Семинар 2 — Делимость: алгоритм Евклида

Алгоритм Евклида

2.1. Найдите $(123456789\,,\,987654321)$.

2.2. Докажите, что для нечётных a, b, c справедливо равенство $\left(\dfrac{a+b}{2}\,,\,\dfrac{b+c}{2}\,,\,\dfrac{c+a}{2}\right) = (a, b, c)$.

2.3. Найдите $\left(\underbrace{11\ldots1}_{n}\,,\,\underbrace{11\ldots1}_{m}\right)$.

2.4. Докажите, что $\left(a^n - 1\,,\,a^m - 1\right) = a^{(n,m)} - 1$.

2.5. Используя алгоритм Евклида, решите уравнения (укажите *все* решения):

а) $17x - 27y = 1$;
б) $144x + 233y = 1$;
в) $144x + 233y = 8$;
г) $20x + 12y = 2012$.

2.6. Докажите, что для любых натуральных $a_1, \ldots, a_n$ существуют такие целые $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, что

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = (a_1, \ldots, a_n).$$

2.7.* **Теорема Ламе.** Докажите, что количество делений с остатком в алгоритме Евклида не превосходит $5m$, где m — количество цифр в десятичной записи меньшего из чисел.

Основная теорема арифметики

2.8. Пусть $a, b \in \mathbb{N}$, $a = p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s}$, $b = p_1^{\beta_1} \ldots p_s^{\beta_s}$, где $p_1, \ldots, p_s$ — попарно различные простые числа, $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_s \in \mathbb{Z}$. Докажите, что
а) $(a, b) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} \ldots p_s^{\min(\alpha_s,\beta_s)}$;
б) $[a, b] = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} \ldots p_s^{\max(\alpha_s,\beta_s)}$;
в) $ab = (a, b)[a, b]$.

2.9. Сколькими нулями оканчивается десятичная запись числа $1000!$?

2.10. Пусть p — простое число, n — натуральное. Докажите, что

а) $\nu_p(n!) = [n/p] + [n/p^2] + \ldots$; б) $\nu_p(n!) \leqslant \dfrac{n}{p-1}$;

в) $(n!)^{\frac{1}{n}} \leqslant \prod\limits_{p \leqslant n} p^{\frac{1}{p-1}}$, где произведение берётся по всем простым, не превосходящим n.

2.11. Докажите, что при любом действительном x справедливо неравенство $[6x]+[x] \geqslant [3x]+2[2x]$.

2.12. Докажите, что при любом натуральном n число $\dfrac{6n!n!}{3n!2n!2n!}$ является целым.

Резерв

2.13. Решите в натуральных числах уравнения

а) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$, p — простое;
б) $x^y = y^x$;
в) $n^x + n^y = n^z$;
г) $(y+1)^x - 1 = y!$.

2.14. Решите в положительных рациональных числах уравнение $x^{x+y} = (x+y)^y$.

2.15. **Числа Мерсенна.** Докажите, что если число $a^n - 1$ — простое, то $a = 2$ и n — простое. (Числа $M_p = 2^p - 1$ с простым p называются *числами Мерсенна*).

2.16. **Числа Ферма.** Докажите, что если число $a^n + 1$ — нечётное простое, то a четно и $n = 2^k$. (Числа $f_k = 2^{2^k} + 1$ называются *числами Ферма*).

2.17. Докажите, что f_n делит $2^{f_n} - 2$.

2.18. Пусть p — нечётное простое число. Докажите, что если f_n — простое, то оно не представимо в виде $f_n = a^p - b^p$ с целыми a, b.

2.19. Пусть $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, $a_n \neq 0$, $n \geqslant 1$. Могут ли значения этого многочлена во всех целых неотрицательных точках быть простыми числами?

2.20. Докажите, что не существует многочлена $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, такого что $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 5$.