Теория чисел, 4 курс, 1 поток

Лектор профессор Ю.В. Нестеренко
механико-математический факультет МГУ

Глава I. Асимптотический закон распределения простых чисел.

Глава I. Асимптотический закон распределения простых чисел.

Глава II. Теорема Дирихле о простых числах в арифметических прогрессиях.

Глава I. Асимптотический закон распределения простых чисел.

Глава II. Теорема Дирихле о простых числах в арифметических прогрессиях.

Глава III. Алгебраические и трансцендентные числа.

Глава I. Асимптотический закон распределения простых чисел.

Литература.

- *Галочкин А. И., Нестеренко Ю. В., Шидловский А. Б.* Введение в теорию чисел. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.
- *Х.Хассе.* Лекции по теории чисел.-М., 1953.-528с.

§1. Простые числа.

Натуральное число n называется *составным*, если может быть представлено в виде $n = uv$, где $u > 1, v > 1$ целые. Натуральное число $n > 1$, не являющееся составным, называется *простым*. Число 1 не является ни простым, ни составным по определению.

§1. Простые числа.

Натуральное число n называется *составным*, если может быть представлено в виде $n = uv$, где $u > 1, v > 1$ целые. Натуральное число $n > 1$, не являющееся составным, называется *простым*. Число 1 не является ни простым, ни составным по определению.

Наибольшее известное простое $2^{82589933} - 1$, декабрь 2020г.

§1. Простые числа.

Натуральное число n называется *составным*, если может быть представлено в виде $n = uv$, где $u > 1, v > 1$ целые. Натуральное число $n > 1$, не являющееся составным, называется *простым*. Число 1 не является ни простым, ни составным по определению.

Наибольшее известное простое $2^{82589933} - 1$, декабрь 2020г.

Теорема (Евклид)

Множество простых чисел бесконечно.

§1. Простые числа.

Натуральное число n называется *составным*, если может быть представлено в виде $n = uv$, где $u > 1, v > 1$ целые. Натуральное число $n > 1$, не являющееся составным, называется *простым*. Число 1 не является ни простым, ни составным по определению.

Наибольшее известное простое $2^{82589933} - 1$, декабрь 2020г.

Теорема (Евклид)

Множество простых чисел бесконечно.

Доказательство.

Пусть n - произвольное натуральное число, $M = n! + 1$ и $p > 1$ - наименьший делитель M. Тогда $p | (n! + 1)$ и, значит, $p > n$. Предположим, что $p = uv$, где $u, v > 1$. Тогда u и v делители M, меньшие p, вопреки определению p. Итак, для любого натурального n найдётся простое число $p > n$. $\square$

Простые числа.

До сих пор не доказан факт бесконечности пар простых чисел вида $(n-1, n+1)$ (гипотеза «близнецов»). Самая большая на сегодняшний день такая пара $3756801695685 \cdot 2^{666669} \pm 1$, найдена в 2011.

Простые числа.

До сих пор не доказан факт бесконечности пар простых чисел вида $(n-1, n+1)$ (гипотеза «близнецов»). Самая большая на сегодняшний день такая пара $3756801695685 \cdot 2^{666669} \pm 1$, найдена в 2011.
Не решена проблема Гольдбаха: каждое чётное число $n > 2$ представимо в виде суммы двух простых. И. М. Виноградов доказал (1937), что каждое достаточно большое нечётное число представимо в виде суммы трёх простых. Проблему для трёх простых полностью решил в 2013г. Х. Хельфготт: каждое нечётное целое $n > 5$ представимо в виде суммы трёх простых.

Простые числа.

До сих пор не доказан факт бесконечности пар простых чисел вида $(n-1, n+1)$ (гипотеза «близнецов»). Самая большая на сегодняшний день такая пара $3756801695685 \cdot 2^{666669} \pm 1$, найдена в 2011.

Не решена проблема Гольдбаха: каждое чётное число $n > 2$ представимо в виде суммы двух простых. И. М. Виноградов доказал (1937), что каждое достаточно большое нечётное число представимо в виде суммы трёх простых. Проблему для трёх простых полностью решил в 2013г. Х. Хельфготт: каждое нечётное целое $n > 5$ представимо в виде суммы трёх простых.

Теорема (Основная теорема арифметики)

Для любого целого $m > 1$ существует и единственно с точностью до перестановки сомножителей его представление в виде $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_t^{\alpha_t} = \prod_p p^{\nu_p(m)}$, где α_j натуральные и p_j различные простые числа. Числа p также простые и $\nu_p(m)$ - кратность, с которой p входит в разложение m.

§2. Теорема Чебышёва.

$\pi(x)$ - количество простых чисел, не превосходящих x.
История определения асимптотики функции $\pi(x)$ такова:

- Евклид: $\pi(x) \to \infty$ при $x \to \infty$.
- Лежандр, 1798 г.: $\frac{\pi(x)}{x} \to 0$ при $x \to \infty$.
- Чебышев, 1848 г.: Если предел $\frac{\pi(x) \ln x}{x}$ существует, то он равен 1.
- Адамар и Валле-Пуссен, 1896 г.: $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$.

§2. Теорема Чебышёва.

$\pi(x)$ - количество простых чисел, не превосходящих x.
История определения асимптотики функции $\pi(x)$ такова:

- Евклид: $\pi(x) \to \infty$ при $x \to \infty$.
- Лежандр, 1798 г.: $\frac{\pi(x)}{x} \to 0$ при $x \to \infty$.
- Чебышев, 1848 г.: Если предел $\frac{\pi(x)\ln x}{x}$ существует, то он равен 1.
- Адамар и Валле-Пуссен, 1896 г.: $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$.

$N \geq 3$ – натуральное число. Исключим из множества чисел $2, 3, \ldots, N$ все чётные составные числа:

$$2 \cdot 2, 2 \cdot 3, \quad , 2 \cdot m \leq N. \qquad m = \left[\frac{N}{2}\right], \qquad \Rightarrow .$$

$$\pi(N) \leq (N-1)-(\left[\frac{N}{2}\right]-1) = N-\left[\frac{N}{2}\right] = \left[\frac{N+1}{2}\right] \leq \frac{N+1}{2} \leq \frac{2N}{3}.$$

Исключив составные числа, делящиеся на 3, 5 и т.д., можно доказать утверждение Лежандра.

Теорема Чебышёва.

Утверждение о точном порядке роста функции $\pi(x)$ впервые было доказано в 1852г. П.Л. Чебышевым.

Теорема (О распределении простых чисел.)

Для всех достаточно больших x справедливы неравенства

$$a\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < b\frac{x}{\ln x},$$

где $a \approx 0,92129$, $b \approx 1,10555$.

Теорема Чебышёва.

Утверждение о точном порядке роста функции $\pi(x)$ впервые было доказано в 1852г. П.Л. Чебышевым.

Теорема (О распределении простых чисел.)

Для всех достаточно больших x справедливы неравенства

$$a\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < b\frac{x}{\ln x},$$

где $a \approx 0,92129$, $b \approx 1,10555$.

Имея целью сократить вычисления, я расскажу сейчас доказательство менее точных неравенств с $a = \frac{\ln 2}{2} \approx 0,3465$ и $b = 5\ln 2 \approx 3,4657$, но справедливых при всех $x \geq 6$.

Лемма 1

При любом натуральном n выполняется оценка наименьшего общего кратного $K := [1, 2, 3, \ldots, 2n+1] > 4^n$.

Доказательство.

$$f(x) = x^n(1-x)^n = a_n x^n + \ldots + a_{2n}x^{2n}, \quad a_j \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку $0 < x(1-x) < \frac{1}{4}$ всюду на отрезке $[0, 1]$, при $x \neq 0, \frac{1}{2}, 1$,

$$I := \int_0^1 x^n(1-x)^n\, dx < \frac{1}{4^n} \qquad \text{и} \qquad I > 0.$$

Лемма 1

При любом натуральном n выполняется оценка наименьшего общего кратного $K := [1, 2, 3, \ldots, 2n+1] > 4^n$.

Доказательство.

$$f(x) = x^n(1-x)^n = a_n x^n + \ldots + a_{2n}x^{2n}, \quad a_j \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку $0 < x(1-x) < \frac{1}{4}$ всюду на отрезке $[0, 1]$, при $x \neq 0, \frac{1}{2}, 1$,

$$I := \int_0^1 x^n(1-x)^n \, dx < \frac{1}{4^n} \qquad \text{и} \qquad I > 0.$$

$$I = \frac{a_n}{n+1} + \ldots + \frac{a_{2n}}{2n+1}, \Rightarrow K \cdot I \in \mathbb{Z}, \quad K \geq I^{-1} > 4^n.$$

Обозначения.

Пусть A множество действительных чисел и $f(p)$ функция, определённая на множестве простых чисел. В дальнейшем символами $\prod_{p\in A} p^{f(p)}$ и $\sum_{p\in A} p^{f(p)}$ будут обозначаться произведение и сумма чисел вида $p^{f(p)}$, взятые по всем простым числам p из множества A. Пустые произведения и суммы будут считаться равными 1 и 0 соответственно. Если множество A содержит бесконечное множество простых чисел, то соответствующее бесконечное произведение и ряд предполагается сходящимся.

Обозначения.

Пусть A множество действительных чисел и $f(p)$ функция, определённая на множестве простых чисел. В дальнейшем символами $\prod_{p\in A} p^{f(p)}$ и $\sum_{p\in A} p^{f(p)}$ будут обозначаться произведение и сумма чисел вида $p^{f(p)}$, взятые по всем простым числам p из множества A. Пустые произведения и суммы будут считаться равными 1 и 0 соответственно. Если множество A содержит бесконечное множество простых чисел, то соответствующее бесконечное произведение и ряд предполагается сходящимся.

Если множества действительных чисел A и B не пересекаются и $C = A\bigcup B$, то

$$\prod_{p\in C} p^{f(p)} = \prod_{p\in A} p^{f(p)} \cdot \prod_{p\in B} p^{f(p)}, \qquad \sum_{p\in C} p^{f(p)} = \sum_{p\in A} p^{f(p)} + \sum_{p\in B} p^{f(p)}.$$

Обозначения.

Пусть A множество действительных чисел и $f(p)$ функция, определённая на множестве простых чисел. В дальнейшем символами $\prod_{p\in A} p^{f(p)}$ и $\sum_{p\in A} p^{f(p)}$ будут обозначаться произведение и сумма чисел вида $p^{f(p)}$, взятые по всем простым числам p из множества A. Пустые произведения и суммы будут считаться равными 1 и 0 соответственно. Если множество A содержит бесконечное множество простых чисел, то соответствующее бесконечное произведение и ряд предполагается сходящимся.

Если множества действительных чисел A и B не пересекаются и $C = A\bigcup B$, то

$$\prod_{p\in C} p^{f(p)} = \prod_{p\in A} p^{f(p)} \cdot \prod_{p\in B} p^{f(p)}, \qquad \sum_{p\in C} p^{f(p)} = \sum_{p\in A} p^{f(p)} + \sum_{p\in B} p^{f(p)}.$$

Теорема Чебышёва (доказательство оценки снизу).

Пусть $x \geq 6$ и $n = \left[\frac{x-1}{2}\right]$, тогда $2n+1 \leq x < 2n+3$.
Рассмотрим разложение на простые множители:

$$K := [1, 2, 3, \ldots, 2n{+}1] = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}, \quad r = \pi(2n{+}1), \; p_i^{k_i} \leq 2n{+}1$$

$$K \leq (2n+1)^{\pi(2n+1)}.$$

Теорема Чебышёва (доказательство оценки снизу).

Пусть $x \geq 6$ и $n = \left[\frac{x-1}{2}\right]$, тогда $2n+1 \leq x < 2n+3$.
Рассмотрим разложение на простые множители:

$$K := [1, 2, 3, \ldots, 2n{+}1] = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}, \quad r = \pi(2n{+}1),\ p_i^{k_i} \leq 2n{+}1$$

$$K \leq (2n+1)^{\pi(2n+1)}.$$

По доказанной лемме имеем

$$4^n < K \leq (2n+1)^{\pi(2n+1)}.$$

$$\pi(2n+1)\log_2(2n+1) > n\log_2 4 = 2n,$$

так что

$$\pi(x) \geq \pi(2n+1) > \frac{2n}{\log_2(2n+1)} > \frac{x-3}{\log_2 x} \geq \frac{x}{2\log_2 x} = a\frac{x}{\ln x}.$$

Лемма 2

При любом $x \geq 2$ *имеем оценку* $\prod_{p \leq x} p < 4^x$.

Лемма 2

При любом $x \geq 2$ *имеем оценку* $\prod_{p \leq x} p < 4^x$.

Докажем сначала, пользуясь индукцией, неравенство для всех целых $x \geq 2$. При $x = 2$ и $x = 3$ утверждение леммы верно. Пусть $x \geq 4$ и неравенство верно для всех целых чисел из промежутка от 2 до $x - 1$. Докажем его для x.

Теорема Чебышёва

Лемма 2

При любом $x \geq 2$ *имеем оценку* $\prod_{p \leq x} p < 4^x$.

Докажем сначала, пользуясь индукцией, неравенство для всех целых $x \geq 2$. При $x = 2$ и $x = 3$ утверждение леммы верно. Пусть $x \geq 4$ и неравенство верно для всех целых чисел из промежутка от 2 до $x - 1$. Докажем его для x.

$$x = 2m,\ m \in \mathbb{Z},\ m \geq 2 \Rightarrow \prod_{p \leq 2m} p = \prod_{p \leq 2m-1} p < 4^{2m-1} < 4^x.$$

Лемма 2

При любом $x \geq 2$ имеем оценку $\prod_{p \leq x} p < 4^x$.

Докажем сначала, пользуясь индукцией, неравенство для всех целых $x \geq 2$. При $x = 2$ и $x = 3$ утверждение леммы верно. Пусть $x \geq 4$ и неравенство верно для всех целых чисел из промежутка от 2 до $x - 1$. Докажем его для x.

$$x = 2m,\ m \in \mathbb{Z},\ m \geq 2 \Rightarrow \prod_{p \leq 2m} p = \prod_{p \leq 2m-1} p < 4^{2m-1} < 4^x.$$

$$x = 2m-1,\ m \in \mathbb{Z},\ m \geq 2 \Rightarrow \prod_{p \leq x} p = \prod_{p \leq m} p \cdot \prod_{m < p \leq 2m-1} p.$$

Лемма 2

При любом $x \geq 2$ имеем оценку $\prod_{p \leq x} p < 4^x$.

Докажем сначала, пользуясь индукцией, неравенство для всех целых $x \geq 2$. При $x = 2$ и $x = 3$ утверждение леммы верно. Пусть $x \geq 4$ и неравенство верно для всех целых чисел из промежутка от 2 до $x - 1$. Докажем его для x.

$$x = 2m,\ m \in \mathbb{Z},\ m \geq 2 \Rightarrow \prod_{p \leq 2m} p = \prod_{p \leq 2m-1} p < 4^{2m-1} < 4^x.$$

$$x = 2m-1,\ m \in \mathbb{Z},\ m \geq 2 \Rightarrow \prod_{p \leq x} p = \prod_{p \leq m} p \cdot \prod_{m < p \leq 2m-1} p.$$

Из равенства $(2m-1)! = m!(m-1)!\binom{2m-1}{m}$ по основной теореме арифметики следует $\prod_{m < p \leq 2m-1} p \leq \binom{2m-1}{m}$.

Лемма 2

При любом $x \geq 2$ *имеем оценку* $\prod_{p \leq x} p < 4^x$.

Теорема Чебышёва (завершение доказательства леммы)

Лемма 2

При любом $x \geq 2$ *имеем оценку* $\prod_{p \leq x} p < 4^x$.

$$x = 2m - 1 \quad \Rightarrow \quad \prod_{p \leq x} p \leq \prod_{p \leq m} p \cdot \binom{2m-1}{m}.$$

Теорема Чебышёва (завершение доказательства леммы)

Лемма 2

При любом $x \geq 2$ *имеем оценку* $\prod_{p \leq x} p < 4^x$.

$$x = 2m - 1 \quad \Rightarrow \quad \prod_{p \leq x} p \leq \prod_{p \leq m} p \cdot \binom{2m-1}{m}.$$

$$2^{2m-1} = 1 + \binom{2m-1}{1} + \dots + \underbrace{\binom{2m-1}{m-1} + \binom{2m-1}{m}} + \dots + 1$$

$$> 2\binom{2m-1}{m} \quad \Rightarrow \quad \prod_{p \leq x} p \leq \prod_{p \leq m} p \cdot 2^{2m-2} < 4^m \cdot 4^{m-1} = 4^x.$$

Лемма 2

При любом $x \geq 2$ *имеем оценку* $\prod_{p \leq x} p < 4^x$.

$$x = 2m - 1 \quad \Rightarrow \quad \prod_{p \leq x} p \leq \prod_{p \leq m} p \cdot \binom{2m-1}{m}.$$

$$2^{2m-1} = 1 + \binom{2m-1}{1} + \dots + \underbrace{\binom{2m-1}{m-1} + \binom{2m-1}{m}} + \dots + 1$$

$$> 2\binom{2m-1}{m} \quad \Rightarrow \quad \prod_{p \leq x} p \leq \prod_{p \leq m} p \cdot 2^{2m-2} < 4^m \cdot 4^{m-1} = 4^x.$$

$$x \in \mathbb{R},\ x \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \prod_{p \leq x} p = \prod_{p \leq [x]} p < 4^{[x]} \leq 4^x.$$

Теорема Чебышёва (доказательство оценки сверху)

$$\pi(x) = \sum_{p\le x} 1 = \sum_{p\le x^{2/3}} 1 + \sum_{x^{2/3}<p\le x} 1$$

$$\sum_{x^{2/3}<p\le x} 1 \le \sum_{x^{2/3}<p\le x} \frac{\log_2 p}{\log_2 x^{2/3}} <$$

$$< \frac{1}{\log_2 x^{2/3}} \sum_{p\le x} \log_2 p < \frac{2x}{\log_2 x^{2/3}} = \frac{3x}{\log_2 x}.$$

$$\sum_{p\le x^{2/3}} 1 = \pi(x^{2/3}) = \pi([x^{2/3}]) \le \frac{2}{3}\cdot [x^{2/3}] \le \frac{2}{3}\cdot x^{2/3}.$$

$$2^x \ge 2^{[x]} \ge 1 + [x] > x \Rightarrow x > \log_2 x \Rightarrow x^{1/3} > \frac{1}{3}\cdot \log_2 x \Rightarrow$$

$$\frac{2x}{\log_2 x} > \frac{2}{3}\cdot x^{2/3} \quad \Rightarrow \quad \pi(x) < \frac{5x}{\log_2 x} = 5\ln 2 \frac{x}{\ln x}.$$

Теорема Чебышёва.

Теорема 1

При любом $x \geq 6$ справедливы неравенства

$$a\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < b\frac{x}{\ln x},$$

где $a = \frac{\ln 2}{2} \approx 0,3465$ *и* $b = 5\ln 2 \approx 3,4657$.

Теорема Чебышёва (замечания).

Пусть $K(x)$ - наименьшее общее кратное всех целых чисел m с условием $1 < m \leq x$ и p^{α} - степень простого числа p, входящая в разложение $K(x)$ на простые сомножители. Тогда из правила вычисления $K(x)$ следует, что α - наибольшее натуральное число с условием $p^{\alpha} \leq x$, т.е. $\alpha \leq \left[\frac{\ln x}{\ln p}\right] < \alpha + 1$. Значит, $\alpha = \left[\frac{\ln x}{\ln p}\right]$. Обозначим

$$\psi(x) = \ln K(x) = \sum_{p \leq x} \left[\frac{\ln x}{\ln p}\right] \ln p, \quad \theta(x) = \ln \prod_{p \leq x} p = \sum_{p \leq x} \ln p.$$

Функции $\psi(x)$ и $\theta(x)$ были определены П.Л. Чебышёвым и использовались им в доказательстве теоремы 1. Мы будем использовать их в доказательстве основного утверждения первой главы: асимптотического закона распределения простых чисел $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ при $x \to +\infty$.

Следствие 1

Пусть $p_1 = 2 < p_2 < p_3 < \ldots$ *последовательность всех простых чисел. Тогда найдутся положительные константы* $\alpha, \beta > 0$, *такие что*

$$\alpha n \ln n < p_n < \beta n \ln n.$$

При каждом натуральном n имеем $\pi(p_n) = n$. Подставив $x = p_n$ в неравенства теоремы Чебышёва, получим при $n \geq 4$:

$$a \frac{p_n}{\ln p_n} < n < b \frac{p_n}{\ln p_n}. \tag{1}$$

Эти неравенства можно переписать в виде:

$$n = c_n \cdot \frac{p_n}{\ln p_n}, \qquad a < c_n < b$$

$$n = c_n \cdot \frac{p_n}{\ln p_n}, \qquad a < c_n < b$$

Из последнего равенства следует

$$\ln n = \ln p_n - \ln\ln p_n + \ln c_n$$

$$\frac{n \ln n}{p_n} = c_n \left(1 - \frac{\ln\ln p_n}{\ln p_n} + \frac{\ln c_n}{\ln p_n}\right) \Rightarrow \frac{1}{2b} n \ln n \leq p_n \leq \frac{2}{a} n \ln n,$$

если n достаточно велико.

Следствие 2

Ряд $\sum_p \frac{1}{p}$ расходится.

Утверждение выполняется, т.к. $\frac{1}{p_n} \geq \frac{1}{\beta n \ln n}$ и ряд $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ расходится.

На сегодня всё.

Поздравляю Вас с началом нового учебного года!

До свидания!

Лекция 2
Постулат Бертрана.
Функция Римана и её простейшие свойства.

Теорема 2 (Постулат Бертрана, 1852г. П.Л. Чебышёв)

Для любого натурального $n \geq 2$ *существует простое число* p, *удовлетворяющее неравенствам* $n < p < 2n$.

Теорема 2 (Постулат Бертрана, 1852г. П.Л. Чебышёв)

Для любого натурального $n \geq 2$ существует простое число p, удовлетворяющее неравенствам $n < p < 2n$.

Доказательство.

Докажем сначала, что утверждение теоремы верно для любого $n \leq 630$.

Теорема 2 (Постулат Бертрана, 1852г. П.Л. Чебышёв)

Для любого натурального $n \geq 2$ существует простое число p, удовлетворяющее неравенствам $n < p < 2n$.

Доказательство.

Докажем сначала, что утверждение теоремы верно для любого $n \leq 630$. Рассмотрим для этого последовательность простых чисел

$$2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631.$$

Каждое из них меньше удвоенного предыдущего.

Теорема 2 (Постулат Бертрана, 1852г. П.Л. Чебышёв)

Для любого натурального $n \geq 2$ существует простое число p, удовлетворяющее неравенствам $n < p < 2n$.

Доказательство.

Докажем сначала, что утверждение теоремы верно для любого $n \leq 630$. Рассмотрим для этого последовательность простых чисел

$$2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631.$$

Каждое из них меньше удвоенного предыдущего. Пусть n – произвольное целое число из промежутка $2 \leq n \leq 630$. Тогда n содержится между двумя последовательными простыми q, p из выписанного ряда, т.е. $q \leq n < p$. Учитывая, что $p < 2q$, заключаем $p < 2q \leq 2n$. Искомое простое число p найдено. $\square$

Эйлеровы интегралы.

Пусть $\alpha > 0$. **Гамма-функция** Эйлера определяется интегралом

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Например, при любом целом $n \geq 0$ имеем $\Gamma(n+1) = n!$.

Бета функция Эйлера $B(\alpha, \beta)$ при любых положительных числах α, β определяется интегралом

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx.$$

Справедливо тождество

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Подробности можно найти в любом классическом учебнике по Математическому анализу.

Продолжение доказательства.

Далее будем предполагать выполненным неравенство $n > 630$.

Продолжение доказательства.

Далее будем предполагать выполненным неравенство $n > 630$. Пользуясь свойствами Бета- и Гамма-функций Эйлера, находим

$$I = \int_0^1 x^n(1-x)^n dx = B(n+1, n+1) =$$
$$= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} = \frac{n!n!}{(2n+1)!} = \frac{1}{N}.$$

Далее, как на первой лекции, обозначим $K = [1, 2, \ldots, 2n+1]$. Согласно доказательству леммы 1 из §2, имеем

$$\frac{K}{N} = K \cdot I \in \mathbb{Z}, \qquad N = I^{-1} > 4^n. \tag{1}$$

Продолжение доказательства.

Рассмотрим целое число N и докажем, что

$$N = \frac{(2n+1)!}{n!n!} = \prod_{p \le 2n+1} p^{\nu_p(N)} \le (2n+1) \prod_{p \le 2n-1} p^{\nu_p(N)}. \qquad (2)$$

Продолжение доказательства.

Рассмотрим целое число N и докажем, что

$$N = \frac{(2n+1)!}{n!n!} = \prod_{p \le 2n+1} p^{\nu_p(N)} \le (2n+1) \prod_{p \le 2n-1} p^{\nu_p(N)}. \qquad (2)$$

Если $2n+1$ простое число, то $\nu_{2n+1}(N) = 1$ и в (2) имеет место равенство. Если же $2n+1$ – составное, то $N = \prod_{p \le 2n-1} p^{\nu_p(N)}$ и (2) также выполняется.

$$N = \frac{(2n+1)!}{n!n!} \leq (2n+1) \prod_{p \leq 2n-1} p^{\nu_p(N)}. \tag{3}$$

1. Предположим, что утверждение теоремы неверно и интервал $n < x < 2n$ не содержит ни одного простого числа. Тогда из (3) следует

$$N \leq (2n+1) \prod_{p \leq n} p^{\nu_p(N)}. \tag{4}$$

$$N = \frac{(2n+1)!}{n!n!} \leq (2n+1) \prod_{p \leq 2n-1} p^{\nu_p(N)}. \tag{3}$$

1. Предположим, что утверждение теоремы неверно и интервал $n < x < 2n$ не содержит ни одного простого числа. Тогда из (3) следует

$$N \leq (2n+1) \prod_{p \leq n} p^{\nu_p(N)}. \tag{4}$$

2. Если простое число p удовлетворяет неравенствам $\frac{2n+1}{3} < p \leq n$, то $p \leq n < \frac{3p-1}{2} < 2p$ и $2p < 2n+1 < 3p$. Значит, $\nu_p(n!) = 1$ и $\nu_p((2n+1)!) = 2$. Таким образом, $\nu_p(N) = \nu_p((2n+1)!) - 2\nu_p(n!) = 0$ и из (4) следует

$$N \leq (2n+1) \prod_{p \leq \frac{2n+1}{3}} p^{\nu_p(N)}. \tag{5}$$

3. Предположим теперь, что $\sqrt{2n+1} < p \le \frac{2n+1}{3}$. Тогда, в частности, $\ln(2n+1) < 2\ln p$. Поскольку $N|K$, то $\nu_p(N) \le \nu_p(K) = \left[\frac{\ln(2n+1)}{\ln p}\right] \le 1$. Но тогда из (5) находим

$$N \le (2n+1) \cdot \prod_{\sqrt{2n+1}<p\le\frac{2n+1}{3}} p \cdot \prod_{p\le\sqrt{2n+1}} p^{\nu_p(N)} \le$$

$$\le \frac{2n+1}{210} \cdot \prod_{p\le\frac{2n+1}{3}} p \cdot \prod_{p\le\sqrt{2n+1}} p^{\nu_p(N)}. \tag{6}$$

3. Предположим теперь, что $\sqrt{2n+1} < p \le \frac{2n+1}{3}$. Тогда, в частности, $\ln(2n+1) < 2\ln p$. Поскольку $N|K$, то $\nu_p(N) \le \nu_p(K) = \left[\frac{\ln(2n+1)}{\ln p}\right] \le 1$. Но тогда из (5) находим

$$N \le (2n+1) \cdot \prod_{\sqrt{2n+1} < p \le \frac{2n+1}{3}} p \cdot \prod_{p \le \sqrt{2n+1}} p^{\nu_p(N)} \le$$

$$\le \frac{2n+1}{210} \cdot \prod_{p \le \frac{2n+1}{3}} p \cdot \prod_{p \le \sqrt{2n+1}} p^{\nu_p(N)}. \qquad (6)$$

4. Далее $p \le \sqrt{2n+1}$. Так как $N|K$, то

$$\nu_p(N) \le \nu_p(K) = \left[\frac{\ln(2n+1)}{\ln p}\right] \le \frac{\ln(2n+1)}{\ln p} \text{ и } p^{\nu_p(N)} \le 2n+1,$$

Правое неравенство теоремы Чебышева даёт

$$\prod_{p \le \sqrt{2n+1}} p^{\nu_p(N)} \le (2n+1)^{\pi(\sqrt{2n+1})} \le (2n+1)^{\frac{5\sqrt{2n+1}}{\log_2 \sqrt{2n+1}}} = 4^{5\sqrt{2n+1}}.$$

Воспользовавшись оценкой снизу из (1) для числа N и леммой 2, находим

$$4^n < N < \frac{2n+1}{210} \cdot 4^{\frac{2n+1}{3}} \cdot 4^{5\sqrt{2n+1}}. \tag{7}$$

Умножим это неравенство на 2, воспользуемся неравенством $x \leq 2^x = 4^{x/2}$, при $x = \frac{2n+1}{105} > 0$ и прологарифмируем результат по основанию 4. В итоге получим

$$n + \frac{1}{2} < \frac{2n+1}{210} + \frac{2n+1}{3} + 5\sqrt{2n+1}$$

или после упрощений

$$\frac{17}{105}\sqrt{2n+1} \leq 5.$$

Наконец, учитывая, что $\sqrt{2n+1} \geq \sqrt{1261} > 35$ находим

$$\frac{17}{3} \leq 5,$$

что, конечно, неверно. Получившееся противоречие доказывает существование простого числа, утверждаемое теоремой.

§4. Функция Римана и её простейшие свойства

Дзета функция Римана $\zeta(s)$ комплексного переменного s определяется рядом

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{8}$$

$s = \sigma + it, \quad n^s = e^{s \ln n} = n^{\sigma} n^{it} = n^{\sigma} e^{it \ln n}, \qquad |n^s| = n^{\sigma}.$

Дзета функция Римана $\zeta(s)$ комплексного переменного s определяется рядом

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{8}$$

$$s = \sigma + it, \quad n^s = e^{s \ln n} = n^{\sigma} n^{it} = n^{\sigma} e^{it \ln n}, \qquad |n^s| = n^{\sigma}.$$

Лемма 1

Ряд (8) абсолютно сходится в области $\Re s > 1$*. Определяемая им функция* $\zeta(s)$ *голоморфна в этой области, а равенство (8) допускает почленное дифференцирование сколь угодно много раз.*

Дзета функция Римана $\zeta(s)$ комплексного переменного s определяется рядом

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{8}$$

$s = \sigma + it, \quad n^s = e^{s \ln n} = n^\sigma n^{it} = n^\sigma e^{it \ln n}, \qquad |n^s| = n^\sigma.$

Лемма 1

Ряд (8) абсолютно сходится в области $\Re s > 1$. Определяемая им функция $\zeta(s)$ голоморфна в этой области, а равенство (8) допускает почленное дифференцирование сколь угодно много раз.

Следствие 1

В области $\Re s = \sigma > 1$ выполняется равенство

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^s}.$$

Доказательство леммы 1.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}}$ сходится в полуплоскости $\sigma > 1$. Так как

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^{\sigma}}, \tag{9}$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, определяющий $\zeta(s)$ абсолютно сходится в этой области. При любом $\delta > 0$ в области $G = \{s \,|\, \Re s > 1 + \delta\}$ справедливо неравенство $\left|\frac{1}{n^s}\right| < \frac{1}{n^{1+\delta}}$, см. (9). Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}$ по признаку Вейерштрасса следует равномерная сходимость ряда (8) в области G, аналитичность суммы этого ряда в области G и возможность его почленного дифференцирования (теорема Вейерштрасса) в G. В силу произвольности $\delta > 0$ все эти свойства сохраняются в области $\sigma > 1$.

Лемма 2

Дзета-функция не имеет нулей в области $\Re s > 1$, *и в этой области выполняется равенство*

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \qquad (10)$$

где

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{при} \quad n = p^k, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

– функция Мангольдта.

Напоминание: 1. Если числовые рядв $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ сходятся абсолютно и имеют суммы A и B, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, где $c_1, c_2, \ldots$ есть произведения $a_i b_j$, взятые в произвольном порядке, абсолютно сходится и имеет сумму AB.

Напоминание: 1. Если числовые рядв $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ сходятся абсолютно и имеют суммы A и B, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, где $c_1, c_2, \ldots$ есть произведения $a_i b_j$, взятые в произвольном порядке, абсолютно сходится и имеет сумму AB.

2. Если в абсолютно сходящемся ряде расставить как-нибудь скобки, то новый ряд сходится и имеет ту же сумму.

Напоминание: 1. Если числовые рядв $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ сходятся абсолютно и имеют суммы A и B, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, где $c_1, c_2, \ldots$ есть произведения $a_i b_j$, взятые в произвольном порядке, абсолютно сходится и имеет сумму AB.

2. Если в абсолютно сходящемся ряде расставить как-нибудь скобки, то новый ряд сходится и имеет ту же сумму.

3. **(Теорема Вейерштрасса.)** Если члены ряда $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$, равномерно сходящегося внутри области G, аналитичны внутри этой области, то сумма ряда $f(z)$ также аналитична в области G. Кроме того, ряды $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ также сходятся равномерно внутри G и представляют там производную $f^{(k)}(z)$.

Доказательство леммы 2.

Функция Мангольдта определена в формулировке леммы 2

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{при} \quad n = p^k, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \qquad \Rightarrow |\Lambda(n)| \leq \ln n.$$

Повторим доказательство леммы 1 применительно к ряду $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$. Пользуясь сходимостью ряда $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^\sigma}$ в области $\sigma > 1$, заключаем, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ абсолютно сходится в области $\Re s > 1$ и равномерно сходится в области $\Re s > 1 + \delta$ при любом $\delta > 0$, а потому аналитичен в области $\Re s > 1 + \delta$, а в силу произвольности $\delta > 0$ и в области $\Re s > 1$.

Продолжение доказательства леммы 2.

Пользуясь теоремой о перемножении абсолютно сходящихся рядов, перемножим ряд для $\zeta(s)$ и ряд из (10), . Имеем

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^s} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Lambda(k)}{k^s} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s} \left(\sum_{k|n} \Lambda(k) \right). \qquad (11)$$

Здесь переменная суммирования ℓ была заменена на n с помощью соотношения $\ell \cdot k = n$.

Вычислим сумму в скобках. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t}$. Ненулевой вклад в сумму дадут только числа k вида $p_i^{\beta_i}$ $(1 \leq \beta_i \leq \alpha_i)$. Следовательно, $\sum_{k|n} \Lambda(k) = \alpha_1 \ln p_1 + \cdots + \alpha_t \ln p_t = \ln n$. Заменяя сумму в скобках из (11) и пользуясь следствием 1, находим

$$\zeta(s) \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Lambda(k)}{k^s} = -\zeta'(s).$$

Завершение доказательства леммы 2.

По доказанному три функции, участвующие в тождестве

$$\zeta(s) \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Lambda(k)}{k^s} = -\zeta'(s), \tag{12}$$

аналитичны в области $\Re s > 1$. Если s_0 - нуль дзета-функции, лежащий в этой области, то $\operatorname{ord}_{s_0} \zeta(s) - \operatorname{ord}_{s_0} \zeta'(s) = 1$, и из равенства (12) следует

$$\operatorname{ord}_{s_0} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Lambda(k)}{k^s} = -1,$$

что противоречит аналитичности суммы $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Lambda(k)}{k^s}$ в области $\Re s > 1$. Для завершения доказательства осталось разделить тождество (12) на $\zeta(s)$.

Конец
второй лекции.

Лекция 3
Простейшие свойства дзета-функции. Аналитическое продолжение

Функция $f(n)$ называется *вполне мультипликативной*, если $f(n) \not\equiv 0$ и $f(uv) = f(u)f(v)$ при всех $u, v \in \mathbb{N}$. Выбрав n так, что $f(n) \neq 0$, находим $f(n) = f(n)f(1)$ и $f(1) = 1$.

Примеры. Функции $f(n) = n^s$ и $f(n) \equiv 1$ вполне мультипликативны.

Функция $f(n)$ называется *вполне мультипликативной*, если $f(n) \not\equiv 0$ и $f(uv) = f(u)f(v)$ при всех $u, v \in \mathbb{N}$. Выбрав n так, что $f(n) \neq 0$, находим $f(n) = f(n)f(1)$ и $f(1) = 1$.

Примеры. Функции $f(n) = n^s$ и $f(n) \equiv 1$ вполне мультипликативны.

Лемма 1

Пусть функция $f(n)$ вполне мультипликативна и ряд $S = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ абсолютно сходится. Тогда $S = \prod\limits_{p} (1 - f(p))^{-1}$, *то есть* $\prod\limits_{p \le x} (1 - f(p))^{-1} \to S$, *при* $x \to \infty$.

§5 Бесконечное произведение.

Функция $f(n)$ называется *вполне мультипликативной*, если $f(n) \not\equiv 0$ и $f(uv) = f(u)f(v)$ при всех $u, v \in \mathbb{N}$. Выбрав n так, что $f(n) \neq 0$, находим $f(n) = f(n)f(1)$ и $f(1) = 1$.
Примеры. Функции $f(n) = n^s$ и $f(n) \equiv 1$ вполне мультипликативны.

Лемма 1

Пусть функция $f(n)$ вполне мультипликативна и ряд $S = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ абсолютно сходится. Тогда $S = \prod\limits_{p} (1 - f(p))^{-1}$,

то есть $\prod\limits_{p \le x} (1 - f(p))^{-1} \to S$, *при* $x \to \infty$.

Покажем, что $|f(n)| < 1$ при $n > 1$. В самом деле, если $|f(n)| \geq 1$, то и $|f(n^k)| = |f(n)|^k \geq 1$, а это противоречит сходимости ряда для S.

Продолжение доказательства леммы 1.

Пусть p простое. Поскольку $|f(p)| < 1$, то

$$(1 - f(p))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} f(p)^k = \sum_{k=0}^{\infty} f(p^k),$$

и ряд в правой части абсолютно сходится.

Продолжение доказательства леммы 1.

Пусть p простое. Поскольку $|f(p)| < 1$, то

$$(1 - f(p))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} f(p)^k = \sum_{k=0}^{\infty} f(p^k),$$

и ряд в правой части абсолютно сходится. Такие ряды при разных p можно перемножать, пользуясь соответствующей теоремой

$$S(x) = \prod_{p \le x} (1 - f(p))^{-1} = \prod_{p \le x} \sum_{k=0}^{\infty} f(p^k) = \sum_{n}{}' f(n),$$

где $\sum'$ означает сумму по тем n, у которых все простые делители не превосходят x. Сумма $\sum''$ означает сумму по всем n, которые делятся хотя бы на одно простое число $p > x$.

Завершение доказательства леммы 1

Тогда

$$S - S(x) = \sum{}'' f(n) \Rightarrow |S - S(x)| \le \sum{}'' |f(n)| \le \sum_{n \ge x} |f(n)| \to 0$$

при $x \to \infty$, как остаток сходящегося ряда. Здесь использовалось также, что каждое натуральное число n, имеющее простой делитель $p > x$ также удовлетворяет неравенству $n > x$.

Тождество Эйлера.

Следствие 1

В области $\Re s > 1$ *справедливо следующее представление* $\zeta(s)$ *в виде бесконечного произведения по простым числам*

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Доказательство.

Возьмём в предыдущей лемме $f(n) = \frac{1}{n^s}$. По доказанному в области $\Re s > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ абсолютно сходится. Кроме того, функция $f(n) = \frac{1}{n^s}$ вполне мультипликативна. Справедливость тождества Эйлера следует из леммы 1 с указанной выше функцией $f(n)$ и $S = \zeta(s)$. □

Лемма 2 (Преобразование Абеля.)

Пусть $a_k, k = 1, 2, \dots$ — *последовательность комплексных чисел и* $g(t)$ — *комплекснозначная непрерывно дифференцируемая на множестве* $t \geq 1$ *функция. Тогда*

$$\sum_{k \leq x} a_k g(k) = A(x)g(x) - \int_1^x A(t)g'(t)dt, \qquad (1)$$

где $A(x) := \sum_{k \leq x} a_k$.
Если к тому же ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k g(k)$ *сходится и* $A(x)g(x) \to 0$ *при* $x \to \infty$, *то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k g(k) = -\int_1^{\infty} A(t)g'(t)dt.$$

Доказательство справедливости преобразования Абеля.

Введём обозначение $\varphi_k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < k; \\ a_k, & \text{если } t \geq k. \end{cases}$ Далее

Доказательство справедливости преобразования Абеля.

Введём обозначение $\varphi_k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < k; \\ a_k, & \text{если } t \geq k. \end{cases}$ Далее

$$A(x)g(x) - \sum_{k \leq x} a_k g(k) = \sum_{k \leq x} a_k (g(x) - g(k)) = \sum_{k \leq x} a_k \int_k^x g'(t)dt =$$

$$= \sum_{k \leq x} \int_1^x \varphi_k(t) g'(t)dt = \int_1^x \left(\sum_{k \leq t} \varphi_k(t) \right) g'(t)dt.$$

Доказательство справедливости преобразования Абеля.

Введём обозначение $\varphi_k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < k; \\ a_k, & \text{если } t \geq k. \end{cases}$ Далее

$$A(x)g(x) - \sum_{k \leq x} a_k g(k) = \sum_{k \leq x} a_k (g(x) - g(k)) = \sum_{k \leq x} a_k \int_k^x g'(t)dt =$$

$$= \sum_{k \leq x} \int_1^x \varphi_k(t) g'(t)dt = \int_1^x \left(\sum_{k \leq t} \varphi_k(t) \right) g'(t)dt.$$

Остается заметить, что при $t \in [1, x]$

$$\sum_{k \leq x} \varphi_k(t) = \sum_{k \leq t} \varphi_k(t) = \sum_{k \leq t} a_k = A(t).$$

Второе утверждение леммы получается из первого предельным переходом.

Теорема 3

При $\Re s = \sigma > 1$ справедливо тождество

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx. \qquad (2)$$

Правая часть этого тождества аналитична всюду в полуплоскости $\Re s > 0$ за исключением точки $s = 1$, где она имеет полюс первого порядка с вычетом 1.
Тождество (2) аналитически продолжает функцию $\zeta(s)$ в комплексную полуплоскость $\Re s > 0$, где $\zeta(s)$ имеет единственный полюс в точке $s = 1$. Порядок полюса равен 1, а вычет $\zeta(s)$ в этой точке также равен 1.

§6 Аналитическое продолжение дзета-функции.

Доказывая тождество (2), будем считать, что $\Re s > 1$. Пусть N — натуральное число. Применим лемму 2 к случаю, когда $x = N \in \mathbb{N}$, $a_i = 1$, а $g(t) = t^{-s}$. Тогда $g'(x) = -sx^{-(s+1)}$, и $A(x) = \sum_{k \leq x} 1 = [x]$. Воспользовавшись леммой 2, получаем

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^s} = \frac{N}{N^s} + s\int_1^N \frac{[t]}{t^{s+1}}dt = \frac{1}{N^{s-1}} + s\int_1^N \frac{t}{t^{s+1}}dt -$$

$$- s\int_1^N \frac{\{t\}}{t^{s+1}}dt = \frac{1}{N^{s-1}} + \frac{s}{s-1} - \frac{s}{N^{s-1}(s-1)} - s\int_1^N \frac{\{t\}}{t^{s+1}}dt =$$

$$= 1 + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{N^{s-1}(s-1)} - s\int_1^N \frac{\{t\}}{t^{s+1}}dt.$$

Итак,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^s} = 1 + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{N^{s-1}(s-1)} - s\int_1^N \frac{\{t\}}{t^{s+1}}dt.$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$, получаем тождество из формулировки теоремы

$$.\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}}dx. \qquad (3)$$

Для доказательства аналитичности правой части (3) и утверждения о полюсе достаточно установить аналитичность интеграла из (3) в области $\Re s > 0$. Пусть $s = \sigma + it$. Разобьём интеграл на части. Пусть

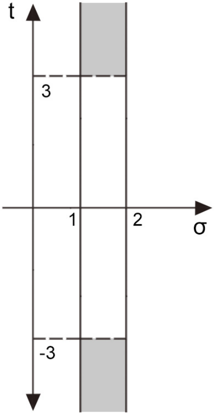
$$f_n(s) = \int_n^{n+1} \frac{\{t\}}{t^{s+1}}dt = \int_n^{n+1} \frac{t-n}{t^{s+1}}dt = \frac{n^{1-s} - (n+1)^{-s}(n+s)}{(1-s)s}.$$

Функции $f_n(s)$ аналитичны в $\Re s > 0$ (в точке $s = 1$ устранимая особенность). Значит, интеграл в правой части есть сумма ряда из аналитических функций. Этот ряд равномерно сходится, так как при $\sigma \geq \delta > 0$ он мажорируется числовым рядом

$$|f_n(s)| \leq \int_n^{n+1} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}dx \leq \frac{1}{n^{\sigma+1}} \leq \frac{1}{n^{\delta+1}}.$$

Осталось применить теорему Вейерштрасса.

§7 Оценки дзета-функции Римана.



(a)

$1 \le \sigma \le 2, \quad |t| \ge 3$

Лемма 3

Пусть $s = \sigma + it$, $1 \leq \sigma \leq 2$, *а* $|t| \geq 3$. *Тогда*

$$|\zeta(s)| \leq 5 \ln |t|, \qquad |\zeta'(s)| \leq 8 \ln^2 |t|.$$

§7 Оценки дзета-функции Римана.

Лемма 3

Пусть $s = \sigma + it$, $1 \leq \sigma \leq 2$, *а* $|t| \geq 3$. *Тогда*

$$|\zeta(s)| \leq 5 \ln |t|, \qquad |\zeta'(s)| \leq 8 \ln^2 |t|.$$

1) Оценим сначала ζ-функцию. Выше при $\Re s > 0$ доказаны тождества

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx.$$

Лемма 3

Пусть $s = \sigma + it$, $1 \le \sigma \le 2$, *а* $|t| \ge 3$. *Тогда*

$$|\zeta(s)| \le 5 \ln |t|, \qquad |\zeta'(s)| \le 8 \ln^2 |t|.$$

1) Оценим сначала ζ-функцию. Выше при $\Re s > 0$ доказаны тождества

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx.$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{N^{s-1}(s-1)} - s \int_1^{N} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx.$$

Вычитая второе равенство из первого, находим

$$\zeta(s) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{N^{s-1}(s-1)} - s \int_N^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx$$

Вычитая второе равенство из первого, находим

$$\zeta(s) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{N^{s-1}(s-1)} - s\int_N^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{1}{N^{s-1}(s-1)} - s\int_N^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx$$

Вычитая второе равенство из первого, находим

$$\zeta(s) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{N^{s-1}(s-1)} - s\int_N^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{1}{N^{s-1}(s-1)} - s\int_N^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx$$

Положим $N = [|t|]$ и оценим каждое из трёх слагаемых справа

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}\right| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\sigma} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq 1 + \int_1^N \frac{dx}{x} =$$
$$= 1 + \ln N \leq 2\ln N \leq 2\ln|t|,$$

Третье неравенство верно, так как $\dfrac{1}{n} \leq \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x}$ при $n \geq 2$.

$N = [|t|], \qquad 1 \le \sigma \le 2, \qquad |t| \ge 3$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{1}{(s-1)N^{s-1}} - s\int_N^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx$$

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}\right| \le 2\ln|t|,$$

$$N = [|t|], \qquad 1 \le \sigma \le 2, \qquad |t| \ge 3$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{1}{(s-1)N^{s-1}} - s\int_N^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx$$

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}\right| \le 2\ln|t|, \quad \left|\frac{1}{(s-1)N^{s-1}}\right| = \frac{1}{|s-1|N^{\sigma-1}} \le \frac{1}{|t|} \le \frac{1}{3}.$$

$$N = [|t|], \qquad 1 \le \sigma \le 2, \qquad |t| \ge 3$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{1}{(s-1)N^{s-1}} - s\int_N^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx$$

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}\right| \le 2\ln|t|, \quad \left|\frac{1}{(s-1)N^{s-1}}\right| = \frac{1}{|s-1|N^{\sigma-1}} \le \frac{1}{|t|} \le \frac{1}{3}.$$

$$\left|s\int_N^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx\right| \le (\sigma+|t|)\int_N^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{\sigma+|t|}{N} \le \frac{|t|+2}{|t|-1} \le \frac{5}{2}.$$

$$N = [|t|], \qquad 1 \le \sigma \le 2, \qquad |t| \ge 3$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{1}{(s-1)N^{s-1}} - s\int_N^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx$$

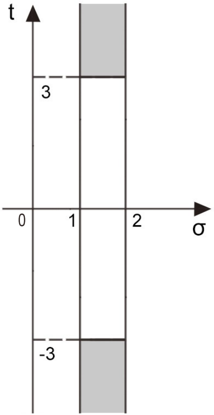
$$\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}\right| \le 2\ln|t|, \quad \left|\frac{1}{(s-1)N^{s-1}}\right| = \frac{1}{|s-1|N^{\sigma-1}} \le \frac{1}{|t|} \le \frac{1}{3}.$$

$$\left|s\int_N^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx\right| \le (\sigma+|t|)\int_N^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{\sigma+|t|}{N} \le \frac{|t|+2}{|t|-1} \le \frac{5}{2}.$$

$$|\zeta(s) \le 2\ln|t| + \frac{1}{3} + \frac{5}{2} < 5\ln|t|.$$

Это конец
третьей лекции.

Лекция 4
Оценки дзета-функции.
Отсутствие нулей на единичной прямой.



(a)

$1 \leq \sigma \leq 2, \quad |t| \geq 3$

Лемма 1

Пусть $s = \sigma + it$, $1 \le \sigma \le 2$, *а* $|t| \ge 3$. *Тогда*

$$|\zeta(s)| \le 5 \ln |t|, \qquad |\zeta'(s)| \le 8 \ln^2 |t|.$$

Лемма 1

Пусть $s = \sigma + it$, $1 \le \sigma \le 2$, *а* $|t| \ge 3$. *Тогда*

$$|\zeta(s)| \le 5 \ln |t|, \qquad |\zeta'(s)| \le 8 \ln^2 |t|.$$

Первое неравенство было доказано на прошлой лекции. При этом использовалось тождество

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{1}{N^{s-1}(s-1)} - s \int_N^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx,$$

спреведливое при любом натуральном N в области $\Re s > 0$.

Оценка $|\zeta'(s)|$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{1}{N^{s-1}(s-1)} - s\int_N^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx \qquad (1)$$

Оценка $|\zeta'(s)|$

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}+\frac{1}{N^{s-1}(s-1)}-s\int_N^\infty\frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx \tag{1}$$

Дифференцируя (1) по переменной s, получаем

$$\zeta'(s)=-\sum_{1}^{N}\frac{\ln n}{n^s}-\frac{1}{(s-1)^2N^{s-1}}-\frac{\ln N}{(s-1)N^{s-1}}-\\ -\int_N^\infty\frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx+s\int_N^\infty\frac{\{x\}\ln x}{x^{s+1}}dx.$$

Легко проверить, что $\frac{d}{ds}\int_n^{n+1}\frac{x-n}{x^{s+1}}dx=-\int_n^{n+1}\frac{(x-n)\ln x}{x^{s+1}}dx$ и $\frac{d}{ds}\int_n^{n+1}\frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx=-\int_n^{n+1}\frac{\{x\}\ln x}{x^{s+1}}dx$. Это объясняет результат дифференцирования интеграла в равенстве (1).

$$\zeta'(s) = -\sum_{1}^{N} \frac{\ln n}{n^s} - \frac{1}{(s-1)^2 N^{s-1}} - \frac{\ln N}{(s-1)N^{s-1}} - \\ - \int_N^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}}\,dx + s\int_N^\infty \frac{\{x\}\ln x}{x^{s+1}}\,dx.$$

$$\zeta'(s) = -\sum_{1}^{N} \frac{\ln n}{n^s} - \frac{1}{(s-1)^2 N^{s-1}} - \frac{\ln N}{(s-1)N^{s-1}} - \\ - \int_N^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx + s \int_N^\infty \frac{\{x\} \ln x}{x^{s+1}} dx.$$

Оценим слагаемые в условиях леммы при $N = [|t|]$:

$$\left| \frac{1}{(s-1)^2 N^{s-1}} \right| \le \frac{1}{9} \frac{1}{N^{\sigma - 1}} \le \frac{1}{9}, \quad \left| \frac{\ln N}{(s-1)N^{s-1}} \right| \le \frac{1}{3} \ln N \le \frac{1}{3} \ln |t|,$$

$$\zeta'(s) = -\sum_{1}^{N} \frac{\ln n}{n^s} - \frac{1}{(s-1)^2 N^{s-1}} - \frac{\ln N}{(s-1)N^{s-1}} - \\ - \int_N^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx + s \int_N^{\infty} \frac{\{x\} \ln x}{x^{s+1}} dx.$$

Оценим слагаемые в условиях леммы при $N = [|t|]$:

$$\left| \frac{1}{(s-1)^2 N^{s-1}} \right| \le \frac{1}{9} \frac{1}{N^{\sigma-1}} \le \frac{1}{9}, \quad \left| \frac{\ln N}{(s-1)N^{s-1}} \right| \le \frac{1}{3} \ln N \le \frac{1}{3} \ln |t|,$$

$$\left| \int_N^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \right| \le \int_N^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{N} \le \frac{1}{2},$$

$$\zeta'(s) = -\sum_1^N \frac{\ln n}{n^s} - \frac{1}{(s-1)^2 N^{s-1}} - \frac{\ln N}{(s-1)N^{s-1}} -$$

$$- \int_N^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}}\,dx + s\int_N^\infty \frac{\{x\}\ln x}{x^{s+1}}\,dx.$$

Оценим слагаемые в условиях леммы при $N = [|t|]$:

$$\left|\frac{1}{(s-1)^2 N^{s-1}}\right| \le \frac{1}{9}\frac{1}{N^{\sigma-1}} \le \frac{1}{9}, \quad \left|\frac{\ln N}{(s-1)N^{s-1}}\right| \le \frac{1}{3}\ln N \le \frac{1}{3}\ln|t|,$$

$$\left|\int_N^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}}\,dx\right| \le \int_N^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{N} \le \frac{1}{2},$$

$$\left|s\int_N^\infty \frac{\{x\}\ln x}{x^{s+1}}\right| \le (|t|+2)\int_N^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -(|t|+2)\left(\frac{\ln x + 1}{x}\right)\Bigg|_N^\infty =$$

$$= (|t|+2)\left(\frac{\ln N + 1}{N}\right) \le 2\ln|t| \cdot \frac{|t|+2}{|t|-1} \le 5\ln|t|.$$

Завершение доказательства леммы 1

Осталось оценить первое слагаемое. Для этого воспользуемся неравенством $\frac{\ln n}{n} \le \int_{n-1}^{n} \frac{\ln x}{x} dx$, справедливым для $n \ge 4$, так как функция $\frac{\ln x}{x}$ при $x \ge e$ монотонно убывает. Имеем

$$\left| \sum_{2}^{N} \frac{\ln n}{n^s} \right| \le \sum_{2}^{N} \frac{\ln n}{n} \le \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \int_{3}^{N} \frac{\ln x}{x} dx \le$$

$$\le \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \frac{1}{2} \ln^2 N - \frac{1}{2} \ln^2 3 \le \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} \ln^2 N < \ln^2 N \le \ln^2 |t|.$$

Завершение доказательства леммы 1

Осталось оценить первое слагаемое. Для этого воспользуемся неравенством $\frac{\ln n}{n} \le \int_{n-1}^{n} \frac{\ln x}{x} dx$, справедливым для $n \ge 4$, так как функция $\frac{\ln x}{x}$ при $x \ge e$ монотонно убывает. Имеем

$$\left| \sum_{2}^{N} \frac{\ln n}{n^s} \right| \le \sum_{2}^{N} \frac{\ln n}{n} \le \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \int_{3}^{N} \frac{\ln x}{x} dx \le$$

$$\le \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \frac{1}{2}\ln^2 N - \frac{1}{2}\ln^2 3 \le \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}\ln^2 N < \ln^2 N \le \ln^2 |t|.$$

Наконец, получаем оценку для производной дзета-функции Римана

$$|\zeta'(s)| \le \frac{1}{9} + \frac{1}{3}\ln|t| + \frac{1}{2} + 5\ln|t| + \ln^2|t| \le 8\ln^2|t|.$$

Гипотеза Римана о нулях дзета-функции.

В 1859г. Б. Риман доказал, что функция

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$$

не меняется при замене s на $1-s$. Отсюда следует, что $\zeta(s)$ имеет однократные нули в точках -2, -4, -6, ... Эти нули называются тривиальными, так как связаны с полюсами $\Gamma(s/2)$. Остальные нули называтся нетривиальными. Все они лежат в критической полосе: $0 < \sigma < 1$. **Гипотеза Римана** утверждает: *все нетривиальные нули дзета-функции лежат на критической прямой*, т.е. у них $\sigma = 1/2$. В 1914г. Х. Харди доказал, что на критической прямой лежит бесконечное количество нулей дзета-функции. А. Сельберг в 1942 году установил, что положительная доля всех нулей дзета-функции Римана (их множество бесконено) лежит на критической прямой $\Re(s) = \frac{1}{2}$. В настоящее время гипотеза Римана — одна из самых известных нерешенных математических задач.

Ниже мы докажем, что на единичной прямой $\sigma = 1$ не лежит ни один нуль дзета - функции. Этого будет достаточно для доказательства асимптотического закона распределения простых чисел.

Лемма 2

Для любых действительных чисел φ *и* $r, 0 < r < 1$, *выполняется неравенство*

$$P = \left|(1-r)^3(1-re^{i\varphi})^4(1-re^{2i\varphi})\right| \leq 1.$$

Для доказательства мы воспользуемся тождествами

$$|z| < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z); \quad \Re \ln(1-z) = \ln|1-z|.$$

Доказательство леммы 2.

$$P = \left|(1-r)^3(1-re^{i\varphi})^4(1-re^{2i\varphi})\right| \le 1.$$

Доказательство леммы 2.

$$P = \left|(1-r)^3(1-re^{i\varphi})^4(1-re^{2i\varphi})\right| \le 1.$$

$$\begin{aligned}
-\ln P &= -3\ln|1-r| - 4\ln|1-re^{i\varphi}| - \ln|1-re^{2i\varphi}| = \\
&= -3\Re\ln(1-r) - 4\Re\ln(1-re^{i\varphi}) - \Re\ln(1-re^{2i\varphi}) = \\
&= 3\Re\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n} + 4\Re\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}e^{in\varphi} + \Re\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}e^{2in\varphi} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}(3+4\cos n\varphi+\cos 2n\varphi) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}(1+\cos n\varphi)^2 \ge 0.
\end{aligned}$$

Теорема 4

Функция $\zeta(s)$ не имеет нулей на прямой $\Re s = 1$.

Как и ранее будем использовать обозначения: $s = \sigma + it$, считая $1 < \sigma \leq 2$ в следующем доказательстве. Пользуясь трижды тождеством Эйлера, находим

$$\left|\zeta(\sigma)^3 \cdot \zeta(\sigma + it)^4 \cdot \zeta(\sigma + 2it)\right| =$$
$$= \prod_p \left|(1 - p^{-\sigma})^3 (1 - p^{-\sigma - it})^4 (1 - p^{-\sigma - 2it})\right|^{-1} \geq 1.$$

Последнее неравенство получено с помощью предыдущей леммы, где для каждого произведения с фиксировынным p используется $r = p^{-\sigma}$, $\varphi = -t \cdot lnp$.

Завершение доказательства.

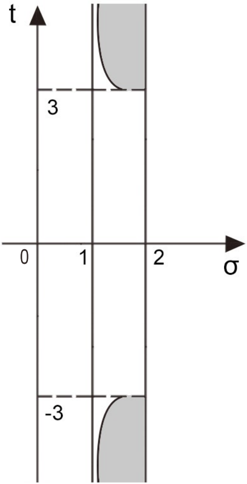
Предположим, что дзета-функция обращается в нуль в точке $s_0 = 1 + it_0, t_0 \neq 0$, лежащей на единичной прямой. Пользуясь аналитичностью $\zeta(s)$ в точках $s_0 = 1 + it_0$ и $1 + 2it_0$ и тем, что она имеет полюс первого порядка в точке 1, для $s = \sigma + it_0$ при $\sigma \to 1$ находим

$$\zeta(s) = \zeta(1 + it_0) + O(\sigma - 1) = O(\sigma - 1),$$
$$\zeta(\sigma + 2it_0) = O(1), \quad \zeta(\sigma) = O((\sigma - 1)^{-1}).$$

Поэтому находим

$$1 \leq \left|\zeta(\sigma)^3\zeta(\sigma + it_0)^4\zeta(\sigma + 2it_0)\right| = O((\sigma-1)^{-3}(\sigma-1)^4) = O(\sigma-1).$$

Получившееся противоречие завершает доказательство теоремы 4.


t
3
-3
0
1
2
σ

Оценка логарифмической производной дзета-функции.

Лемма 3

Если $s = \sigma + it$, $|t| \geq 3$, $1 \leq \sigma \leq 2$, *то*

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leq c\ln^9|t|, \quad \text{где} \quad c = 2^{23}.$$

Для доказательства рассмотрим два случая.

1) $2 \geq \sigma \geq 1 + \frac{1}{c\ln^9|t|} = \sigma_1$. Тогда

$$|\zeta(\sigma)| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma} \leq 1 + \int_1^\infty \frac{dx}{x^\sigma} = \frac{2}{\sigma - 1} \leq 2c\ln^9|t|,$$

$$|\zeta(\sigma + 2it)| \leq 5\ln 2|t| < 16\ln|t|$$

$$|\zeta(\sigma)| \le 2c\ln^9|t|, \qquad |\zeta(\sigma+2it)| < 16\ln|t|$$

$$1 \le |\zeta(\sigma)^3\zeta(\sigma+it)^4\zeta(\sigma+2it)| \le (2c)^3\ln^{27}|t|\cdot|\zeta(s)|^4\cdot 16\ln|t|,$$
$$|\zeta(s)|^{-1} \le \left((2c)^3\cdot 16\right)^{1/4}\ln^7|t| = 2^{-4}c\ln^7|t|,$$
$$|\zeta(s)| \ge 2^4c^{-1}\ln^{-7}|t|.$$

2) Пусть теперь $1 \le \sigma \le \sigma_1 \qquad s = \sigma + it, \quad s_1 = \sigma_1 + it$. Имеем

$$|\zeta(\sigma+it) - \zeta(\sigma_1+it)| = \left|\int_\sigma^{\sigma_1}\zeta'(u+it)\,du\right|$$
$$\le |\sigma_1-\sigma|\cdot 8\ln^2|t| \le 8c^{-1}\ln^{-7}|t|.$$

По неравенству треугольника имеем

$$|\zeta(s)| \ge |\zeta(\sigma_1+it)| - 8c^{-1}\ln^{-7}|t| \ge 8c^{-1}\ln^{-7}|t|.$$

$$|\zeta(s)|^{-1} \le 2^{-3}c\ln^7|t|.$$

Объединяя вместе неравенства, доказанные для первой и второй области, находим

$$|\zeta(s)|^{-1} \le \max\bigl(2^{-4}c\ln^7|t|,\ 2^{-3}c\ln^7|t|\bigr) = 2^{-3}c\ln^7|t|, \qquad ,$$

при $|t| \ge 3$, $1 \le \sigma \le 2$. И далее

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \le 8\ln^2|t| \cdot 2^{-3}c\ln^7|t| = c\ln^9|t|.$$

Лемма 3 доказана.

Конец
четвёртой лекции.

Лекция 5.
Доказательство асимптотического закона распределения простых чисел.

Теорема 5 (Асимптотический закон)

При $x \to \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

Теорема 5 (Асимптотический закон)

При $x \to \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

Напоминание

$$\pi(x) = \sum_{p \le x} 1, \qquad \psi(x) = \sum_{p \le x} \left[\frac{\ln x}{\ln p}\right] \ln p.$$

Теорема 5 (Асимптотический закон)

При $x \to \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

Напоминание

$$\pi(x) = \sum_{p \le x} 1, \qquad \psi(x) = \sum_{p \le x} \left[\frac{\ln x}{\ln p}\right] \ln p.$$

Лемма 4

При $x \to +\infty$ справедлива асимптотическая формула $\pi(x)\ln x - \psi(x) = o(x)$.

Лемма 4

При $x \to \infty$ *справедлива асимптотическая формула* $\pi(x)\ln x - \psi(x) = o(x)$.

$$\pi(x)\ln x - \psi(x) = \sum_{p \le x} \ln x - \sum_{p \le x} \left[\frac{\ln x}{\ln p}\right] \ln p = \sum_{p \le x} \left\{\frac{\ln x}{\ln p}\right\} \ln p \ge 0.$$

Лемма 4

При $x \to \infty$ справедлива асимптотическая формула $\pi(x)\ln x - \psi(x) = o(x)$.

$$\pi(x)\ln x - \psi(x) = \sum_{p \le x} \ln x - \sum_{p \le x} \left[\frac{\ln x}{\ln p}\right] \ln p = \sum_{p \le x} \left\{\frac{\ln x}{\ln p}\right\} \ln p \ge 0.$$

$$\pi(x)\ln x - \psi(x) = \sum_{p \le x} \ln x - \sum_{p \le x} \left[\frac{\ln x}{\ln p}\right] \ln p \le \sum_{p \le x} (\ln x - \ln p) =$$

Лемма 4

При $x \to \infty$ справедлива асимптотическая формула $\pi(x)\ln x - \psi(x) = o(x)$.

$$\pi(x)\ln x - \psi(x) = \sum_{p\le x} \ln x - \sum_{p \le x}\left[\frac{\ln x}{\ln p}\right]\ln p = \sum_{p\le x}\left\{\frac{\ln x}{\ln p}\right\}\ln p \ge 0.$$

$$\pi(x)\ln x - \psi(x) = \sum_{p\le x} \ln x - \sum_{p \le x}\left[\frac{\ln x}{\ln p}\right]\ln p \le \sum_{p\le x}(\ln x - \ln p) =$$

$$= \sum_{p\le x}\ln\frac{x}{p} = \sum_{p\le \frac{x}{\ln x}}\ln\frac{x}{p} + \sum_{\frac{x}{\ln x}<p\le x}\ln\frac{x}{p} \le \pi\left(\frac{x}{\ln x}\right)\ln x + \pi(x)\ln\ln x \le$$

Лемма 4

При $x \to \infty$ справедлива асимптотическая формула
$\pi(x)\ln x - \psi(x) = o(x)$.

$$\pi(x)\ln x - \psi(x) = \sum_{p\le x} \ln x - \sum_{p\le x}\left[\frac{\ln x}{\ln p}\right]\ln p = \sum_{p\le x}\left\{\frac{\ln x}{\ln p}\right\}\ln p \ge 0.$$

$$\pi(x)\ln x - \psi(x) = \sum_{p\le x} \ln x - \sum_{p\le x}\left[\frac{\ln x}{\ln p}\right]\ln p \le \sum_{p\le x}(\ln x - \ln p) =$$

$$= \sum_{p\le x}\ln\frac{x}{p} = \sum_{p\le\frac{x}{\ln x}}\ln\frac{x}{p} + \sum_{\frac{x}{\ln x}<p\le x}\ln\frac{x}{p} \le \pi\left(\frac{x}{\ln x}\right)\ln x + \pi(x)\ln\ln x \le$$

$$\le b\frac{\frac{x}{\ln x}}{\ln\frac{x}{\ln x}}\ln x + b\frac{x}{\ln x}\ln\ln x = o(x).$$

Следствие 1

Если $\psi(x) \sim x$, *то* $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$.

Следствие 1

Если $\psi(x) \sim x$, *то* $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$.

Разделим на x равенство

$$\pi(x)\ln x - \psi(x) = o(x).$$

Тогда

$$\frac{\pi(x)}{x/\ln x} - \frac{\psi(x)}{x} = o(1) \to 0$$

при $x \to +\infty$

Следствие 1

Если $\psi(x) \sim x$, *то* $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$.

Разделим на x равенство

$$\pi(x)\ln x - \psi(x) = o(x).$$

Тогда

$$\frac{\pi(x)}{x/\ln x} - \frac{\psi(x)}{x} = o(1) \to 0$$

при $x \to +\infty$ и

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

Определим функцию

$$\omega(x) = \int_1^x \frac{\psi(t)}{t} dt$$

Определим функцию

$$\omega(x) = \int_1^x \frac{\psi(t)}{t} dt$$

Лемма 5

Если $\omega(x) \sim x$ *при* $x \to +\infty$, *то* $\psi(x) \sim x$.

Определим функцию

$$\omega(x) = \int_1^x \frac{\psi(t)}{t} dt$$

Лемма 5

Если $\omega(x) \sim x$ *при* $x \to +\infty$, *то* $\psi(x) \sim x$.

Пусть $x_2 > x_1 > 0$. Так как $\psi(x)$ неубывающая функция, то

$$\omega(x_2) - \omega(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\psi(t)}{t} dt \leq \psi(x_2) \int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{t} = \psi(x_2) \ln \frac{x_2}{x_1},$$

Определим функцию

$$\omega(x) = \int_1^x \frac{\psi(t)}{t} dt$$

Лемма 5

Если $\omega(x) \sim x$ при $x \to +\infty$, то $\psi(x) \sim x$.

Пусть $x_2 > x_1 > 0$. Так как $\psi(x)$ неубывающая функция, то

$$\omega(x_2) - \omega(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\psi(t)}{t} dt \le \psi(x_2) \int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{t} = \psi(x_2) \ln \frac{x_2}{x_1},$$

$$\omega(x_2) - \omega(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\psi(t)}{t} dt \ge \psi(x_1) \int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{t} = \psi(x_1) \ln \frac{x_2}{x_1}.$$

При любых $x_2 > x_1 > 0$ имеем

$$\psi(x_2)\ln\frac{x_2}{x_1} \geq \omega(x_2) - \omega(x_1) \geq \psi(x_1)\ln\frac{x_2}{x_1}. \qquad (1)$$

1. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и положим справа в (1) $x_1 = x, x_2 = (1+\varepsilon)x$. Тогда

$$\psi(x) \leq \frac{\omega((1+\varepsilon)x) - \omega(x)}{\ln(1+\varepsilon)} \quad \Rightarrow \quad \limsup_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\varepsilon}{\ln(1+\varepsilon)}.$$

При любых $x_2 > x_1 > 0$ имеем

$$\psi(x_2)\ln\frac{x_2}{x_1} \geq \omega(x_2) - \omega(x_1) \geq \psi(x_1)\ln\frac{x_2}{x_1}. \qquad (1)$$

1. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и положим справа в (1) $x_1 = x, x_2 = (1+\varepsilon)x$. Тогда

$$\psi(x) \leq \frac{\omega((1+\varepsilon)x) - \omega(x)}{\ln(1+\varepsilon)} \quad \Rightarrow \quad \limsup_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\varepsilon}{\ln(1+\varepsilon)}.$$

2. Положим слева в (1) $x_1 = (1-\varepsilon)x, x_2 = x$. Тогда

$$\psi(x) \geq \frac{\omega(x) - \omega((1-\varepsilon)x)}{-\ln(1-\varepsilon)} \quad \Rightarrow \quad \liminf_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{x} \geq \frac{-\varepsilon}{\ln(1-\varepsilon)}.$$

При любых $x_2 > x_1 > 0$ имеем

$$\psi(x_2)\ln\frac{x_2}{x_1} \geq \omega(x_2) - \omega(x_1) \geq \psi(x_1)\ln\frac{x_2}{x_1}. \qquad (1)$$

1. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и положим справа в (1) $x_1 = x, x_2 = (1+\varepsilon)x$. Тогда

$$\psi(x) \leq \frac{\omega((1+\varepsilon)x) - \omega(x)}{\ln(1+\varepsilon)} \quad \Rightarrow \quad \limsup_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\varepsilon}{\ln(1+\varepsilon)}.$$

2. Положим слева в (1) $x_1 = (1-\varepsilon)x, x_2 = x$. Тогда

$$\psi(x) \geq \frac{\omega(x) - \omega((1-\varepsilon)x)}{-\ln(1-\varepsilon)} \quad \Rightarrow \quad \liminf_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{x} \geq \frac{-\varepsilon}{\ln(1-\varepsilon)}.$$

$$\frac{\varepsilon}{\ln(1+\varepsilon)} \geq \limsup_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{x} \geq \liminf_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{x} \geq \frac{-\varepsilon}{\ln(1-\varepsilon)}.$$

$$\frac{\varepsilon}{\ln(1+\varepsilon)} \geq \limsup_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x} \geq \liminf_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x} \geq \frac{-\varepsilon}{\ln(1-\varepsilon)}.$$

Устремляя ε к нулю, находим

$$1 \geq \limsup_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x} \geq \liminf_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x} \geq 1.$$

Значит,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

Лемма 6

Пусть $a > 0, b > 0$. *Тогда*

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{b^s}{s^2} ds = \begin{cases} \ln b & \text{при} \quad b \geq 1, \\ 0 & \text{при} \quad b < 1, \end{cases}$$

Причём интеграл абсолютно сходится.

Лемма 6

Пусть $a > 0, b > 0$. Тогда

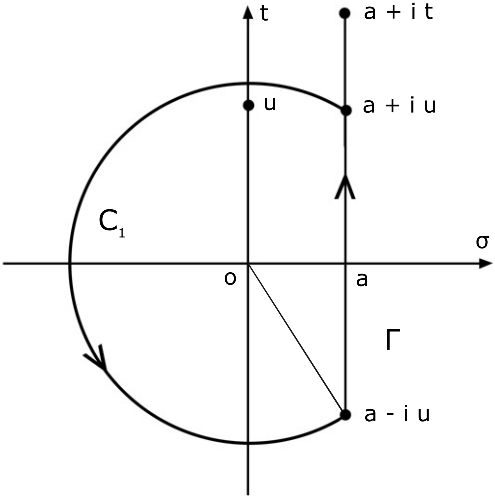
$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{b^s}{s^2} ds = \begin{cases} \ln b & \textit{при} \quad b \geq 1, \\ 0 & \textit{при} \quad b < 1, \end{cases}$$

Причём интеграл абсолютно сходится.

Заметим, что на прямой интегрирования выполняются равенства

$$\left| \frac{b^s}{s^2} \right| = \frac{b^a}{|s|^2} = \frac{b^a}{a^2 + t^2}.$$

Значит, интеграл абсолютно сходится. Рассмотрим далее два случая.



(a) $b \geq 1$

$b \geq 1. \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \bigcup C_1} \frac{b^s}{s^2} ds = \mathrm{Res}_{s=0} \frac{b^s}{s^2} = \ln b.$

$$b \geq 1. \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\bigcup C_1}\frac{b^s}{s^2}ds = \mathrm{Res}_{s=0}\frac{b^s}{s^2} = \ln b.$$

Ряд Лорана: $$\frac{b^s}{s^2} = \frac{1}{s^2} + \frac{\ln b}{s} + \frac{\ln^2 b}{2!} + \dots$$

$$b \geq 1. \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma \bigcup C_1} \frac{b^s}{s^2} ds = \mathrm{Res}_{s=0} \frac{b^s}{s^2} = \ln b.$$

$$\text{Ряд Лорана:} \quad \frac{b^s}{s^2} = \frac{1}{s^2} + \frac{\ln b}{s} + \frac{\ln^2 b}{2!} + \dots$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{b^s}{s^2} ds \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{b^a}{|s|^2} \cdot 2\pi |s| = \frac{b^a}{\sqrt{a^2+u^2}} \to 0,$$

при $u \to \infty$. На C_1 при $b \geq 1$ имеем $|b^s| = b^\sigma \leq b^a$.

$$b \geq 1. \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \bigcup C_1} \frac{b^s}{s^2} ds = \mathrm{Res}_{s=0} \frac{b^s}{s^2} = \ln b.$$

$$\text{Ряд Лорана:} \quad \frac{b^s}{s^2} = \frac{1}{s^2} + \frac{\ln b}{s} + \frac{\ln^2 b}{2!} + \dots$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{b^s}{s^2} ds \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{b^a}{|s|^2} \cdot 2\pi |s| = \frac{b^a}{\sqrt{a^2 + u^2}} \to 0,$$

при $u \to \infty$. На C_1 при $b \geq 1$ имеем $|b^s| = b^\sigma \leq b^a$.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{b^s}{s^2} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \bigcup C_1} \frac{b^s}{s^2} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{b^s}{s^2} ds = \ln b + o(1).$$

$$b \geq 1. \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\bigcup C_1}\frac{b^s}{s^2}ds = \mathrm{Res}_{s=0}\frac{b^s}{s^2} = \ln b.$$

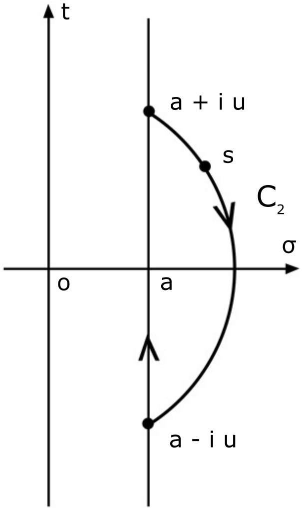
$$\text{Ряд Лорана:} \quad \frac{b^s}{s^2} = \frac{1}{s^2} + \frac{\ln b}{s} + \frac{\ln^2 b}{2!} + \dots$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{b^s}{s^2}ds\right| \leq \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{b^a}{|s|^2}\cdot 2\pi|s| = \frac{b^a}{\sqrt{a^2+u^2}} \to 0,$$

при $u \to \infty$. На C_1 при $b \geq 1$ имеем $|b^s| = b^\sigma \leq b^a$.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{b^s}{s^2}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\bigcup C_1}\frac{b^s}{s^2}ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{b^s}{s^2}ds = \ln b + o(1).$$

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{b^s}{s^2}ds = \ln b.$$



(a) $0 < b < 1$

$$0 < b < 1. \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma \bigcup C_2} \frac{b^s}{s^2} ds = 0$$

$$0 < b < 1. \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\bigcup C_2} \frac{b^s}{s^2}ds = 0$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{b^s}{s^2}ds = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{b^s}{s^2}ds = o(1),$$

при $u \to \infty$. Для доказательства последнего равенства имеем на C_2 при $0 < b < 1$ соотношения $|b^s| = b^\sigma \leq b^a$ и

$$0 < b < 1. \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\bigcup C_2}\frac{b^s}{s^2}ds = 0$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{b^s}{s^2}ds = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{b^s}{s^2}ds = o(1),$$

при $u \to \infty$. Для доказательства последнего равенства имеем на C_2 при $0 < b < 1$ соотношения $|b^s| = b^\sigma \le b^a$ и

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{b^s}{s^2}ds\right| \le \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{b^a}{|s|^2}\cdot 2\pi|s| = \frac{b^a}{\sqrt{a^2+u^2}} \to 0.$$

$$0 < b < 1. \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\bigcup C_2} \frac{b^s}{s^2}ds = 0$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{b^s}{s^2}ds = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{b^s}{s^2}ds = o(1),$$

при $u \to \infty$. Для доказательства последнего равенства имеем на C_2 при $0 < b < 1$ соотношения $|b^s| = b^\sigma \leq b^a$ и

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{b^s}{s^2}ds\right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{b^a}{|s|^2} \cdot 2\pi|s| = \frac{b^a}{\sqrt{a^2+u^2}} \to 0.$$

Итак

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{b^s}{s^2}ds = \lim_{u\to\infty}\int_{a-iu}^{a+iu} \frac{b^s}{s^2}ds = 0.$$

$$0 < b < 1. \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma \bigcup C_2} \frac{b^s}{s^2} ds = 0$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{b^s}{s^2} ds = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{b^s}{s^2} ds = o(1),$$

при $u \to \infty$. Для доказательства последнего равенства имеем на C_2 при $0 < b < 1$ соотношения $|b^s| = b^\sigma \le b^a$ и

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{b^s}{s^2} ds\right| \le \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{b^a}{|s|^2} \cdot 2\pi|s| = \frac{b^a}{\sqrt{a^2+u^2}} \to 0.$$

Итак

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{b^s}{s^2} ds = \lim_{u\to\infty} \int_{a-iu}^{a+iu} \frac{b^s}{s^2} ds = 0.$$

Лемма 6 полностью доказана.

Следующая теорема была доказана независимо двумя математиками Адамаром и Валле-Пуссеном в 1896 году.

Теорема 6 (Асимптотический закон)

Функция $\pi(x)$, *равная количеству простых чисел на отрезке от* 1 *до* x, *удовлетворяет асимптотическому равенству*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

при $x \to +\infty$.

Следующая теорема была доказана независимо двумя математиками Адамаром и Валле-Пуссеном в 1896 году.

Теорема 6 (Асимптотический закон)

Функция $\pi(x)$, равная количеству простых чисел на отрезке от 1 до x, удовлетворяет асимптотическому равенству

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

при $x \to +\infty$.

На этой лекции было доказано, что при $x \to \infty$

1. Если функция Чебышева $\psi(x) \sim x$, то $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$;
2. Если функция $\omega(x) = \int_1^x \frac{\psi(t)}{t} dt \sim x$, то $\psi(x) \sim x$.

Интегральное представление функции $\omega(x)$.

Лемма 7

Для любого $x > 1$ функция $\omega(x)$ представляется абсолютно сходящимся интегралом

$$\omega(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\cdot\frac{x^s}{s^2}ds. \tag{2}$$

Интеграл берётся по вертикальной прямой $\Re s = 2$.

Интегральное представление функции $\omega(x)$.

Лемма 7

Для любого $x > 1$ функция $\omega(x)$ представляется абсолютно сходящимся интегралом

$$\omega(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\cdot\frac{x^s}{s^2}ds. \qquad (2)$$

Интеграл берётся по вертикальной прямой $\Re s = 2$.

На пути интегрирования согласно лемме 2 лекции 2 имеем

$$\left|-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| = \left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\right| \leq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log n}{n^2} = c_1,$$

а также $|x^s| = x^2$ и $\dfrac{1}{|s^2|} = \dfrac{1}{4+t^2}$. Значит, модуль подинтегральной функции не превосходит $\dfrac{c_1 x^2}{4+t^2}$ на пути интегрирования, и интеграл абсолютно сходится.

Выберем натуральное число $N > x$, обозначим буквами $J(x)$ правую часть тождества (2) и представим сумму ряда для логарифмической производной $\zeta(s)$ в виде

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=2}^{N} \frac{\Lambda(n)}{n^s} + R_N(s), \qquad R_N(s) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \qquad (3)$$

Умножим теперь тождество (3) на $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{x^s}{s^2}$ и проинтегрируем каждое слагаемое под знаком суммы

$$\frac{\Lambda(n)}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s^2} ds = \begin{cases} 0, & \text{при } n > x; \\ \Lambda(n) \ln\left(\frac{x}{n}\right), & \text{при } n \leq x. \end{cases}$$

Выберем натуральное число $N > x$, обозначим буквами $J(x)$ правую часть тождества (2) и представим сумму ряда для логарифмической производной $\zeta(s)$ в виде

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=2}^{N} \frac{\Lambda(n)}{n^s} + R_N(s), \qquad R_N(s) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \qquad (3)$$

Умножим теперь тождество (3) на $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{x^s}{s^2}$ и проинтегрируем каждое слагаемое под знаком суммы

$$\frac{\Lambda(n)}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s^2} ds = \begin{cases} 0, & \text{при } n > x; \\ \Lambda(n) \ln\left(\frac{x}{n}\right), & \text{при } n \le x. \end{cases}$$

Далее

$$|R_N(s)| \le \sum_{N+1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^2} \le \rho_N = \sum_{N+1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}, \quad \rho_N \to 0, \quad N \to \infty. \quad (4)$$

$$J(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n) \ln\left(\frac{x}{n}\right) + I, \quad |I| \le \frac{\rho_N x^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{4+t^2} = O(\rho_N) \to 0.$$

Итак, доказано, что

$$J(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \cdot \frac{x^s}{s^2} ds = \sum_{n \le x} \Lambda(n) \ln \left(\frac{x}{n} \right).$$

Далее воспользуемся преобразованием Абеля, см. лемму 2 из третьей лекции, положив $a_k = \Lambda(k)$ и $g(t) = \ln \frac{x}{t}$. Тогда

$$A(x) = \sum_{k \le x} \Lambda(k) = \sum_{p^\alpha \le x} \Lambda(p^\alpha) = \sum_{p \le x} \left[\frac{\ln x}{\ln p} \right] \ln p = \psi(x).$$

Итак, доказано, что

$$J(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\cdot\frac{x^s}{s^2}ds = \sum_{n\le x}\Lambda(n)\ln\left(\frac{x}{n}\right).$$

Далее воспользуемся преобразованием Абеля, см. лемму 2 из третьей лекции, положив $a_k = \Lambda(k)$ и $g(t) = \ln\frac{x}{t}$. Тогда

$$A(x) = \sum_{k\le x}\Lambda(k) = \sum_{p^\alpha\le x}\Lambda(p^\alpha) = \sum_{p\le x}\left[\frac{\ln x}{\ln p}\right]\ln p = \psi(x).$$

С помощью преобразования Абеля находим

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)\ln\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n\le x}a_n\cdot g(n) = \psi(x)\cdot\ln 1 + \int_1^x \psi(t)t^{-1}dt =$$

$$= \int_1^x\frac{\psi(t)}{t}dt = \omega(x), \qquad \Longrightarrow \qquad J(x) = \omega(x).$$

Лемма 7 доказана.

Конец
пятой лекции.

Лекция 6
Завершение доказательства асимптотического закона распределения простых чисел.

На этой лекции мы завершим доказательство основного результата первой главы — асимптотического закона распределения простых чисел. Следующая теорема была доказана независимо двумя математиками Адамаром и Валле-Пуссеном в 1896 году.

Теорема 5

Функция $\pi(x)$, *равная количеству простых чисел на отрезке от* 1 *до* x, *удовлетворяет асимптотическому равенству*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

при $x \to +\infty$.

На этой лекции мы завершим доказательство основного результата первой главы — асимптотического закона распределения простых чисел. Следующая теорема была доказана независимо двумя математиками Адамаром и Валле-Пуссеном в 1896 году.

Теорема 5

Функция $\pi(x)$, равная количеству простых чисел на отрезке от 1 до x, удовлетворяет асимптотическому равенству

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

при $x \to +\infty$.

На позапрошлой лекции было доказано, что при $x \to \infty$

1. Если функция Чебышева $\psi(x) \sim x$, то $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$;

2. Если функция $\omega(x) = \int_1^x \frac{\psi(t)}{t} dt \sim x$, то $\psi(x) \sim x$.

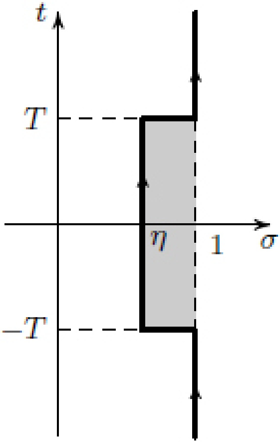
Интегральное представление функции $\omega(x)$.

Лемма 7

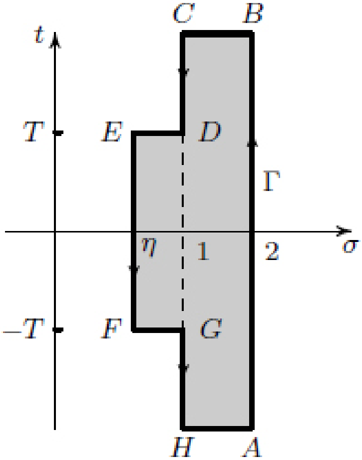
Для любого $x > 1$ функция $\omega(x)$ представляется абсолютно сходящимся интегралом

$$\omega(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\cdot\frac{x^s}{s^2}ds. \qquad (1)$$

Интеграл берётся по вертикальной прямой $\Re s = 2$.



(a) Путь $\Gamma(T, \eta)$



(b) Путь Γ

Рис.: 1. Пути интегрирования

Сдвиг контура.

Лемма 8

Пусть $0 < \eta < 1$, $T \geq 3$ *и дзета-функция не обращается в нуль в области* $\eta \leq \sigma \leq 1$, $-T \leq t \leq T$. *Тогда*

$$\frac{\omega(x)}{x} = 1 + R(x), \quad \text{где} \quad R(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(T,\eta)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \cdot \frac{x^{s-1}}{s^2} ds,$$

причём последний интеграл абсолютно сходится.

Выберем какое-нибудь действительное число $U > T$ и рассмотрим точки $B = 2 + iU$, $C = 1 + iU$, $H = 1 - iU$, $A = 2 - iU$, лежащие на прямых $\Re s = 1$ и $\Re s = 2$. По доказанному ранее дзета-функция не имеет нулей в полуплоскости $\Re s \geq 1$. Кроме того, по условию леммы у неё отсутствуют нули в прямоугольнике $\eta \leq \sigma < 1$, $-T \leq t < T$, см. рис. 1(a).

Сдвиг контура.

Поэтому функция

$$g(s)=\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\cdot\frac{x^s}{s^2}$$

внутри и на границе многоугольника, изображённого на левом рис. 1, не имеет особых точек, возможно лишь в точке $s=1$. Согласно теореме 3 из третьей лекции имеем $\zeta(s)=\frac{f(s)}{s-1}$ где функция $f(s)$ аналитична в точке $s=1$ и $f(1)=1$. Поэтому

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\frac{1}{s-1}-\frac{f'(s)}{f(s)},$$

откуда следует, что функция $g(s)$ имеет полюс первого порядка в точке $s=1$ и $\mathrm{Res}_{s=1}\,g(s)=x$. По теореме Коши имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(s)ds=\mathrm{Res}_{s=1}\,g(s)=x. \tag{2}$$

Сдвиг контура.

На луче, соединяющем точки $D = 1 + iT$ и $1 + i\infty$, выполняются соотношения

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leq c\ln^9|t|, \quad |x^{1+it}| = x, \quad |s|^2 = 1 + t^2 \quad T \leq t < \infty.$$

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s^2} ds\right| \leq \frac{xc\ln^9|t|}{1+t^2}. \tag{3}$$

Отсюда следует абсолютная сходимость интегралов $\int_{1+iT}^{1+i\infty} g(s)ds$ и аналогиного интеграла по лучу от $1 - iU$ до $1 - i\infty$. Оценим интегралы по перемычкам BC и HA.

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{BC} g(s)ds\right| \leq \left|\frac{1}{2\pi i}\int_1^2 g(\sigma + iU)d\sigma\right| \leq \frac{x^2}{2\pi}\cdot\frac{c\ln^9 U}{U^2+1} = o(U^{-1})$$

Точно так же оценивается интеграл по отрезку HA.

Сдвиг контура.

Равенство (2) теперь можно переписать в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{AB} g(s) = x - \frac{1}{2\pi i}\int_{CDEFGH} g(s)ds + o(U^{-1}).$$

Устремляя в этом равенстве переменную U к бесконечности и пользуясь доказанными фактами, находим

$$\omega(x) = x + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(T,\eta)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\cdot\frac{x^s}{s^2}ds = x(1+R(x)).$$

Лемма 8 доказана.

Завершение доказательства.

На контуре $\Re s = 2$ справедливо равенство $|x^s| = x^2$, из которого следует, что чем левее расположен контур интегрирования в лемме 8, тем меньшие значения при больших x принимает модуль функции x^s. Будем стремиться перенести контур интегрирования по возможности левее. Препятствием к этому будут служить особые точки подынтегральной функции. Первой из них будет точка $s = 1$ — полюс функции $\zeta(s)$, а следовательно, и функции $-\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$. Вычет, в этой точке дает главный член асимптотики для $\omega(x)$. Остальные особые точки лежат в нулях функции $\zeta(s)$. Имеющаяся в нашем распоряжении информация о нулях, а именно то, что они отсутствуют на прямой $\Re s = 1$, позволит получить асимптотическое равенство $\omega(x) = x + o(x)$.

Завершение доказательства.

Улучшение остаточного члена $o(x)$ связано с возможностью дальнейшего продвижения контура интегрирования влево, а значит, с получением информации о расположении нулей дзета - функции Римана левее прямой $Res = 1$. Известно, что в критической полосе $0 \leq \Re s \leq 1$ функция $\zeta(s)$ имеет бесконечное множество нулей, а из функционального уравнения для $\zeta(s)$ следует, что нули ее в критической полосе расположены симметрично относительно прямой $\Re s = 1/2$. Справедливость гипотезы Римана о том, что все нули дзета функции в критической полосе лежат на прямой $\Re s = 1/2$, дала бы возможность сдвинуть контур интегрирования достаточно близко к прямой $\Re s = 1/2$, что привело бы к наилучшей оценке остаточного члена.

Выбор параметра T.

Для завершения доказательства асимптотического закона осталось показать, как выбрать действительные числа T, η, удовлетворяющие условиям леммы 8 и доказать, что при таком выборе определённый в этой лемме остаток $R(x)$ стремится к нулю с ростом x до бесконечности. Выберем и фиксируем в дальнейших рассуждениях какое-нибудь число $\varepsilon > 0$.
Из доказанной ранее в этой лекции оценки (3) при достаточно большом T следуют неравенства

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{1+iT}^{1+i\infty} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^{s-1}}{s^2} ds \right| \leq \frac{c}{2\pi} \int_{T}^{\infty} \frac{\ln^9 t}{1+t^2} dt < \frac{\varepsilon}{5}. \qquad (4)$$

Интеграл, участвующий в последнем неравенстве, есть остаток абсолютно сходящегося интеграла и потому стремится к нулю с ростом $T > 0$. Значит, T можно выбрать столь большим, чтобы этот остаток был меньше $\varepsilon/5$. Для предыдущего неравенства существенно, чтобы выполнялось $T > 3$.

В точности такое же неравенство выполняется для второго бесконечного участка пути $\Gamma(T,\eta)$.

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1-iT}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\frac{x^{s-1}}{s^2}ds\right| < \frac{\varepsilon}{5}. \qquad (5)$$

Остается подобрать нужное η. Поскольку на отрезке $[1-iT, 1+iT]$ функция $\zeta(s)$ в нуль не обращается, то для каждой точки P этого отрезка найдется открытый круг с центром в P, в котором $\zeta(s)\neq 0$. Отрезок компакт, поэтому можно выбрать конечное подпокрытие его такими кругами, и найдётся число η, столь близкое к 1, что весь отрезок $[\eta - iT, \eta + iT]$ будет содержаться в объединении кругов из подпокрытия.

Оценка интегралов по отрезкам ED и GF.

Функция $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ аналитична, а потому непрерывна и ограничена на ломаной замкнутой линии $DEFG$. Обозначим
$M = \max_{DEFG} \left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|$, $M = M(T, \eta) = M(\varepsilon) > 0$.

Оценка интегралов по отрезкам ED и GF.

Функция $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ аналитична, а потому непрерывна и ограничена на ломаной замкнутой линии $DEFG$. Обозначим $M = \max_{DEFG}\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|$, $M = M(T,\eta) = M(\varepsilon) > 0$. Отрезок ED может быть параметризован переменной σ. Действительно, $s = \sigma + iT$, $\eta \le \sigma \le 1$. При достаточно большом x имеем

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{ED}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\cdot\frac{x^{s-1}}{s^2}ds\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{1} Mx^{\sigma-1}d\sigma =$$

$$= \frac{M}{2\pi}\frac{x^{\sigma-1}}{\ln x}\Bigg|_{-\infty}^{1} = \frac{M}{2\pi\ln x} < \frac{\varepsilon}{5},$$

и аналогично $\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{GF}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\cdot\frac{x^{s-1}}{s^2}ds\right| \le \frac{M}{2\pi\ln x} < \frac{\varepsilon}{5}.$

Оценка интеграла по отрезку EF.

Отрезок EF может быть параметризован переменной t. Действительно, $s = \eta - it$, $-T \leq t \leq T$. На отрезке интегрирования логарифмическая производная дзета-функции по абсолютной велиине не превосходит M, $|x^{s-1}| = x^{\eta-1}$ и $|s|^2 = \eta^2 + |t|^2 \geq \eta^2$. Длина отрезка интегрирования равна $2T$. Поэтому при достаточно большом x имеем

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{EF} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \cdot \frac{x^{s-1}}{s^2} ds \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{M}{\eta^2} x^{\eta-1} dt = \frac{MT}{\pi\eta^2} x^{\eta-1} < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Для завершения локазательства достаточно сложить оценки интегралов по пяти указанным выше отрезкам. Из полученных оценок следует, что для любого $\varepsilon > 0$ и всех x, превосходящих некоторую границу, зависящую от ε, выполняется неравенство $|R(x)| < \varepsilon$. Другими словами $R(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

Следствие 1

При $n \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$p_n \sim n \ln n,$$

где p_n — простое число с номером n.

Из асимптотического закона следует, что при $n \to \infty$ справедливо равенство

$$n = \pi(p_n) = \frac{p_n}{\ln p_n} \cdot (1 + a_n),$$

где $a_n \to 0$. Следовательно, при $n \to \infty$ имеем

$$n \ln n = p_n(1 + a_n) \cdot (\ln p_n - \ln \ln p_n + \ln(1 + a_n)) \sim p_n.$$

Следствие доказано.

Глава II. Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии.

Теорема 6

Справедливы равенства

$$\sum_{p\equiv 1 \mod 4} \frac{1}{p} = \infty, \qquad \sum_{p\equiv 3 \mod 4} \frac{1}{p} = \infty. \tag{6}$$

Введем функции действительного переменного $s > 1$

$$L_0(s) := 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^s},$$

$$L_1(s) := 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s}.$$

Оба ряда абсолютно сходятся в указанной области, а второй, по признаку Лейбница, условно сходится и при $1 \geq s > 0$.

Определим функции

$$\chi_0(n) = \begin{cases} 0, & \text{n=2k;} \\ 1, & \text{n=2k+1.} \end{cases}$$

$$\chi_1(n) = \begin{cases} 0, & \text{n=2k;} \\ 1, & \text{n=4k+1;} \\ -1, & \text{n=4k-1.} \end{cases}$$

$$L_0(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_0(n)}{n^s}, \qquad L_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_1(n)}{n^s}.$$

Легко проверить, что χ_0 и χ_1 вполне мультипликативные функции. Такими же будут и функции $\frac{\chi(n)}{n^s}$, где $\chi = \chi_0(n)$ или $\chi = \chi_1(n)$. Значит, к функциям $L_0(s)$, $L_1(s)$ можно применить тождество Эйлера и получить

$$L_0(s) = \prod_{p \geq 3} \left(1 - \frac{\chi_0(p)}{p^s}\right)^{-1}, \qquad L_1(s) = \prod_{p \geq 3} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Логарифмируя левую и правую части полученных выражений, получаем

$$\ln L(s) \quad = \quad -\sum_{p\geq 3} \ln\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right) \quad = \quad \sum_{p\geq 3}\left(\frac{\chi(p)}{p^s}+r_p(s)\right).$$

Оценим $r_p(s)$. Если $|x|<\frac{1}{2}$, то $\ln(1-x)=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\ldots\right)$, поэтому

$$|\ln(1-x)+x| \leq \frac{|x|^2}{2}+\frac{|x|^3}{3}+\ldots \leq \frac{1}{2}(|x|^2+|x|^3+\ldots) =$$

$$= \frac{|x|^2}{2(1-|x|)} \leq |x^2|.$$

и $|r_p(s)| \leq \frac{1}{p^2}$. Значит, $\left|\sum_{p\geq 3} r_p(s)\right| \leq \sum_{p\geq 3}\frac{1}{p^2} \leq \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2} \leq 2$. Следовательно

$$\ln L(s) = \sum_{p\geq 3}\frac{\chi(p)}{p^s} + O(1), \quad s>1.$$

Теорема Эйлера.

Из последнего равенства находим

$$\sum_{p\equiv 1(4)} \frac{1}{p^s} + \sum_{p\equiv 3(4)} \frac{1}{p^s} = \ln L_0(s) + O(1),$$

$$\sum_{p\equiv 1(4)} \frac{1}{p^s} - \sum_{p\equiv 3(4)} \frac{1}{p^s} = \ln L_1(s) + O(1).$$

Теорема Эйлера.

Из последнего равенства находим

$$\sum_{p\equiv 1(4)} \frac{1}{p^s} + \sum_{p\equiv 3(4)} \frac{1}{p^s} = \ln L_0(s) + O(1),$$

$$\sum_{p\equiv 1(4)} \frac{1}{p^s} - \sum_{p\equiv 3(4)} \frac{1}{p^s} = \ln L_1(s) + O(1).$$

Складывая и вычитая эти равенства, получаем

$$\sum_{p\equiv 1(4)} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{2}(\ln L_0(s) + \ln L_1(s)) + O(1).$$

$$\sum_{p\equiv 3(4)} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{2}(\ln L_0(s) - \ln L_1(s)) + O(1).$$

Теорема Эйлера.

Перейдём к пределу $s \to 1+$ в равенствах, полученных в конце предыдущего слайда. Если бы ряды (6) сходились, то это означало бы, что существуют пределы правых частей равенств. Покажем, что они не существуют. Имеем

$$L_0(s) = \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^s} \geq \frac{1}{2^s} \sum_0^\infty \frac{1}{(n+1)^s} =$$

$$= \frac{\zeta(s)}{2^s} \to \infty, \quad s \to 1+,$$

поскольку дзета - функция в точке 1 имеет полюс.

Теперь оценим $L_1(s)$. Признак Дирихле равномерной сходимости ряда: **пусть (1) частичные суммы $\sum_{n=1}^N a_n(s)$ равномерно ограничены на множестве S; (2) $b_n \rightrightarrows 0$ на S; (3) при каждом фиксированном $s \in S$ числовая последовательность $b_n(s)$ монотонна. Тогда ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n(s) b_n(s)$ равномерно сходится на S.**

Теорема Эйлера.

В нашем случае $a_n(s) = (-1)^n$, а $b_n(s) = \frac{1}{(2n+1)^s}$. Значит, ряд $L_1(s)$ равномерно сходится на множестве $S = \{s | s \geq 1\}$. Функции $a_n(s)$, $b_n(s)$ непрерывны на S. Поэтому сумма ряда $L_1(s)$ также непрерывна на S, и далее

$$\lim_{s \to 1+} L_1(s) = L_1(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots .$$

Учитывая неравенства

$$1 - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{4k+1} > 1 - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+3} > 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

справедливые при любом $k \geq 1$, заключаем, что $L_1(1) > \frac{2}{3}$ и $\ln L_1(1) < \infty$. Значит, ряды (6) расходятся и слагаемых в каждом из них бесконечно много. Теорема 6 доказана.

Конец
шестой лекции.