О геометрии многомерных диофантовых приближений

О. Н. Герман

В докладе будут вкратце изложены некоторые из результатов автора, полученных за последние годы. Все они в той или иной мере касаются обобщений таких понятий, как плохо приближаемое число, показатель иррациональности и принцип переноса.

Сначала будут рассказаны результаты о диофантовых экспонентах. Классическая диофантова экспонента матрицы $\Theta \in \mathbb{R}^{m\times n}$ определяется как супремум вещественных чисел γ, для которых существуют сколь угодно большие t, такие что система неравенств

$$|\mathbf{x}| \leqslant t, \qquad |\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leqslant t^{-\gamma}$$

имеет ненулевое решение в $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}^n$. С геометрической точки зрения эта величина характеризует, насколько хорошо некое подпространство в $\mathbb{R}^{m+n}$, соответствующее матрице Θ, приближается одномерными рациональными подпространствами. В данном контексте речь пойдет о связях между классическими диофантовыми экспонентами и их равномерными аналогами. Будут сформулированы результаты, усиливающие или обобщающие классические результаты Хинчина, Ярника, Дайсона, Апфельбека, Малера, а также недавние результаты Лорана и Бюжо. Кроме того, будут описаны полученные результаты для мультипликативных аналогов диофантовых экспонент, аналогичные существующим для обычных экспонент, усиливающие теоремы Шмидта и Вонга. Затем речь пойдет о так называемых промежуточных экспонентах, характеризующих, насколько хорошо упомянутое выше подпространство приближается рациональными подпространствами разных размерностей. Если все изложенные к этому моменту результаты будут иметь характер “теорем переноса”, то промежуточные экспоненты позволят некоторые из этих теорем превратить в цепочки неравенств, не использующие уже понятие переноса.

Напоследок мы опишем ряд результатов о многомерных цепных дробях. В качестве многомерного обобщения будет выступать полиэдр Клейна — выпуклая оболочка ненулевых точек решетки $\mathbb{Z}^n$, содержащихся в фиксированном симплициальном конусе с вершиной в точке начала координат. Будет сформулировано многомерное обобщение известного факта о том, что число плохо приближаемо тогда и только тогда, когда его неполные частные ограничены. Кроме того, будет предложено многомерное обобщение теоремы Лагранжа о квадратичных иррациональностях. В качестве любопытного следствия этих многомерных обобщений будет предложена переформулировка гипотезы Литтлвуда в терминах геометрических свойств полиэдров Клейна.