Семинар 5 — Арифметические функции

5.1. Докажите, что для любой мультипликативной функции f и любого натурального n справедливо равенство
$$\sum_{d\,|\,n} f(d) = \prod_{p\,|\,n} \left(1 + f(p) + \ldots + f\left(p^{\nu_p(n)}\right)\right),$$
где сумма берётся по всем делителям n, а произведение — по всем простым делителям n.

5.2. Докажите, что число делителей числа n (обозначается $\tau(n)$) и сумма делителей числа n (обозначается $\sigma(n)$) суть мультипликативные функции. Выведите для них явные формулы.

5.3. Докажите, что для *функции Мёбиуса*
$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1 \\ 0, & \text{если } n \text{ делится на квадрат простого числа} \\ (-1)^s, & \text{если } n = p_1 \ldots p_s \text{ и } p_i \neq p_j \text{ при } i \neq j \end{cases}$$
справедливы следующие равенства:

а) $\displaystyle\sum_{d\,|\,n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1 \\ 0, & \text{если } n \neq 1 \end{cases};$

б) $\displaystyle\sum_{d\,|\,n} \frac{\mu(d)}{d} = \prod_{p\,|\,n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$

5.4. Докажите, что для любой мультипликативной функции f и любого натурального n справедливо равенство
$$\sum_{d|n} \mu(d) f(d) = \prod_{p|n} (1 - f(p)).$$

5.5. Количество целых чисел от 1 до n, взаимно простых с n, обозначается $\varphi(n)$. Функция $\varphi(n)$ называется *функцией Эйлера*. Докажите формулу
$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$
обосновав каждое равенство в цепочке
$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{d|(k,n)} \mu(d) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

5.6. Решите в натуральных числах уравнения:

а) $\varphi(7^x) = 294$;

б) $\varphi(3^x 5^y) = 360$;

в) $\varphi(nx) = \varphi(x)$, где $n \in \mathbb{N}$.

5.7. Докажите, что
$$\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m) \frac{(n,m)}{\varphi((n,m))}.$$

5.8.* **Теорема Евклида–Эйлера.** Докажите, что чётное положительное число N *совершенно* (т.е. равно сумме своих собственных делителей) тогда и только тогда, когда $N = 2^n(2^{n+1} - 1)$, причём $2^{n+1} - 1$ — простое число.

Свёртка Дирихле

Если f и g — арифметические функции (т.е. комплекснозначные функции, заданные на множестве натуральных чисел), то функция $h = f \circ g$, задаваемая равенством

$$h(n) = \sum_{d \mid n} f(d)g(n/d),$$

называется *свёрткой Дирихле* функций f и g.

5.9. Определим функцию

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 0, & \text{если } n \neq 1. \end{cases}$$

Докажите, что для любой арифметической функции f справедливо $f \circ \varepsilon = \varepsilon \circ f = f$.

5.10. Определим следующие арифметические функции:

$$\mathrm{id}(n) = n \qquad \text{(тождественная функция)},$$

$$\mathbf{1}(n) = 1 \qquad \text{(тождественная единица)},$$

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k \qquad \text{(сумма } k\text{-х степеней делителей } n\text{)},$$

$$\lambda(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ (-1)^{\gamma_1 + \ldots + \gamma_s}, & \text{если } n = p_1^{\gamma_1} \ldots p_s^{\gamma_s}, \end{cases} \qquad \text{(функция Лиувилля)},$$

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p\,, & \text{если } n = p^k,\ k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \qquad \text{(функция Мангольдта)}.$$

Докажите, что

а) $\mathbf{1} \circ \mathbf{1} = \tau$;
б) $\mathrm{id} \circ \mathbf{1} = \sigma$;
в) $\mu \circ \mathbf{1} = \varepsilon$;
г) $\mu \circ \tau = \mathbf{1}$;
д) $\varphi \circ \mathbf{1} = \mathrm{id}$;
е) $\varphi \circ \tau = \sigma$;
ж) $\mu \circ \mathrm{id} = \varphi$;
з) $\mu \circ \sigma = \mathrm{id}$;
и) $\mu \circ \sigma_k = \mathrm{id}^k$;
к) $\mu^2 \circ \lambda = \varepsilon$.
л) $\Lambda \circ \mathbf{1} = \ln$;

5.11. Докажите, что функция Лиувилля $\lambda(n)$ удовлетворяет тождеству

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = k^2, \\ 0, & \text{если } n \neq k^2. \end{cases}$$

Алгебраическая точка зрения

5.12. Докажите, что относительно свёртки Дирихле множество всех мультипликативных функций образует абелеву группу, т.е. что справедливы следующие утверждения.

а) Если f и g — мультипликативные функции, то $f \circ g$ — тоже мультипликативна и $f \circ g = g \circ f$.

б) Если f, g, h — мультипликативные функции, то $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

в) Функция ε является нейтральным элементом относительно свёртки Дирихле.

г) Для любой мультипликативной функции f найдётся такая мультипликативная функция g, что $f \circ g = g \circ f = \varepsilon$.

5.13. Выведите из пункта (в) задачи 5.10 формулу обращения Мёбиуса и докажите, что если функции f и g связаны соотношением $f(n) = \sum_{d \mid n} g(d)$, то мультипликативность f равносильна мультипликативности g.