Доказательство Ньюмана азрпч

и. рочев

Докажем пару вспомогательных утверждений, чтобы потом на них не отвлекаться.

Лемма 1. *Пусть функция* $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *интегрируема по Риману на отрезке* $[a,b] \subset (0,+\infty)$. *Тогда функция*

$$F(s) = \int_a^b f(x)x^{-s}\,dx$$

является целой (то есть голоморфна во всей комплексной плоскости).

Доказательство. Фиксируем $s \in \mathbb{C}$.

Имеем

$$f(x)x^{-s} = \sum_{n=0}^{\infty} f(x)\frac{(-s\ln x)^n}{n!},$$

причём ряд сходится равномерно при $x \in [a,b]$ (поскольку $f(x)$ ограничена на $[a,b]$). Интегрируя почленно, получаем

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!}\int_a^b f(x)(-\ln x)^n\,dx.$$

Это равенство справедливо для любого $s \in \mathbb{C}$, то есть функция $F(s)$ равна сумме всюду сходящегося степенного ряда и, следовательно, является целой. □

Лемма 2. *Если* $s \in \mathbb{C}$, $|s| = R > 0$, *то*

$$\frac{s}{R^2} + \frac{1}{s} = \frac{2\,\mathfrak{Re}\,s}{R^2}.$$

Доказательство. Пусть $s = Re^{\varphi i}$. Тогда

$$\frac{s}{R^2} + \frac{1}{s} = \frac{e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}}{R} = \frac{2\cos\varphi}{R} = \frac{2\,\mathfrak{Re}\,s}{R^2}.$$ □

Рассмотрим функцию

$$F(s) = -\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}.$$

Она мероморфна при $\mathfrak{Re}\,s > 0$ и имеет полюсы только в нулях $\zeta(s)$. (В точке $s = 1$, где $\zeta(s)$ имеет простой полюс, у $F(s)$ устранимая особенность.) В частности, функция $F(s)$ голоморфна при $\mathfrak{Re}\,s \geqslant 1$.

Лемма 3. *При* $\mathfrak{Re}\,s > 1$ *справедливо представление*

$$F(s) = \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^{1+s}}\,dx.$$

Доказательство. Применяя преобразование Абеля, получаем

$$\sum_{n=1}^{N} \Lambda(n) n^{-s} = \psi(N) N^{-s} + s \int_1^N \psi(x) x^{-1-s} dx.$$

Переходя к пределу при $N \to +\infty$ и вспоминая, что $\psi(x) = \mathcal{O}(x)$, при $\mathfrak{Re}\, s > 1$ получаем

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_1^{+\infty} \psi(x) x^{-1-s} dx.$$

Осталось заметить, что

$$\int_1^{+\infty} x^{-s} dx = \frac{1}{s-1}, \quad \mathfrak{Re}\, s > 1. \qquad \square$$

Далее, рассмотрим функции

$$F_T(s) = \int_1^T \frac{\psi(x) - x}{x^{1+s}} \, dx, \quad T > 1.$$

Согласно лемме 1, все они являются целыми.

Из теоремы Чебышёва следует, что найдётся такая постоянная A, что

$$|\psi(x) - x| \leqslant Ax, \quad x \geqslant 1.$$

Запомним её.

Лемма 4. *При* $\sigma = \mathfrak{Re}\, s > 0$ *справедливо неравенство*

$$|F(s+1) - F_T(s+1)| \leqslant \frac{A}{\sigma T^\sigma}.$$

Кроме того, при $\sigma < 0$ *имеем*

$$|F_T(s+1)| \leqslant \frac{A}{-\sigma T^\sigma}.$$

Доказательство. Если $\sigma > 0$, то

$$|F(s+1) - F_T(s+1)| = \left| \int_T^{+\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^{2+s}} \, dx \right| \leqslant A \int_T^{+\infty} x^{-1-\sigma} dx = \frac{A}{\sigma T^\sigma}.$$

Аналогично, если $\sigma < 0$, то

$$|F_T(s+1)| = \left| \int_1^T \frac{\psi(x) - x}{x^{2+s}} \, dx \right| \leqslant A \int_0^T x^{-1-\sigma} dx = \frac{A}{-\sigma T^\sigma}. \qquad \square$$

Теперь у нас всё готово для доказательства основного результата.

Теорема 5. *Несобственный интеграл* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^2} \, dx$ *сходится* (*и равен* $F(1)$).

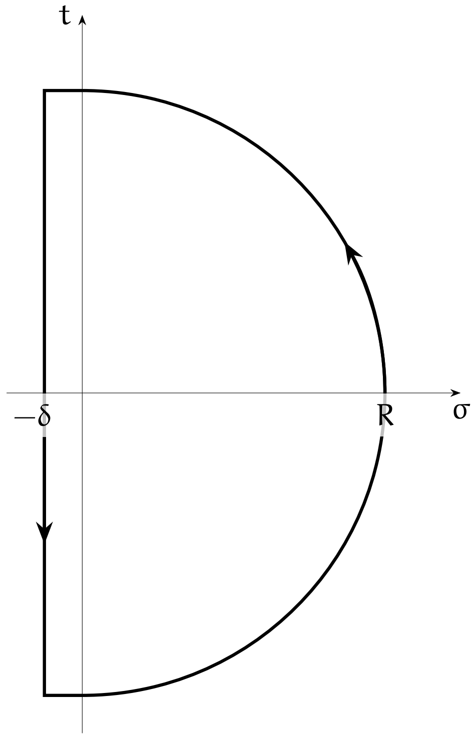

Рис. 1: Контур Γ.

Доказательство. Мы хотим доказать, что $F_T(1) \to F(1)$ при $T \to +\infty$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $R = 1/\varepsilon$. Кроме того, фиксируем число $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, 1)$, такое что функция $F(s)$ голоморфна в прямоугольнике $1 - \delta \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|t| \leqslant R$. (Такое δ найдётся, поскольку в прямоугольнике $1/2 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|t| \leqslant R$ есть лишь конечное число особенностей, и для всех них выполнено $\sigma < 1$. Или по-другому: каждую точку отрезка $[1 - Ri, 1 + Ri]$ можно окружить маленьким квадратиком, не содержащим особенностей, и выбрать конечное подпокрытие.)

Рассмотрим интеграл

$$I(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \big(F(s+1) - F_T(s+1)\big) T^s \left(\frac{s}{R^2} + \frac{1}{s}\right) ds, \quad T > 1,$$

где контур Γ изображён на рис. 1. Подынтегральная функция имеет единственную особенность внутри контура — простой полюс в точке $s = 0$ с вычетом $F(1) - F_T(1)$, следовательно, имеем $I(T) = F(1) - F_T(1)$.

Оценим $I(T)$. Для этого разобьём Γ на два куска: $\Gamma_+ = \{s \in \Gamma \mid \sigma \geqslant 0\}$, $\Gamma_- = \{s \in \Gamma \mid \sigma \leqslant 0\}$. Соответственно, $I(T)$ распадётся в сумму $I_+(T) + I_-(T)$.

Если $s \in \Gamma_+ \setminus \{\pm Ri\}$, то, согласно леммам 2 и 4, подынтегральная функция по модулю не превосходит

$$\frac{A}{\sigma T^\sigma} \cdot T^\sigma \cdot \frac{2\sigma}{R^2} = \frac{2A}{R^2},$$

поэтому

$$|I_+(T)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \pi R \cdot \frac{2A}{R^2} = \frac{A}{R} = A\varepsilon.$$

$I_-(T)$, в свою очередь, представим в виде разности

$$I_-(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_-} F(s+1)T^s\left(\frac{s}{R^2}+\frac{1}{s}\right)ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_-} F_T(s+1)T^s\left(\frac{s}{R^2}+\frac{1}{s}\right)ds$$
$$= I_1(T) - I_2(T).$$

Поскольку $F_T(s+1)$ — целая функция, то в $I_2(T)$ путь интегрирования Γ_- можно поменять на левую полуокружность $\Gamma_1 = \{s \in \mathbb{C} \mid |s| = R, \mathfrak{Re}\, s < 0\}$, после чего интеграл оценивается ровно так же, как и $I_+(T)$, с той же самой оценкой $|I_2(T)| \leqslant A\varepsilon$.

Для оценки $I_1(T)$ положим

$$M = M(\varepsilon) = \max_{s\in\Gamma_-}\left|F(s+1)\left(\frac{s}{R^2}+\frac{1}{s}\right)\right|.$$

Тогда часть интеграла $I_1(T)$, соответствующая вертикальному отрезку $\sigma = -\delta$, $|t| \leqslant R$, по модулю не превосходит

$$\frac{1}{2\pi}\cdot 2R\cdot MT^{-\delta} = \frac{M}{\pi\varepsilon}T^{-\delta}.$$

Для остальной части $I_1(T)$ имеем оценку модуля сверху

$$\frac{2}{2\pi}\int_{-\delta}^{0} MT^\sigma d\sigma < \frac{M}{\pi}\int_{-\infty}^{0} T^\sigma d\sigma = \frac{M}{\pi\ln T}.$$

Следовательно, $I_1(T) \to 0$ при $T \to +\infty$.

Собирая всё вместе, получаем, что при $T \geqslant T_0(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$|F(1) - F_T(1)| = |I(T)| \leqslant (2A+1)\varepsilon.$$

Следовательно, $F_T(1) \to F(1)$ при $T \to +\infty$, что и требовалось. □

Как следствие, получаем асимптотический закон для функции $\psi(x)$.

Теорема 6. $\psi(x) \sim x$ *при* $x \to +\infty$.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon \in (0,1)$ и рассмотрим интеграл

$$\int_x^{(1+\varepsilon)x} \frac{\psi(t)-t}{t^2}\,dt = o(1), \quad x \to +\infty.$$

Имеем

$$\int_x^{(1+\varepsilon)x} \frac{\psi(t)-t}{t^2}\,dt \geqslant \int_x^{(1+\varepsilon)x} \frac{\psi(x)-(1+\varepsilon)x}{t^2}\,dt = \frac{\psi(x)-(1+\varepsilon)x}{x}\cdot\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

откуда

$$\frac{\psi(x)}{x} \leqslant 1+\varepsilon+\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\int_x^{(1+\varepsilon)x}\frac{\psi(t)-t}{t^2}\,dt.$$

Переходя к пределу при $x \to +\infty$, получаем

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{x} \leqslant 1+\varepsilon.$$

Аналогично имеем

$$\frac{\psi(x)}{x} \geqslant 1 - \varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \int_{(1-\varepsilon)x}^{x} \frac{\psi(t) - t}{t^2}\, dt,$$

откуда

$$\varliminf_{x \to +\infty} \frac{\psi(x)}{x} \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Итого получаем

$$1 - \varepsilon \leqslant \varliminf_{x \to +\infty} \frac{\psi(x)}{x} \leqslant \varlimsup_{x \to +\infty} \frac{\psi(x)}{x} \leqslant 1 + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε имеем

$$\varliminf_{x \to +\infty} \frac{\psi(x)}{x} = \varlimsup_{x \to +\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1 \implies \lim_{x \to +\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1,$$

что и требовалось доказать. $\square$