССР, 1947

[3] Ю.В. Нестеренко *Теория чисел.* // М.: Академия, 2008. — 272 с.

[4] J.Franke, T.Kleinjung *Continued fractions and lattice sieve* // Workshop record of SHARCS, 2005.