Семинар 1 — Делимость: вводные задачи

1.1. Докажите, что для любого натурального $n \geqslant 2$ выполнены следующие утверждения:
а) найдутся n подряд идущих составных чисел;
б) найдутся n подряд идущих натуральных чисел, среди которых ровно одно простое;
в) между n и $n!$ есть хотя бы одно простое число.

1.2. Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность всех простых чисел ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, … (кстати, почему простых чисел бесконечно много?)). Докажите, что для любого $n \geqslant 2$ справедливо неравенство $p_{n+1} < p_1 p_2 \ldots p_n$.

1.3. Найдите p, если известно, что
а) p, $p+10$, $p+14$ — простые числа;
б) p, $4p^2+1$, $6p^2+1$ — простые числа.

1.4. При помощи метода **математической индукции** (разумеется, все должны (в итоге) знать, что это такое!) докажите, что для всех натуральных n справедливы утверждения

а) $10^n + 18n - 1 \,\vdots\, 27$;
б) $2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2} \,\vdots\, 17$;
в) $n^3 + 5n \,\vdots\, 6$;
г) $6^{2n+1} + 1 \,\vdots\, 7$;
д) $2^{3^n} + 1 \,\vdots\, 3^{n+1}$;
е) $(2^n - 1)^n - 3 \,\vdots\, 2^n - 3$;
ж) $\underbrace{11\ldots1}_{3^n} \,\vdots\, 3^n$.

1.5. Докажите, что числа Фибоначчи обладают следующими свойствами:

а) $2 \,|\, F_n \Leftrightarrow 3 \,|\, n$;
б) $3 \,|\, F_n \Leftrightarrow 4 \,|\, n$;
в) $4 \,|\, F_n \Leftrightarrow 6 \,|\, n$;
г) $F_n \,|\, F_m \Leftrightarrow n \,|\, m$ $(n \geqslant 3)$.

1.6. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида
а) $4k-1$; б) $6k-1$.

Следующие три задачи так или иначе связаны с **биномом Ньютона** (разумеется, все должны (в итоге) знать, что это такое!)

1.7. Сколько решений имеет уравнение $x + y + z = 1000$
а) в натуральных; б) в целых неотрицательных числах?

1.8. С помощью индукции докажите, что если p — простое число, a — натуральное, то $p \,|\, a^p - a$.

1.9. Докажите, что если a и b — взаимно простые натуральные числа, $b > a$, то b делит биномиальный коэффициент $\binom{b}{a}$.

1.10. Докажите, что для любого простого числа $p > 2$ числитель дроби $\frac{m}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1}$ делится на p.

1.11*. При каких значениях n все коэффициенты в разложении бинома Ньютона $(a+b)^n$ нечётны?

1.12*. Пусть $d_0, d_1, \ldots, d_m$ — все делители числа N, $1 = d_0 < d_1 < \ldots < d_m = N$. Докажите, что для любого k справедливо $d_k \leqslant 3d_{k-1}$, если при натуральном n
а) $N = 2^{2^n} - 1$; б) $N = 2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1$; в) $N = 4^{3^n} - 1$.

1.13.** Натуральные числа a и b таковы, что при любом натуральном n число $\dfrac{a^n - 1}{b^n - 1}$ является натуральным. Докажите, что $a = b^m$ при некотором $m \in \mathbb{N}$.