Цепные дроби

(Регулярная) конечная цепная дробь:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_N}}}} = [a_0; a_1, \dots, a_N], \quad a_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{N} \text{ при } i \geqslant 1.$$

(Два представления: $a_N = (a_N - 1) + \frac{1}{1}$. Единственность: $a_N > 1$, если $N > 0$.)

Связь с алгоритмом Евклида:

$$\begin{aligned}
a &= b \cdot a_0 + r_0 \quad &\Longrightarrow \quad & \frac{a}{b} = a_0 + \frac{r_0}{b} = a_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_0}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{r_1}{r_0}} = \cdots \\
b &= r_0 \cdot a_1 + r_1 & & \frac{b}{r_0} = a_1 + \frac{r_1}{r_0} \\
r_0 &= r_1 \cdot a_2 + r_2 & & \frac{r_0}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1} \\
&\dots & & \dots \\
r_{N-2} &= r_{N-1} \cdot a_N & & \frac{r_{N-2}}{r_{N-1}} = a_N
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ a_i — неполные частные.

Задача 1. Разложите в цепную дробь: 1) $\frac{77}{92}$; 2) $-\frac{77}{92}$.

$[a_0; a_1, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$ — n-я подходящая дробь. При этом:

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \cdots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}.$$

Рекуррентные соотношения для числителей и знаменателей:

$$\begin{aligned}
p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \qquad & p_{-1} = 1, \quad p_{-2} = 0 \\
q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2}. \qquad & q_{-1} = 0, \quad q_{-2} = 1.
\end{aligned}$$

Кроме того:

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n+1}$$

$\Longrightarrow$ приложение к решению линейных диофантовых уравнений.

Задача 2. Используя результат задачи 1, решите в целых числах уравнение $77x - 92y = 1$. (*Примечание*. Логичнее раскладывать 92/77.)

Бесконечная цепная дробь:

$$[a_0; a_1, \dots, a_n, \dots] = \lim_{n \to \infty} [a_0; a_1, \dots, a_n]$$

(значение бесконечной цепной дроби; всегда $\exists$ и $\notin \mathbb{Q}$).

Если $\alpha = [a_0; a_1, \ldots]$, $\alpha_n = [a_n; a_{n+1}, \ldots]$, то

$$\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, \alpha_n] = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}} \implies \alpha_n = \frac{\alpha q_{n-2} - p_{n-2}}{-\alpha q_{n-1} + p_{n-1}}.$$

Задача 3. Найдите значения периодических бесконечных цепных дробей:

1) $[1; 1, 1, \ldots] = [1; \overline{1}] = [\overline{1}]$;

2) $[1; 2, 3, 1, 2, 3, \ldots] = [\overline{1; 2, 3}] = [1; \overline{2, 3, 1}]$;

3) $[1; 1, \overline{1, 2, 3}]$.

Теорема Эйлера: значение периодической цепной дроби — квадратичная иррациональность.

Обратная задача: разложить данное $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ в бесконечную цепную дробь. Алгоритм Евклида:

$$\begin{aligned} &\alpha = \alpha_0 = a_0 + r_0, \quad a_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor,\ r_0 = \{\alpha_0\} \in (0, 1), \\ &\frac{1}{r_0} = \alpha_1 = a_1 + r_1, \\ &\frac{1}{r_1} = \alpha_2 = a_2 + r_2, \\ &\qquad\quad \ldots \end{aligned}$$

Например:

$$\begin{aligned} \sqrt{3} &= 1 + \left(\sqrt{3} - 1\right), \\ \frac{1}{\sqrt{3} - 1} &= \frac{\sqrt{3} + 1}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \\ \frac{2}{\sqrt{3} - 1} &= \sqrt{3} + 1 = 2 + \left(\sqrt{3} - 1\right), \end{aligned}$$

откуда $\sqrt{3} = [1; \overline{1, 2}]$.

Теорема Лагранжа: цепная дробь квадратичной иррациональности всегда периодична.

Задача 4. Разложите в бесконечную цепную дробь: 1) $\sqrt{7}$; 2) $\frac{1-\sqrt{37}}{9}$.

Приложение к приближениям:

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1})},$$

откуда:

$$\frac{1}{(a_{n+1} + 2) q_n^2} \leqslant \frac{1}{q_n(q_{n+1} + q_n)} < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leqslant \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leqslant \frac{1}{a_{n+1} q_n^2}.$$

Теорема Лежандра: если $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$, то $\frac{p}{q}$ — подходящая дробь к α.

Задача 5. Найдите подходящие дроби с наименьшими номерами, удовлетворяющие заданным условиям: 1) $\left|\frac{1-\sqrt{37}}{9} - \frac{p_n}{q_n}\right| < 10^{-4}$; 2) $\sqrt{7} < \frac{p_n}{q_n} < \sqrt{7} + 10^{-3}$.

Домашнее наказание

Задача 1. Разложите в цепную дробь: 1) $\frac{91}{27}$; 2) $-\frac{91}{27}$.

Задача 2. Используя результат задачи 1, решите в целых числах уравнение $27x + 91y = 1$.

Задача 3. Найдите значения периодических цепных дробей:

1) $[\overline{1; 2, 3, 2}] = [1; 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, \ldots]$;

2) $[2; 3, \overline{1, 2, 3, 2}]$;

3) $[a; \overline{2a}] \quad (a \in \mathbb{N})$;

4) $[a; \overline{a, 2a}] \quad (a \in \mathbb{N})$.

Задача 4. Разложите в цепную дробь: 1) $\sqrt{29}$; 2) $\frac{1}{2} + \sqrt{7}$; 3) $\frac{1}{2} - \sqrt{7}$.

Задача 5. Разложите число $\alpha = \frac{1-\sqrt{37}}{12}$ в цепную дробь и найдите подходящую дробь $\frac{p_n}{q_n}$ с наименьшим номером, удовлетворяющую условию $\alpha - 10^{-3} < \frac{p_n}{q_n} < \alpha$.

Ответы

1: 1) $[3; 2, 1, 2, 3]$; 2) $[-4; 1, 1, 1, 2, 3]$.
2: $x = 27 + 91t$, $y = -8 - 27t$, $t \in \mathbb{Z}$.
3: 1) $\frac{2+\sqrt{14}}{4}$; 2) $\frac{37-2\sqrt{14}}{13}$; 3) $\sqrt{a^2+1}$; 4) $\sqrt{a^2+2}$.
4: 1) $[5; \overline{2, 1, 1, 2, 10}]$; 2) $[3; \overline{6, 1, 6, 5}]$; 3) $[-3; 1, 5, \overline{1, 6, 5, 6}]$.
5: $\alpha = [-1; 1, 1, \overline{2, 1, 3}]$; $\frac{p_6}{q_6} = -\frac{25}{59}$. (*Примечание.* $\alpha < \frac{p_5}{q_5} < \alpha + 10^{-3}$.)